Condições LMI Para Avaliar e Ampliar as Margens de Estabilidade de Sistemas Lineares Incertos a Tempo Discreto ⋆

Paulo J. de Oliveira, * **Ricardo C. L. F. Oliveira,** ** **Pedro L. D. Peres** **

* *UNEB – Universidade do Estado da Bahia (e-mail: pjdeoliveiraz@gmail.com).*
** *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas, SP, Brasil (e-mails: {ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br).*

Abstract: This article investigates the robust stability of discrete-time uncertain linear systems with parameters belonging to intervals. Differently from the techniques available in the literature, the proposed method, formulated in terms of an iterative algorithm based on LMIs, handles the limits of the intervals as optimization variables and can be used, for example, to search for the maximum allowable variation around nominal values in order to preserve stability. Experiments involving controller fragility analysis and volume maximization of the polyhedral region centered on nominal parameters are presented to illustrate possible applications of the proposed technique.

Resumo: Este artigo investiga a estabilidade robusta de sistemas lineares incertos a tempo discreto com parâmetros pertencentes a intervalos. Diferentemente das técnicas disponíveis na literatura, o método proposto, formulado em termos de um algoritmo iterativo baseado em LMIs, trata os limites dos intervalos como variáveis de otimização e pode ser usado, por exemplo, para buscar a variação máxima admissível em torno de valores nominais de modo a preservar a estabilidade. Experimentos envolvendo análise de fragilidade de controladores e maximização de volume da região poliédrica centrada em parâmetros nominais são apresentados para ilustrar possíveis aplicações da técnica proposta.

Keywords: linear systems; discrete-time; uncertain parameters; stability margins; fragility of controllers; linear matrix inequality.

Palavras-chaves: sistemas lineares; tempo discreto; parâmetros incertos; margens de estabilidade; fragilidade de controladores; desigualdade matricial linear.

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda o problema de estabilidade robusta de sistemas lineares incertos a tempo discreto sujeitos a incertezas paramétricas. Diversas publicações acadêmicas investigam esse assunto. Em particular, os livros de Barmish (1994) e Bhattacharyya et al. (1995) condensam, de forma sistemática e abrangente, uma numerosa produção de textos contendo as mais diversas ferramentas matemáticas e aplicações concernentes a esta matéria. Barmish, no capítulo *Embelishments* (Barmish, 1994), referindo-se à possibilidade de expansão ou superação de limitações inerentes ao tratamento de sistemas com incertezas paramétricas, à luz do referencial teórico disponível, apresenta alguns possíveis avanços sobre o assunto com o uso da teoria da estabilidade de Lyapunov por meio de um tratamento numérico relativamente novo à época, algoritmos de pontos interiores e desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs).

Nesse contexto, é fundamental destacar o avanço significativo observado nos últimos vinte e cinco anos, principalmente após o surgimento de técnicas de análise e controle robustas baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (Gahinet et al., 1996; Feron et al., 1996; de Oliveira et al., 1999; de Souza and Trofino, 2000; Peaucelle et al., 2000; Ramos and Peres, 2001), que apareceram como extensões dos resultados baseados na estabilidade quadrática (Horisberger and Belanger, 1976; Barmish, 1985). Particularmente no contexto da análise de estabilidade robusta, muitos artigos estabeleceram relaxações LMI convergentes em termos da existência de funções de Lyapunov com dependência polinomial dos parâmetros incertos (Henrion et al., 2004; Bliman, 2005; Chesi et al., 2005; Scherer and Hol, 2006; Oliveira and Peres, 2007; Oliveira et al., 2008b). Embora não existam resultados semelhantes para o problema de síntese de controladores, vale destacar a evolução das técnicas de controle baseadas

⋆ Este trabalho foi parcialmente financiado pelas agências brasileiras CNPq, e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Código Financeiro 001.

em LMIs com o uso de métodos que podem buscar ganhos de controle robustos no contexto de matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros polinomiais, como o projeto em duas etapas (Peaucelle and Arzelier, 2001; Moreira et al., 2011; Agulhari et al., 2012) e abordagens iterativas (Hu and Jaimoukha, 2021; Felipe and Oliveira, 2021).

Este artigo propõe uma técnica para avaliar a estabilidade robusta de um sistema linear a tempo discreto com uma matriz dinâmica afetada por parâmetros incertos pertencentes a intervalos. A principal diferença em relação a outros trabalhos da literatura sobre sistemas lineares a tempo discreto incertos é a capacidade de tratar os valores mínimo e máximo para os intervalos dos parâmetros incertos como *variáveis de otimização*, possibilitando, por exemplo, maximizar o volume da região poliédrica centrada nos valores nominais dos parâmetros de modo a preservar a estabilidade. A busca pelos intervalos máximos é realizada por meio de um algoritmo iterativo baseado em LMIs. Exemplos numéricos ilustram a aplicação do método para análise de estabilidade robusta e avaliação da fragilidade de controladores.

2. PRELIMINARES

Considere o sistema linear incerto a tempo discreto

$$x(\tau+1) = A(\epsilon)x(\tau),\ A(\epsilon) = A_0 + \mathbb{L}(\epsilon),\ \mathbb{L}(\epsilon) = \sum_{i=1}^{L} \epsilon_i A_i \tag{1}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 0,\ldots,L$ são matrizes dadas. O vetor de parâmetros limitados invariantes no tempo $\epsilon = [\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_L]^T$ pertence ao hiperretângulo $\mathbb{H}_L$:

$$\mathbb{H}_L = \left\{\epsilon \in \mathbb{R}^L : \epsilon_i^- \leq \epsilon_i \leq \epsilon_i^+,\ 0 \in [\epsilon_i^-,\epsilon_i^+]\right\}$$

com ϵ_i^- e ϵ_i^+ valores conhecidos. Observe que a restrição $0 \in [\epsilon_i^-,\epsilon_i^+]$, garante que $\mathbb{H}_L$ contém a origem, de modo que A_0 é um caso particular da matriz $A(\epsilon)$, usualmente chamada de *matriz nominal*. O sistema (1) é denominado um sistema linear intervalar (ou afim).

O estudo da estabilidade robusta do sistema (1) (ou equivalentemente, o estudo da estabilidade Schur da matriz $A(\epsilon)$, $\forall\epsilon \in \mathbb{H}_L$) dá origem às técnicas de análise e controle propostas neste trabalho. Uma maneira usual de realizar esta tarefa é por meio da teoria da estabilidade de Lyapunov, como mostra o teorema a seguir.

Teorema *1.* O sistema (1) é robustamente estável se, e somente se, existirem matrizes $F(\epsilon)$ e $G(\epsilon) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e uma matriz definida positiva dependente de parâmetros $P(\epsilon) = P^T(\epsilon)$ tais que [1]

$$\begin{bmatrix} -P(\epsilon) & 0 \\ 0 & P(\epsilon) \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\begin{bmatrix} F(\epsilon) \\ G(\epsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\epsilon) & -I \end{bmatrix}\right) < 0, \quad \forall\epsilon \in \mathbb{H}_L \tag{2}$$

As condições do Teorema 1, formuladas com o auxílio do Lema de Finsler, são bem conhecidas na literatura de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares incertos, e técnicas consolidadas formuladas em termos de relaxações LMI estão disponíveis para resolver (2) (Bliman, 2005; Henrion et al., 2004; Chesi et al., 2005; Scherer and Hol, 2006; Oliveira and Peres, 2007; Agulhari et al., 2019). No entanto, um cenário em que os limites do conjunto $\mathbb{H}_L$, ou seja, os valores ϵ_i^- e ϵ_i^+, $i = 1,\ldots,L$ são *variáveis a serem determinadas* representa um problema mais desafiador. Em outras palavras, não há uma região $\mathbb{H}_L$ predefinida, e os tratamentos numéricos usuais não se aplicam mais, pois a matriz $A(\epsilon)$, que depende de ϵ_i^- e ϵ_i^+, multiplica as variáveis de otimização $F(\epsilon)$ e $G(\epsilon)$. Embora a determinação da maior região $\mathbb{H}_L$ que assegura estabilidade seja de difícil solução, as possibilidades de aplicações em problemas de análise e controle são interessantes e promissoras. Por exemplo, considerando que o volume do conjunto $\mathbb{H}_L$ é dado por

$$\mathcal{V} = \prod_{i=1}^{L} \ell_i, \quad \ell_i = (\epsilon_i^+ - \epsilon_i^-)$$

a maximização da soma

$$\rho = \sum_{i=1}^{L} \ell_i \tag{3}$$

constitui uma estratégia simples (heurística) para maximizar a região de incerteza (definida por $\mathbb{H}_L$) que preserva a estabilidade em torno da matriz nominal A_0. Outras aplicações são apresentadas na sequência. O desafio a ser superado é resolver as condições do Teorema 1 considerando ϵ_i^- e ϵ_i^+ como variáveis de otimização. Inspirada no trabalho de Felipe and Oliveira (2021), uma solução em termos de LMIs dependentes de parâmetros é proposta a seguir, tendo como novidade técnica o fato de a matriz $A(\epsilon)$ aparecer de modo afim nas condições. Em suma, o problema investigado neste trabalho é testar a estabilidade da matriz $A(\epsilon)$ em (1) de modo a maximizar alguma medida de volume da região $\mathbb{H}_L$ por meio da otimização dos limitantes dos parâmetros ϵ_i.

3. RESULTADO PRINCIPAL

O próximo teorema oferece uma maneira de testar a estabilidade do sistema (1) com a matriz $A(\epsilon)$ aparecendo de forma afim nas desigualdades. Essa formulação é o ingrediente chave para a construção de um procedimento que pode otimizar os limitantes dos parâmetros incertos que definem a região $\mathbb{H}_L$ ao mesmo tempo que garante a estabilidade da matriz $A(\epsilon)$.

Teorema *2.* Dadas as matrizes $\mathcal{Y}_i(\epsilon) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1,2,3$, com $\mathcal{Y}_3(\epsilon)$ de posto completo, a existência de $0 < P(\epsilon) = P^T(\epsilon) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathcal{X}_i(\epsilon) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1,2,3$ verificando a seguinte LMI robusta:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -P(\epsilon) & 0 & A^T(\epsilon) \\ 0 & P(\epsilon) & -I \\ A(\epsilon) & -I & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}(\epsilon)} + \mathrm{He}\left(\begin{bmatrix} \mathcal{X}_1(\epsilon) \\ \mathcal{X}_2(\epsilon) \\ \mathcal{X}_3(\epsilon) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1(\epsilon) & \mathcal{Y}_2(\epsilon) & \mathcal{Y}_3(\epsilon) \end{bmatrix}}_{\mathcal{Y}(\epsilon)}\right) < 0, \tag{4}$$

$\forall\epsilon \in \mathbb{H}_L$, implica que o sistema (1) é robustamente estável.

Prova: Levando em conta que $\mathcal{Y}_3(\epsilon)$ é de posto completo, considere a seguinte matriz

[1] $\mathrm{He}(X) = X + X^T$.

$$\mathcal{Y}^{\perp}(\epsilon) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ -\mathcal{Y}_3(\epsilon)^{-1}\mathcal{Y}_1(\epsilon) & -\mathcal{Y}_3(\epsilon)^{-1}\mathcal{Y}_2(\epsilon) \end{bmatrix}$$

como base para o espaço nulo da matriz $\mathcal{Y}(\epsilon)$ (isto é, $\mathcal{Y}(\epsilon)\mathcal{Y}^{\perp}(\epsilon) = 0$). Aplicando o lema de Finsler na desigualdade (4), tem-se a condição equivalente

$$\mathcal{Y}^{\perp T}(\epsilon)\ \mathcal{Q}(\epsilon)\ \mathcal{Y}^{\perp}(\epsilon) < 0,$$

que pode ser reescrita como em (2) com as escolhas $F^T(\epsilon) = -\mathcal{Y}_3(\epsilon)^{-1}\mathcal{Y}_1(\epsilon)$ e $G^T(\epsilon) = -\mathcal{Y}_3(\epsilon)^{-1}\mathcal{Y}_1(\epsilon)$, provando a estabilidade robusta do sistema. □

A LMI dependente de parâmetros do Teorema 2 pode ser resolvida usando aproximações polinomiais e relaxações (Chesi et al., 2005; Oliveira and Peres, 2007; Agulhari et al., 2019). No entanto, a característica atrativa do Teorema 2 é que a desigualdade (4) é afim nas variáveis de decisão, permitindo a possibilidade de tratar os parâmetros ϵ^- e ϵ^+ (ou seja, a incerteza em torno da matriz nominal A_0, representada por $A(\epsilon)$) como variáveis de otimização. Se a matriz nominal A_0 for Schur, o Teorema 2 terá solução sempre que as matrizes de entrada $\mathcal{Y}_i(\epsilon) \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, 3$ forem convenientemente escolhidas, conforme indicado a seguir. Adicionalmente, visando aumentar a região de incerteza, as variáveis ϵ^- e ϵ^+ podem ser otimizadas simultaneamente. Por exemplo, é possível resolver as condições do Teorema 2 maximizando o valor de ρ dado em (3), aumentando o volume da região poliédrica definida em torno da matriz nominal A_0. Uma vez que uma solução é obtida, as condições do Teorema 2 podem ser testadas novamente tomando $\mathcal{Y}_1(\epsilon) = \mathcal{X}_1^T(\epsilon)$, $\mathcal{Y}_2(\epsilon) = \mathcal{X}_2^T(\epsilon)$ e $\mathcal{Y}_3(\epsilon) = \mathcal{X}_3^T(\epsilon)$, com a garantia de que o novo valor de ρ é igual (no pior caso) ou maior que o valor calculado anteriormente. Claramente, é possível conceber um procedimento iterativo para aumentar o valor de ρ a cada iteração, seguindo a estratégia proposta em Felipe and Oliveira (2021). Assumindo que A_0 é Schur, uma escolha simples para $\mathcal{Y}_i(\epsilon)$, $i = 1, 2, 3$ pode ser obtida a partir da solução das LMIs

$$\begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\begin{bmatrix} F_0 \\ G_0 \end{bmatrix}[A_0 - I]\right) < 0, \quad P > 0 \qquad (5)$$

fazendo $\mathcal{Y}_1(\epsilon) = F_0^T$, $\mathcal{Y}_2(\epsilon) = G_0^T$ e $\mathcal{Y}_3(\epsilon) = -I$. Esta operação corresponde ao passo inicial (linha 1) do Algoritmo 1, que resolve iterativamente o Teorema 2 visando maximizar o volume da região poliédrica definida pelos valores de ℓ. A restrição $\ell_k \geq \ell_{k-1}$ (linha 6) garante que o volume não diminui ao longo das iterações, impondo que nenhuma das componentes do vetor ℓ pode diminuir. Além disso, para melhorar a heurística proposta, considere o código entre as linhas 15 e 22. Quando $it_{max2} > 0$, os valores correntes dos limitantes são fixos (em $\tilde{\epsilon}_i^-$ e $\tilde{\epsilon}_i^+$ na linha 12), e uma nova variável escalar r é introduzida (dando origem à matriz $A(\tilde{\epsilon})$) para produzir uma expansão uniforme do hiperretângulo definido pelos intervalos $[r\tilde{\epsilon}_i^-,\ r\tilde{\epsilon}_i^+]$. Esta opção pode ser útil para evitar um mínimo local, e pode ser desconsiderada de forma simples com a escolha $it_{max2} = 0$. Pelas mesmas razões acima, o valor de r é não decrescente ao longo desse laço interno. Além dos parâmetros it_{max1} e it_{max2}, o Algoritmo 1 pode ser encerrado se a evolução de ρ_k ou r_k estiverem abaixo de uma certa tolerância tol (linhas 9 e 18) durante as iterações.

Algoritmo 1 Aumentando a margem de estabilidade robusta.

1: **Inicialize:** A_i, ℓ, it_{max1}, it_{max2}, tol;
2: Resolva (5);
3: $\mathcal{Y}_1(\epsilon) \leftarrow F_0^T$, $\mathcal{Y}_2(\epsilon) \leftarrow G_0^T$, $\mathcal{Y}_3(\epsilon) \leftarrow -I$, $\ell_0 \leftarrow [0\ 0\ \cdots\ 0]$;
4: $\epsilon_v \leftarrow \left[\epsilon_1^-, \epsilon_1^+, \ldots, \epsilon_L^-, \epsilon_L^+\right]$;
5: $A(\epsilon) = A_0 + \sum_{i=1}^{L} \epsilon_i A_i$, $k_1 \leftarrow 1$;
6: **Enquanto** $k_1 \leq it_{max1}$ **Faça**
7: Resolva: max ρ_{k_1} s.t. (4), $\ell_{k_1} \geq \ell_{k_1 - 1}$ e $\rho_{k_1} \leq \sum_i \ell_{k_1 i}$;
8: $\ell_{sol} \leftarrow$ value($\epsilon_{v_{k_1}}$);
9: **Se** $|\rho_{k_1} - \rho_{k_1 - 1}| < tol$ **Então** abandone;
10: **Fim Se**
11: $\mathcal{Y}_i(\epsilon) \leftarrow \mathcal{X}_i^T(\epsilon)$, $i = 1,2,3$.
12: Seja $\tilde{\epsilon}_i^+ \leftarrow \epsilon_i^+$, $\tilde{\epsilon}_i^- \leftarrow \epsilon_i^-$;
13: $A(\tilde{\epsilon}) \leftarrow A_0 + \sum_{i=1}^{L} \tilde{\epsilon}_i r A_i$, em que $\tilde{\epsilon}_i^- \leq \tilde{\epsilon}_i \leq \tilde{\epsilon}_i^+$;
14: $k_2 \leftarrow 1$;
15: **Enquanto** $k_2 \leq it_{max2}$ **Faça**
16: Resolva: max r_{k_2} sujeito a (4) com $A(\tilde{\epsilon})$;
17: $\ell_{sol} \leftarrow r_{k_2} \epsilon_{v_{k_1}}$;
18: **Se** $|r_{k_2} - r_{k_2 - 1}| < tol$ **Então** abandone;
19: **Fim Se**
20: $\mathcal{Y}_i(\epsilon) \leftarrow \mathcal{X}_i^T(\epsilon)$, $i = 1,2,3$.
21: $k_2 = k_2 + 1$;
22: **Fim Enquanto**
23: $k_1 = k_1 + 1$;
24: **Fim Enquanto**
25: return ℓ_{sol};

Antes de apresentar as possíveis aplicações da estratégia proposta, é importante fornecer algumas informações sobre a implementação numérica das condições do Teorema 2. Como primeiro passo, devido às técnicas disponíveis para resolver LMIs dependentes de parâmetros, é conveniente não trabalhar diretamente o hiperretângulo $\mathbb{H}_L$. Por exemplo, considere a seguinte mudança de variável

$$\epsilon_i = \epsilon_i^+ \alpha_{i1} + \epsilon_i^- \alpha_{i2}, \quad [\alpha_{i1}\ \alpha_{i2}] \in \Gamma_2$$

em que Γ_N é o simplex unitário dado por

$$\Gamma_N = \left\{\xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1,\ \xi_i \geq 0\right\} \qquad (6)$$

A substituição da representação de ϵ_i em $\mathbb{A}(\epsilon)$ resulta em $\mathbb{A}(\alpha)$ com o vetor de parâmetros

$$\alpha = [\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{L1}, \alpha_{L2}] \in \Gamma_2 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_2$$

composto apenas por entradas não negativas pertencentes a domínios simplex. Além disso, a matriz $\mathbb{A}(\alpha)$ também depende dos limites ϵ_i^- e ϵ_i^+ de forma afim. Com esta nova representação, as condições do Teorema 2 podem ser reformuladas em termos de uma matriz polinomial homogênea de Lyapunov $P(\alpha)$ de graus arbitrários em cada conjunto de parâmetros α_i (Oliveira et al., 2008a). Observe que as matrizes de entrada $\mathcal{Y}_i(\epsilon)$, $i = 1,2,3$, se consideradas dependentes de parâmetros, também devem ser expressas em termos de α. Este procedimento de conversão e a geração de condições de programação (ou seja, um conjunto finito de LMIs) para fornecer uma solução para as condições do Teorema 2 pode ser realizado com a ajuda do *parser* ROLMIP (Agulhari et al., 2019).

4. APLICAÇÕES

4.1 Maximização da Incerteza Poliédrica

Nesta seção a técnica de análise de estabilidade proposta é investigada no contexto particular em que a matriz $A(\epsilon)$ é dada na forma *companheira*. A motivação é o emprego de resultados tipo Kharitonov (Kharitonov, 1978), que podem simplificar consideravelmente as condições do Teorema 2 diminuindo o número de LMIs, como detalhado a seguir.

Considere o sistema (1) com as matrizes dadas por

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbb{L}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\epsilon_1 & -\epsilon_2 & \cdots & -\epsilon_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

com A_0 Schur e

$$\epsilon_i = 0,\, i = b+2,\ldots,n, \quad b = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (8)$$

sendo $\lfloor p \rfloor$ uma notação para designar o inteiro igual ou imediatamente superior a p. Em outros termos, a matriz nominal A_0 tem apenas os coeficientes a_i, $i = 0,\ldots,b$ incertos (os demais são precisamente conhecidos).

Como a estabilidade da matriz $A(\epsilon)$ dada em (7) é equivalente à estabilidade do polinômio

$$z^n + (a_{n-1} + \epsilon_n)z^{n-1} + \cdots + (a_1 + \epsilon_2)z + a_0 + \epsilon_1$$

é possível invocar resultados do tipo Kharitonov, propostos por Hollot and Bartlett (1986), que asseguram que a estabilidade Schur do polinômio pode ser verificada testando-se apenas os vértices gerados pelos extremos dos intervalos incertos ϵ_i, $i = 1,\ldots,b+1$ (total de 2^{b+1} vértices), e por Kraus et al. (1988), que forneceu condições necessárias e suficientes para estabilidade Schur de polinômios de graus $n = 2$, 3, 4 e 5 baseadas em pontos extremos. Embora o Teorema 2 também possa ser utilizado em sistemas estruturados como em (7), resultados tipo Kharitonov permitem uma considerável melhoria tanto no que diz respeito ao conservadorismo do teste em si quanto na complexidade computacional relacionada ao número de LMIs. De fato, como é necessário e suficiente testar apenas os vértices de $A(\epsilon)$, é possível empregar uma matriz de Lyapunov (que independe de ϵ) para certificar a estabilidade de cada vértice. Essa estratégia contrasta significativamente com a abordagem do Teorema 2, em que a matriz de Lyapunov $P(\epsilon)$ (e as variáveis de folga) são funções de ϵ.

O corolário a seguir é uma extensão do Teorema 2 para lidar apenas com matrizes $A(\epsilon)$ estruturadas como em (7) e que satisfazem (8). Assume-se que a matriz $\mathbb{L}(\epsilon)$ somente contém elementos incertos nas posições permitidas pela restrição (8).

Corolário *1.* Sejam A_j, $j = 1,\ldots,2^{b+1}$ as matrizes associadas aos vértices de $A(\epsilon)$ estruturada como em (7) com parâmetros incertos que atendem a restrição (8), e $\mathcal{Y}_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1,2,3$, $j = 1,\ldots,2^{b+1}$ matrizes dadas. Se existirem matrizes $0 < P_j = P_j^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e matrizes $X_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 1,2,3$, $j = 1,\ldots,2^{b+1}$ de modo que as seguintes LMIs sejam verificadas

$$\begin{bmatrix} -P_j & 0 & A_j^T \\ 0 & P_j & -I \\ A_j & -I & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\begin{bmatrix} \mathcal{X}_{1j} \\ \mathcal{X}_{2j} \\ \mathcal{X}_{3j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{1j}(\epsilon) & \mathcal{Y}_{2j}(\epsilon) & \mathcal{Y}_{3j}(\epsilon) \end{bmatrix} \right) < 0, \quad (9)$$

para $j = 1,\ldots,2^{b+1}$, então $A(\epsilon)$ é Schur $\forall \epsilon \in \mathbb{H}_{b+1}$.

Diferentemente do Teorema 2, que exige uma estrutura para as variáveis de decisão de modo que uma solução numérica seja viável por meio de relaxações (com conservadorismo proporcional à estrutura e à relaxação), o Corolário 1 requer a solução de um problema de otimização baseado em LMIs com um número preciso de variáveis de otimização e de linhas de LMIs, o que certamente é uma grande vantagem.

Uma possibilidade de inicializar o Algoritmo 1 aplicado ao Corolário 1 é também fazer $\mathcal{Y}_{1j} = F_0^T$, $\mathcal{Y}_{2j} = G_0^T$ e $\mathcal{Y}_{3j} = -I$ com F_0 e G_0 calculadas por meio de (5) para a matriz nominal A_0. Como alternativa, outra inicialização garantidamente factível pode ser construída sempre que uma solução obtida em termos de $\mathbb{A}(\alpha)$, geralmente mais conservadora e computacionalmente complexa, estiver disponível. Por exemplo, suponha que o Algoritmo 1, resolvido com o Teorema 2, forneça os valores $\hat{\epsilon}_i^-$ e $\hat{\epsilon}_i^+$. Neste caso, os vértices A_j da matriz $A(\epsilon)$ são usados nas LMIs

$$\begin{bmatrix} -P_j & 0 \\ 0 & P_j \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\begin{bmatrix} F_j \\ G_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j & -I \end{bmatrix} \right) < 0, \quad P_j > 0 \quad (10)$$

e as inicializações $\mathcal{Y}_{1j} = F_j^T$, $\mathcal{Y}_{2j} = G_j^T$ e $\mathcal{Y}_{3j} = -I$, $j = 1,\ldots,2^{b+1}$ podem ser utilizadas no Corolário 1. O Algoritmo 1 pode ser empregado para buscar uma solução, fornecendo volumes garantidamente iguais ou maiores que os anteriores e, claramente, aumentando a eficiência do procedimento.

Exemplo 1 Considere o polinômio incerto gerado aleatoriamente

$$\begin{aligned} P(z,\epsilon) = {} & z^6 + 0{,}45z^5 + 0{,}04z^4 - (0{,}13 + \epsilon_4)z^3 \\ & + (0{,}02 + \epsilon_3)z^2 + (0{,}04 + \epsilon_2)z + 0{,}01 + \epsilon_1 \end{aligned}$$

que atende as condições do Corolário 1, e ao qual estão associadas as matrizes

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0{,}01 & -0{,}04 & -0{,}02 & 0{,}13 & -0{,}04 & -0{,}45 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{L}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & \epsilon_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com $\epsilon_i \in [\epsilon_i^-, \epsilon_i^+]$, $i = 1,\ldots,4$.

O objetivo é calcular os maiores valores de $\ell_i = (\epsilon_i^+ - \epsilon_i^-)$ tais que a matriz nominal perturbada pelas incertezas definidas pelos parâmetros ϵ_i permaneça robustamente Schur. Existem diversas possibilidades de se promover a expansão dos parâmetros incertos. Por exemplo, considere os três casos descritos a seguir. *i)* Adotar uma variação simétrica e expansão uniforme de todos os parâmetros, ou seja, todos os parâmetros variam igualmente em torno dos valores nominais; *ii)* Variação simétrica e não uniforme, quando os parâmetros variam independentemente e preservam a simetria em torno dos valores nominais; *iii)* Considerar os parâmetros incertos variando de forma independente entre si e expandindo-os assimetricamente em torno dos valores nominais. Geometricamente, essas configurações

Tabela 1. Maiores valores de $\ell \times 10^{-3}$ e volumes $\mathcal{V} \times 10^{-3}$ obtidos no Exemplo 1 usando o Algoritmo 1 com o Teorema 2 (graus $g = \{0,1,2\}$) e Corolário 1. São apresentados também o número de variáveis escalares (V) e linhas de LMI (L), o número de problemas LMIs (PL) resolvidos e o tempo computacional (em segundos).

	ℓ	$\mathcal{V}$	V	L	PL	tempo (s)
$T2_{g=0}$	290,8	12	130	298	10	1,32
$T2_{g=1}$	308,4	16	2065	1558	6	22,50
$T2_{g=2}$	308,4	16	10450	11740	8	7192,41
C1	308,4	16	2065	388	6	0,60
C1*	355,0	16	2065	388	2	0,18

corresponderiam, no primeiro caso, a um hipercubo centrado na origem do espaço de incertezas, no segundo a um hiperretângulo, também com centro na origem e, por último, um hiperretângulo contendo a origem.

No caso *i)* tem-se a simplificação

$$-\epsilon_i^- = \epsilon_i^+ = \bar{\epsilon},\ i = 1,\ldots,4, \quad \ell_i = 2\bar{\epsilon}$$

e o problema pode ser resolvido empregando qualquer condição de estabilidade robusta combinada, por exemplo, com um procedimento de bisseção sobre ℓ. Aplicando a bem conhecida estabilidade quadrática (Horisberger and Belanger, 1976), obtém-se $\ell_{quad} = 0{,}3292$. O emprego da condição de estabilidade robusta conclusiva de Gonçalves et al. (2006), baseada na subdivisão do domínio incerto, fornece o valor ótimo (com quatro dígitos de precisão) $\ell_{opt} = 0{,}3550$. A Tabela 1 mostra os resultados obtidos [2] pelo Algoritmo 1 com o Teorema 1 (T1) com $g \in \{0,1,2\}$ e Corolário 1 inicializado com (5) (C1) ou com (10) (C1*) usando o resultado obtido por T1 com $g = 1$.

Os resultados mostram que a técnica proposta só encontra o valor ótimo utilizando o C1*, que partiu de uma condição inicial em que $\ell = 0{,}3084$ estava assegurado. Contudo, note que o método proposto começa a ser vantajoso quando o problema requer a determinação de dois ou mais parâmetros, pois nesses casos os procedimentos de busca tornam-se impraticáveis. Por exemplo, considere o caso *ii)*, em que quatro parâmetros são otimizados, isto é, $-\epsilon_i^- = \epsilon_i^+ = \bar{\epsilon}_i$, $\ell_i = 2\bar{\epsilon}_i$, $i = 1,\ldots,4$, com resultados mostrados na Tabela 2. O caso *iii)*, com oito parâmetros (todos os limitantes ϵ_i^-, ϵ_i^+ são distintos) é apresentado na Tabela 3. A complexidade computacional foi omitida pois é similar à mostrada na Tabela 1.

Embora os resultados das Tabelas 2 e 3 não tenham apresentado volumes maiores, é possível extrair informações qualitativas interessantes. Por exemplo, a estabilidade robusta é menos sensível aos parâmetros ϵ_1 e ϵ_4, pois esses apresentaram as maiores faixas de estabilidade.

4.2 Fragilidade de Controladores

O problema de análise de fragilidade de controladores (Keel and Bhattacharyya, 1997; Peaucelle and Arzelier, 2005; Moreira and Basilio, 2007; Takahashi et al., 2000; Famularo et al., 2000) é uma das interessantes aplicações da abordagem proposta. Considere o sistema (1) reescrito na forma

$$x(\tau+1) = A(\epsilon,\sigma)x(\tau), \quad A(\epsilon,\sigma) = A_0 + \sum_{i=1}^{L_1} \epsilon_i A_i + \sum_{i=1}^{L_2} \sigma_i \mathcal{K}_i \tag{11}$$

em que $\sigma_i \in [\sigma_i^-,\sigma_i^+]$ com $\sigma \in \mathbb{H}_{L_2}$. O vetor de parâmetros ϵ representa incertezas na planta, ao passo que σ corresponde a incertezas nas entradas de um ganho de controle e $\mathcal{K}_i$ corresponde às matrizes de ponderação das incertezas sobre os respectivos ganhos do controlador. Por exemplo, considere o sistema linear a tempo discreto e lei de controle por realimentação estática de saída

$$x(\tau+1) = Ax(\tau) + Bu(\tau) \qquad u(\tau) = Ky(\tau)$$
$$y(\tau) = Cx(\tau)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^p$ representando respectivamente os estados, entradas e saídas. A matriz dinâmica de malha fechada $A + BKC$ pode ser diretamente representada na forma (11) sempre que B e C não possuem parâmetros incertos. Além disso, essa formulação pode ser aplicada em casos em que os parâmetros incertos da planta e do ganho de controle K aparecem de forma linear, afim ou multi-linear, contanto que seja possível linearizar os termos multi-lineares, por exemplo, por meio de mudanças de variáveis ou recorrendo a sobre limitações.

A representação (11) pode ser tratada, a menos de pequenas modificações, pelos Teoremas 2, Corolário 1 e Algoritmo 1, como ilustrado no próximo exemplo.

Exemplo 2 Considere o sistema mecânico massa-mola incerto, emprestado de Moreira et al. (2011) (MOP11), para o qual foi projetado um ganho estático de realimentação da saída $K = [K_1 \ \ K_2] = [-18{,}5369 \ \ 5{,}3400]$ que garante um custo garantido de 0,677 para a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema em malha-fechada considerando as variações paramétricas $k_1 = 2{,}5 \pm 1{,}5$ e $c_0 = 2{,}5 \pm 1{,}5$, sendo k_1 o valor da constante da mola e c_0 o coeficiente de atrito viscoso. O objetivo é avaliar a estabilidade robusta do sistema realimentado frente a variações de k_1, c_0, K_1 e K_2 no entorno dos valores nominais.

Tabela 2. Intervalos $[\epsilon_i^-,\epsilon_i^+]$ e volumes $\mathcal{V}$ obtidos no Exemplo 1 com $\epsilon_i^- = \epsilon_i^+$ usando o Algoritmo 1 com o Teorema 2 (graus $g = \{0,1,2\}$) e Corolário 1.

	$[\epsilon_i^-,\epsilon_i^+] \times 10^{-2}$, $i = 1,\ldots,4$				$\mathcal{V} \times 10^{-3}$
$T2_{g=0}$	[-15 15]	[-16 16]	[-15 15]	[-20 20]	11
$T2_{g=1}$	[-17 17]	[-11 11]	[-9 9]	[-34 34]	9
$T2_{g=2}$	[-17 17]	[-10 10]	[-9 9]	[-34 34]	9
C1	[-17 17]	[-11 11]	[-9 9]	[-34 34]	9
C1*	[-17 17]	[-11 11]	[-9 9]	[-34 34]	9

Tabela 3. Intervalos $[\epsilon_i^-,\epsilon_i^+]$ e volumes $\mathcal{V}$ obtidos no Exemplo 1 usando o Algoritmo 1 com o Teorema 2 (graus $g = \{0,1,2\}$) e Corolário 1.

	$[\epsilon_i^-,\epsilon_i^+] \times 10^{-2}$, $i = 1,\ldots,4$				$\mathcal{V} \times 10^{-3}$
$T2_{g=0}$	[-13 14]	[-14 8]	[-23 0]	[-26 38]	9
$T2_{g=1}$	[0 51]	[-4 6]	[-26 0]	[-39 62]	13
$T2_{g=2}$	[0 56]	[0 5]	[-25 0]	[-41 63]	7
C1	[0 54]	[-1 5]	[-24 0]	[-42 63]	8
C1*	[0 55]	[-0 1]	[-32 0]	[-38 64]	2

[2] As opções $it_{max1} = 15$, $it_{max2} = 0$ e $tol = 10^{-3}$ foram usadas em todos os exemplos. O mesmo grau polinomial escolhido para $P(\epsilon)$ também é usado para $\mathcal{Y}_i(\epsilon)$ e $\mathcal{X}_i(\epsilon)$, $i = 1,2,3$. Os experimentos foram realizados em PC equipado com: Core i7-2600 (3,40 GHz), 8 GB de RAM, MATLAB Versão: 9.2.0.538062 (R2017a) 64 bits para Linux (Ubuntu 20.04 64 bits).

ISSN: 2525-8311

DOI: 10.20906/CBA2022/3549

Reescrevendo esse exemplo no *framework* delimitado pela equação (11), tem-se:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 01 \\ -0{,}15 & 0{,}025 & -0{,}0518 & 0{,}2670 \\ 0{,}05 & -0{,}05 & 0 & 0{,}75 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo ϵ_1, ϵ_2, σ_1 e σ_2 as perturbações sobre k_1, c_0, K_1 e K_2 respectivamente.

O primeiro estudo é avaliar a estabilidade de malha fechada frente apenas aos intervalos de incertezas de k_1 e c_0. Utilizando $g = 2$, o Algoritmo 1 fornece

$$\epsilon_1 \in [-2{,}19 \;\; 2{,}19],\ \epsilon_2 \in [-2{,}13 \;\; 2{,}13],\ \mathcal{V} = 18{,}608$$

para caso de limitantes simétricos e

$$\epsilon_1 \in [-1{,}93 \;\, 205{,}03],\ \epsilon_2 \in [0 \;\, 17{,}11], \mathcal{V} = 3541{,}980$$

para limitantes assimétricos. O resultado do caso simétrico mostra que controlador projetado pode garantir estabilidade para intervalos um pouco maiores que os originais. No caso assimétrico tem-se uma informação qualitativa interessante: os limites superiores de ambos os parâmetros podem aumentar significativamente sem que haja perda de estabilidade.

Como segundo experimento considere um cenário em que os limitantes de k_1 e c_0 são mantidos como feito em MOP11, e investigam-se perturbações sobre os ganhos de controle K_1 e K_2. Para o caso simétrico o Algoritmo 1 produz

$$\sigma_1 \in [-10{,}27 \;\; 10{,}27],\ \sigma_2 \in [-3{,}51 \;\; 3{,}51],\ \mathcal{V} = 1299{,}36$$

e para o caso assimétrico

$$\sigma_1 \in [-17{,}53 \;\; 11{,}94],\ \sigma_2 \in [-11{,}92 \;\; 2{,}34],\ \mathcal{V} = 3781{,}88$$

Os resultados demonstram a robustez (não fragilidade) do controlador em relação à estabilidade robusta do sistema em malha-fechada.

5. CONCLUSÃO

Este artigo apresentou uma abordagem baseada em LMIs para análise de estabilidade de sistemas lineares incertos a tempo discreto, tendo como novidade a possibilidade de tratar os limitantes dos parâmetros incertos como variáveis de otimização. Exemplos numéricos ilustram algumas aplicações possíveis, como o problema de determinar a fragilidade de controladores. O próximo passo desta pesquisa é estender os resultados para avaliar o efeito da variação dos parâmetros incertos em critérios de desempenho, como localização de polos e as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$.

REFERÊNCIAS

C. M. Agulhari, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. LMI relaxations for reduced-order robust $\mathcal{H}_\infty$ control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 57(6):1532–1537, June 2012.

C. M. Agulhari, A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 45(3):36:1–36:25, August 2019. `http://rolmip.github.io`.

B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *J. Optim. Theory and Appl.*, 46(4):399–408, August 1985.

B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems.* Macmillan Publishing Company, New York, NY, 1994.

S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L. H. Keel. *Robust Control: The Parametric Approach.* Prentice-Hall Publishing Co., Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.

P.-A. Bliman. Stabilization of LPV systems. In D. Henrion and A. Garulli, editors, *Positive Polynomials in Control*, volume 312 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 103–117. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Polynomially parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50(3):365–370, March 2005.

M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Syst. Control Lett.*, 37(4):261–265, July 1999.

C. E. de Souza and A. Trofino. A linear matrix inequality approach to the design of robust $\mathcal{H}_2$ filters. In L. El Ghaoui and S. I. Niculescu, editors, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, Advances in Design and Control, pages 175–185. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

D. Famularo, P. Dorato, C. T. Abdallah, W. M. Haddad, and A. Jadbabaie. Robust non-fragile LQ controllers: the static state feedback case. *Int. J. Control*, 73(2):159–165, 2000.

A. Felipe and R. C. L. F. Oliveira. An LMI-based algorithm to compute robust stabilizing feedback gains directly as optimization variables. *IEEE Trans. Autom. Control*, 66(9):4365–4370, September 2021.

E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Trans. Autom. Control*, 41(7):1041–1046, July 1996.

P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 41(3):436–442, March 1996.

E. N. Gonçalves, R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and R. C. Mesquita. New approach to robust $\mathcal{D}$-stability analysis of linear time-invariant systems with polytope-bounded uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 51 (10):1709–1714, October 2006.

D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, and J. B. Lasserre. On parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of linear systems. In *Proc. 43rd IEEE Conf. Decision Control*, pages 887–892, Paradise Island, Bahamas, December 2004.

C. V. Hollot and A. Bartlett. Some discrete-time counterparts to Kharitonov's stability criterion for uncertain systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 31(4):355–356, April 1986.

H. P. Horisberger and P. R. Belanger. Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters. *IEEE Trans. Autom. Control*, 21:705–708, 1976.

C. Hu and I. M. Jaimoukha. New iterative linear matrix inequality based procedure for H_2 and H_∞ state feedback control of continuous-time polytopic systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 31(1):51–68, January 2021.

L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya. Robust, fragile, or optimal? *IEEE Trans. Autom. Control*, 42(8):1098–1105, 1997.

V. L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 14:2086–2088, 1978.

F. J. Kraus, B. D. O. Anderson, E. I. Jury, and M. Mansour. On the robustness of low-order Schur polynomials. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(5):570–577, May 1988.

H. R. Moreira, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Robust $\mathcal{H}_2$ static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems. *Optim. Control Appl. Meth.*, 32(1):1–13, January/February 2011.

M. V. Moreira and J. C. Basilio. Fragility problem revisited: overview and reformulation. *IET Control Theory & Appl.*, 1(5):1496–1503, September 2007.

R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(7):1334–1340, July 2007.

R. C. L. F. Oliveira, P.-A. Bliman, and P. L. D. Peres. Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications. In *Proc. 47th IEEE Conf. Decision Control*, pages 2226–2231, Cancun, Mexico, December 2008a.

R. C. L. F. Oliveira, M. C. de Oliveira, and P. L. D. Peres. Convergent LMI relaxations for robust analysis of uncertain linear systems using lifted polynomial parameter-dependent Lyapunov functions. *Syst. Control Lett.*, 57 (8):680–689, August 2008b.

D. Peaucelle and D. Arzelier. An efficient numerical solution for $\mathcal{H}_2$ static output feedback synthesis. In *Proc. 2001 Eur. Control Conf.*, pages 3800–3805, Porto, Portugal, September 2001.

D. Peaucelle and D. Arzelier. Ellipsoidal sets for resilient and robust static output-feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50(6):899–904, June 2005.

D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust $\mathcal{D}$-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Syst. Control Lett.*, 40(1):21–30, May 2000.

D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Syst. Control Lett.*, 43(5):371–378, August 2001.

C. W. Scherer and C. W. J. Hol. Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs. *Math. Program. B*, 107(1–2):189–211, June 2006.

R. H. C. Takahashi, D. A. Dutra, R. M. Palhares, and P. L. D. Peres. On robust non-fragile static state-feedback controller synthesis. In *Proc. 39th IEEE Conf. Decision Control*, volume 1, pages 4909–4914, Sydney, Australia, December 2000.