

## Sobre o Uso de Métodos de Predição de Erro para Identificar Módulos em Redes Dinâmicas

Lucas F. M. Rodrigues\* Lucas P. R. K. Ihlenfeld\*  
Wagner F. S. Souza\* Gustavo H. C. Oliveira\*

\* *Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba/PR, (e-mail: fariaslucasrodrigues@ufpr.br, lucas.ihlenfeld@ufpr.br, gustavo.oliveira@ufpr.br).*

---

**Abstract:** In this paper, the problem of identifying dynamic modules that operate in a complex interconnect structure is discussed. This problem is presented as an extension of the classical closed-loop configuration and the goal is to consistently identify the transfer functions embedded in a dynamic network, based on the internal and external signals of the network. The objective of this paper is to provide a comparison of methods and apply them to identify modules in dynamic networks. Graph representation tools are presented to verify the network interconnection structure conditions. For a known topology, it is shown that classical prediction error methods for closed-loop identification can be generalized to provide estimates of the modulus, under certain experimental circumstances. The analysis and correction of the signals that will be used in the predictor constitute the adaptation for the case of networks and are discussed in this work. To attain that purpose, the direct method, which depends on noise models, and the two-stage method, which is independent of the noise model but depends on external excitation signals, are considered. The results show that the direct method can present bias and the two-stage method is able to reduce the variance of the parameter estimation. Therefore, the two methods presented were able to consistently estimate local modules in dynamic networks, with the two-stage method showing better indicators. The models were validated using a second set of input and output data. The results showed that the model was able to reproduce the dynamic behavior of the system with the validation data.

**Resumo:** Neste artigo, o problema de identificação de módulos dinâmicos que operam em uma estrutura de interconexão complexa é abordado. Este problema é apresentado como uma extensão da configuração clássica de malha fechada onde pretende-se identificar de modo consistente as funções de transferência de uma rede dinâmica, com base nos sinais internos e externos da rede. O objetivo desse trabalho é fornecer uma comparação de métodos de identificação e aplicá-los para estimação de módulos embutidos em redes dinâmicas. Ferramentas de representação por grafos são apresentadas para verificar as condições de estrutura de interconexão da rede. Para uma topologia conhecida, mostra-se que métodos clássicos de erro de predição para identificação em malha fechada podem ser generalizados para fornecer estimativas dos módulos, sob circunstâncias experimentais determinadas. A análise e correção dos sinais que serão usados no preditor constituem a adaptação para o caso de redes e são discutidos nesse trabalho. Para isso, são considerados o método direto, que depende de modelos de ruído e o método em dois estágios, que é independente do modelo de ruído porém depende de sinais de excitação externo. Os resultados mostram que o método direto pode apresentar polarização e o método em dois estágios é capaz de reduzir a variância da estimativa dos parâmetros. Por conseguinte, os dois métodos apresentados mostraram-se capazes de estimar de modo consistente módulos locais em redes dinâmicas tendo o método em dois estágios apresentado melhores indicadores. Os modelos foram validados usando um segundo conjunto de dados de entrada e saída. Os resultados mostraram que o modelo conseguiu reproduzir o comportamento dinâmico do sistema com os dados de validação.

*Keywords:* system identification; dynamic network; graph theory; direct method; two-stage method; linear systems.

*Palavras-chaves:* identificação de sistemas; redes dinâmicas; teoria de grafos; método direto; método em dois estágios; sistemas lineares.

## 1. INTRODUÇÃO

Os sistemas reais estão cada vez mais complexos e interconectados, o que leva a um grande interesse no estudo das chamadas redes dinâmicas. Muitos sistemas complexos podem, em algum nível, ser analisados ou descritos por interconexões de sistemas mais simples.

À medida que se tornou comum interconectar vários subsistemas, as aplicações de redes dinâmicas tornaram-se abundantes em muitos campos. De fato, as redes dinâmicas estão em toda parte. Mesmo um circuito elementar de componentes individuais pode naturalmente ser pensado como uma rede dinâmica (Desoer and Kuh, 1969). Um sistema elétrico de potência, por exemplo, é caracterizado pela interconexão de fontes de energia, cargas e unidades de controle (Zheng et al., 2021); um sistema de direção autônoma requer comunicação veículo-veículo e veículo-infraestrutura para operar (Zheng et al., 2015); um sistema de controle distribuído é formado por sistemas que comunicam entre si (Ristevski et al., 2021); uma rede neural que pode ser entendida como um sistema complexo de regiões interconectadas (Telesford et al., 2011).

As redes dinâmicas consistem em um conjunto de variáveis/sinais internos ou nós em que cada nó é dinamicamente relacionada a outros sinais na rede. Assume-se que os sinais que definem os nós são possíveis de serem medidos utilizando dispositivos apropriados. São inúmeras as possibilidades da natureza destes sinais (Willems, 2008): temperatura ou fluxo de calor são de natureza térmica; tensão e corrente de natureza elétrica; força e posição para natureza mecânica; et cetera. É possível também haver na rede distúrbios presentes (não medidos), que afetam o valor dos sinais/nós. Um outro tipo de sinal dentro da rede que também afeta os nós são os sinais externos que atuam como sinais de excitação.

A relação dinâmica entre os nós pode ser representada como um conjunto de módulos, conectados através de suas interconexões (Dankers, 2014). Os módulos são sistemas dinâmicos com um número finito de terminais, que permite a conexão com outros módulos. Conforme mencionado anteriormente, esta interconexão pode representar uma ampla gama de objetos, por exemplo, transações financeiras, linhas de transmissão, entre outros (Willems, 2008).

A estrutura da rede descreve a dependência causal das variáveis do sistema e é convenientemente representada por um *grafo direcionado*. Um grafo direcionado é um conjunto de nós e arestas direcionadas onde cada aresta conecta um par ordenado de nós (Etesami and Kiyavash, 2014). Para cada rede dinâmica pode-se associar um grafo direcionado. Desta forma, as arestas do grafo representam os módulos da rede, enquanto os sinais internos são os vértices (Zhang et al., 2016).

Em relação à identificação de redes dinâmicas, obter um único modelo para descrever como as variáveis internas

se relacionam por meio de abordagens tradicionais torna-se inviável à medida que a complexidade da rede cresce. Embora a identificação de um subsistema isolado possa parecer relativamente simples, fazer isso para um módulo embutido em uma rede com interconexões apresenta problemas adicionais, mesmo que a identificação seja realizada localmente devido à presença de vários sinais que afetam a medição (Bazanella et al., 2017; Gevers et al., 2018). Nesse contexto, até mesmo determinar quais variáveis precisam ser medidas se mostra complexo, pois não é simples inferir a correlação entre sinais.

Neste contexto, a identificação de redes pode ser dividida em dois grupos: identificação completa da rede e identificação de um (ou mais) módulo(s) da rede. Nesses dois casos, assume-se que a topologia da rede é conhecida, isto é, sabe-se a priori como os módulos estão interconectados entre si. A identificação da topologia da rede pode ser incluída aqui como um terceiro grupo. Na identificação completa da rede, o objetivo é estimar a dinâmica por inteira da mesma. Inclui-se nesse problema aspectos de identificabilidade (Hendrickx et al., 2019; Mapurunga and Bazanella, 2021; Weerts et al., 2018; Zorzi and Chiuso, 2017). Em geral, hipóteses são feitas para desenvolver métodos eficientes, como que todos os módulos tenham a mesma dinâmica (Massioni and Verhaegen, 2009) ou que cada módulo esteja conectado apenas aos seus vizinhos diretos (Chen et al., 2019). Devido ao grande número de módulos, a ênfase da identificação completa da rede está normalmente na implementação numérica dos métodos.

A identificação de um módulo da rede, por outro lado, se concentra na obtenção de uma estimativa consistente do módulo de interesse para a configuração em estudo. A estimativa de um módulo específico em uma rede dinâmica pode ser realizada adaptando métodos de identificação em malha fechada (Ramaswamy et al., 2018; den Hof et al., 2013), pois os métodos clássicos puramente tendem a não estimar com precisão e de modo consistente funções de transferências que estão embutidas em uma rede dinâmica. A literatura mostra adaptações do PEM (do inglês, *Predictor Error Method*) para o caso de redes dinâmicas (Dankers et al., 2014; Weerts et al., 2018; Dankers et al., 2012). Por exemplo, modificações do método direto aplica um preditor de um passo a frente para identificar um módulo da rede, observando os sinais de entrada e saída (den Hof, 2006). Já o método em duas etapas, também originário da identificação em malha fechada, busca descorrelacionar sinais antes de aplicar o preditor e apresenta aplicação no caso da estimação em redes dinâmicas (den Hof and Schrama, 1993; Dankers et al., 2014).

Nesse trabalho, compara-se o emprego dos métodos direto e o método em dois estágios para o problema de identificar um módulo embutido em uma rede dinâmica que é perturbada por fontes de ruído de processo. Para tal objetivo, é preciso formular um problema de estimativa SISO (do inglês, *Single-Input-Single-Output*) que requer uma etapa

de seleção de ordem de modelo para cada módulo. Do ponto de vista da identificação, essa temática pode ser entendida como uma extensão natural do problema de identificação em malha fechada (Dankers, 2014).

O trabalho está organizado da seguinte forma: seguido a essa Seção 1 de introdução, apresenta-se na Seção 2 a formulação do problema de modelagem em redes dinâmicas e suas representações. Os métodos de identificação são apresentados a seguir, iniciando pelo método direto na Seção 4 e depois o método em dois estágios na Seção 5. Dois estudos de caso são discutidos e analisados na Seção 6, onde também se apresentam conclusões sobre o trabalho.

## 2. CONFIGURAÇÃO DO SISTEMA

Diferentes representações matemáticas de sistemas dinâmicos são tratadas na teoria de sistemas. Para mencionar alguns: modelo de espaço de estados, função de transferência e resposta ao impulso (Aguirre, 2015). Como propriedade dos mesmos, a capacidade de interconectar subsistemas e gerar um modelo estruturado complexo é a base dos sistemas em rede. É possível expressar qualquer rede dinâmica como uma extensão direta do modelo clássico de malha fechada multivariável (Dankers, 2014). No entanto, apesar de tais modelos serem representações compactas para subsistemas individuais, os mesmos não fornecem informações sobre como os subsistemas estão interconectados em uma rede, sendo de conhecimento comum que informações estruturais são valiosas na análise de redes.

Semelhante aos modelos para sistemas em malha fechada, o modelo para redes é caracterizado por variáveis internas, externas e de ruído. Essa seção traz à discussão o fato que o modelo de rede dinâmica é uma extensão direta do modelo clássico de malha fechada. Uma interpretação em grafos também é fornecida para ilustrar a estrutura de interconexão de uma rede dinâmica (topologia).

### 2.1 Representação em módulos

A representação em módulos descreve a dependência causal entre os nós de uma rede. Ela pode ser traduzida como um grafo onde cada aresta modela a dependência causal entre dois nós distintos. Como essa representação modela o comportamento em termos dos nós e dos módulos da rede, ela é conhecida como *representação em módulos* ou *representação de sinal* (Dankers, 2014).

A seguir, é apresentado um modelo geral de tempo discreto para redes dinâmicas (Kivits and den Hof, 2018; Dankers et al., 2016). As variáveis internas  $w_j(t)$  são os nós,  $v_j(t)$  é o ruído de processo e o módulo  $G_{ji}(q)$  é definido como uma função racional. Usamos o sobrescrito 0 para denotar a função de transferência do sistema gerador de dados como ( $G^0$ ).

$$w_j(t) = \sum_{i \in \mathcal{N}_j} G_{ji}^0(q) w_i(t) + r_j(t) + v_j(t), \quad (1)$$

com  $q^{-1}$  o operador de atraso, isto é,  $q^{-1}u_j(t) = u_j(t-1)$ . Similarmente,

$$\begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_{12}^0(q) & \cdots & G_{1L}^0(q) \\ G_{21}^0(q) & 0 & \cdots & G_{2L}^0(q) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ G_{L1}^0(q) & G_{L2}^0(q) & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_L(t) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Os módulos são parametrizados como funções de transferência lineares em tempo discreto da seguinte forma

$$G^0(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \cdots + b_{n_b}q^{-n_b}}{1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots + a_{n_a}q^{-n_a}}, \quad (3)$$

onde  $n_a$  e  $n_b$  são referenciados como a ordem do denominador e numerador da função de transferência, que são os atrasos de entrada e saída.

Além disso, assume-se que o modelo satisfaz os seguintes itens.

- $\mathcal{N}_j$  denota o conjunto de índices de sinais de nó  $w_i$ ,  $i \neq j$  para os quais  $G_{ji}^0$  são diferentes de zero, ou seja, o conjunto de variáveis medidas com conexões causais diretas.
- $G_{ji}^0$  são funções de transferência próprias. Alguns delas podem ser zero, indicando que não há link direto de  $w_i$  para  $w_j$ .
- A rede dinâmica não possui laços próprios, ou  $G_{jj}^0 = 0$ .
- A rede é bem colocada. Todas as funções de transferência são próprias e  $\det(I - G^0) \neq 0$ .
- A topologia da rede é conhecida, ou seja, sabe-se qual das  $G_{ji}^0$  são zero.

Considere o exemplo a seguir. A Figura 1 representa uma rede dinâmica com 4 nós e 4 módulos, sendo o módulo entre os nós 3 e 2 unitário. A rede é perturbada por um sinal de excitação  $r_1(t)$  e também contém sinais de ruído nos nós 1, 2 e 5,  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  e  $v_5(t)$  respectivamente.

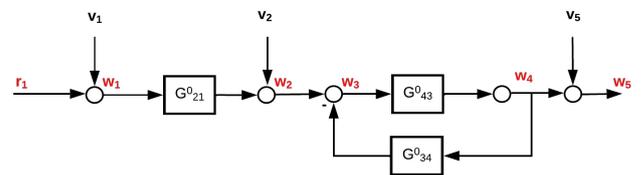


Figura 1. Rede dinâmica com 4 sinais nodais.

Para esse sistema, a representação modular é definida tal como (4), os argumentos  $q$  e  $t$  foram descartados para maior clareza de notação.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{21}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & G_{34}^0 \\ 0 & G_{43}^0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \\ v_4 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

## 2.2 Representação por Grafos

Muitas situações do mundo real podem ser convenientemente descritas por meio de um diagrama que consiste em um conjunto de pontos junto com linhas que unem certos pares desses pontos (Bondy and Murty, 1982). Essa representação recebe o nome de grafo. Grafos permitem modelar problemas como redes de computadores, química orgânica, árvore genealógica e tantos outros (Wilson, 1996).

Um grafo  $\mathcal{G}$  é um par ordenado  $(V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$  consistindo de um conjunto não vazio  $V(\mathcal{G})$  de vértices e um conjunto  $E(\mathcal{G})$  de arestas que associa pares de vértices, assim os elementos de  $E$  são subconjuntos de 2 elementos de  $V$  (Diestel, 2017).

Um grafo direcionado ou digrafo, contém arestas com uma única direção, indicada por setas (Diestel, 2017). Isso significa que a informação sai de um ponto e é direcionada a outro, dentro da rede. A Figura 2 ilustra um digrafo para a rede exemplo em (4).

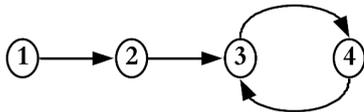


Figura 2. Representação em grafos da rede dinâmica exemplo.

## 3. PEM E A EXTENSÃO PARA REDES DINÂMICAS

Em muitas aplicações, o modelo deve ser capaz de prever o comportamento do sistema (Ljung, 1981; Gevers et al., 2003; Weerts et al., 2018). Sendo assim, um critério para avaliar a qualidade do modelo é sua capacidade de previsão (van den Bosch and van der Klauw, 1994). Uma maneira de medir a qualidade da previsão do modelo é usando os métodos de previsão de erro, que calculam o erro entre as saídas medidas e previstas.

A seguir, o conceito de PEM aplicado a redes dinâmicas é formalizado e algumas notações são apresentadas. Neste trabalho, consideramos o preditor de um passo à frente. Seja  $w_j(t)$  uma variável interna a ser prevista e  $w_i(t)$  uma outra variável interna que será usada para prever  $w_j(t)$ . Lembrando que as variáveis se relacionam tal como (1). Visto da perspectiva do procedimento de estimação,  $G^0(q)$  é uma função de transferência desconhecida e pode-se definir o vetor de parâmetros a ser estimado

$$\theta = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n_b} \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a}]. \quad (5)$$

Em (1),  $w_j(t)$  é a saída do processo, medida no instante  $t$ . Considere que as amostras anteriores sejam conhecidas  $\{w_j(t-1), w_j(t-2), \dots\}$ , e os valores atuais e passados de  $w_i(t)$  também são conhecidos  $\{w_i(t), w_i(t-1), \dots\}$ . Então, o preditor um passo à frente, denotado por  $\hat{w}_j(t|t-1)$  é (den Hof et al., 2013):

$$\hat{w}_j(t|t-1) = \sum_{i \in \mathcal{N}_j} H_j(q)^{-1} G_{ji}(q) w_i(t) + (1 - H_j(q)^{-1}) w_j(t), \quad (6)$$

e o erro de previsão é definido como:

$$\begin{aligned} \epsilon_j(t, \theta) &= w_j(t) - \hat{w}_j(t|t-1) \\ &= H_j^{-1}(q, \theta) (w_j(t) - \sum_{i \in \mathcal{N}_j} G_{ji}(q, \theta) w_i(t)). \end{aligned} \quad (7)$$

Note que  $H_j(q)$  é o modelo de ruído e, por razão de simplificar o procedimento, considera-se unitário.

Os parâmetros do sistema dinâmicos podem ser obtidos minimizando a seguinte função de custo

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon_j(t, \theta)^2, \quad (8)$$

onde  $N$  é o número de amostras. Portanto, os parâmetros estimados do modelo são dados por

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} V_N(\theta). \quad (9)$$

## 4. MÉTODO DIRETO PARA REDES DINÂMICAS

O método direto, originário da identificação em malha fechada, é um procedimento simples que aplica o preditor em (6) para estimar a função de transferência  $G_{ji}(q)$  minimizando (8) dada uma entrada sinal  $w_i$  e um sinal de saída  $w_j$  (Van Den Hof and Schrama, 1995).

O método pode ser generalizado para a situação de redes dinâmicas, onde a principal questão reside na escolha do sinal de entrada que deve ser considerado no preditor. Considere a estimativa de  $G_{ji}(q)$ . Uma decisão direta é escolher  $w_i$  como entrada para o preditor. No entanto, em alguns casos, isso levará a estimativas polarizadas devido ao fato de que outras variáveis com conexões diretas com  $w_j$  também afetarão a saída (Forssell and Ljung, 1999; Van den Hof et al., 2012).

A literatura mostra que a função de transferência pode ser estimada de modo consistente pelo método direto nas seguintes condições (Dankers et al., 2012):

- (i). o ruído  $v_j$  não está correlacionado com o sinal de entrada  $w_i$ <sup>1</sup>;
- (ii). existe um vetor de parâmetros  $\theta$  tal que  $G_{ji}(q, \theta) = G_{ji}^0(q)$ ;
- (iii). para o sistema gerador de dados, cada laço através de  $w_j$  tem um atraso;
- (iv). a densidade espectral de  $w_j$ , denotada como  $\Phi_j$ , é definida positiva para  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Para o caso original da estrutura em malha fechada, a presença da realimentação é ignorada - os dados são tratados como se não houvesse realimentação (Söderström and Stoica, 1989). Para redes dinâmicas, isso é especificado na preposição (iii.) limitando essa condição para se aplicar apenas ao sinal de saída que é considerado para identificação.

<sup>1</sup> O ponto principal da preposição (i). é que se o ruído  $v_j$  não é correlacionado com o sinal de entrada  $w_i$  então estimativas consistentes de  $G_{jk}(q)$  são possíveis.

## 5. MÉTODO EM DOIS ESTÁGIOS PARA REDES DINÂMICAS

Aqui é apresentado um método indireto capaz de estimar um módulo embutido em uma rede dinâmica. O método de identificação em dois estágios foi inicialmente proposto em den Hof and Schrama (1993) como ferramenta de identificação de sistemas em malha fechada e posteriormente revisitado em Dankers et al. (2013); Gunes et al. (2014) para o caso de redes dinâmicas. Diferentemente do método direto, essa abordagem utiliza sinais externos de excitação e tem potencial de estimar de modo consistente funções de transferência que operam em redes.

A ideia principal é descorrelacionar o sinal de entrada e o ruído do processo usando uma projeção ortogonal em um primeiro estágio e então, em um segundo estágio, obter uma estimativa do módulo usando o sinal de entrada descorrelacionado. Como consequência, a estimativa pode ser feita sem a necessidade de modelar a dinâmica do ruído.

Considere a estimativa do módulo  $G_{ji}(q)$  com base nas variáveis:  $w_i(t)$  (sinal de entrada),  $w_j(t)$  (sinal de saída) e  $r_i(t)$  (sinal externo). Observe que  $r_i(t)$  e  $w_i(t)$  são sinais quase estacionários (Ljung, 1999), e a função de correlação cruzada

$$R_{w_i r_i}(\tau) = \overline{\mathbb{E}}[w_i(t)r_i(t - \tau)] \quad (10)$$

é zero para  $\tau < 0$  e não nula para  $\tau \geq 0$ , sendo  $\overline{\mathbb{E}}$  a expectativa.

### Estágio 1:

Existe uma função de transferência própria  $F_{w_i r_i}^0(q)$  tal que

$$w_i(t) = F_{w_i r_i}^0(q)r_i(t) + z(t), \quad (11)$$

com  $z(t)$  descorrelacionado a  $r_i(t)$ . Isso resulta na seguinte decomposição

$$w_i(t) = w_i^{(r_i)}(t) + w_i^{\perp(r_i)}(t). \quad (12)$$

Note que  $w_i^{(r_i)}(t)$  é a projeção de  $w_i(t)$  no espaço de  $r_i(t)$ , e  $w_i^{\perp(r_i)}(t) = z(t)$ .

$F_{w_i r_i}^0(q)$  pode ser estimado de modo consistente com base nos sinais medidos  $r_i$  e  $w_i$ , desde que  $r_i$  seja suficientemente informativo (Colin et al., 2021). A projeção

$$\hat{w}_i^{(r_i)}(t) = \hat{F}_{w_i r_i}(q)r_i(t) \quad (13)$$

pode ser calculada, com  $\hat{F}_{w_i r_i}(q)$  a função de transferência estimada, e é uma estimativa válida de  $w_i^{(r_i)}(t)$ .

### Estágio 2:

Segue que  $\hat{w}_i^{(r_i)}(t)$  será usado como uma entrada no modelo preditor. No entanto, a saída do preditor deve ser corrigida

$$\tilde{w}_j(t) = w_j(t) - \sum_{i \in \mathcal{N}_j} G_{ji}^0(q)w_i(t) - r_j(t). \quad (14)$$

O modelo preditor é definido

$$\hat{w}_j(t|t-1) = \sum_{i \in \mathcal{N}_j} H_j(q)^{-1}G_{ji}(q)\hat{w}_i^{(r_i)}(t) + (1 - H_j(q)^{-1})w_j(t). \quad (15)$$

Como resultado, as estimativas de  $G_{ji}(q)$  são obtidas minimizando a soma dos erros de predição (7).

Resume-se o método no seguinte algoritmo:

### Algoritmo SISO de dois estágios

- (1) Selecionar um conjunto de variáveis externas ( $r_m$ ), pertencentes ao conjunto de índices de sinais nodais para os quais existe um caminho para  $w_i$ .
- (2) Determinar  $w_i^{(r_i)}(t)$ . Uma estimativa de  $\hat{w}_i^{(r_i)}(t)$  pode ser obtida estimando  $F_{w_i r_i}(q)$  como mostrado em (13).
- (3) Construir o sinal de saída corrigido  $\tilde{w}_j(t)$  como em (14).
- (4) Estimar a função de transferência  $G_{ji}(q)$  com base em um preditor (15) com o erro de predição (7).

A literatura sugere a extensão do preditor para o formato MISO (do inglês, *Multi-Input-Single-Output*) como forma de atacar a alta variância da estimação SISO (den Hof et al., 2013; Dankers, 2014). O procedimento MISO aumenta a complexidade do procedimento de identificação, em termos de número de modelos e parâmetros a serem estimados.

## 6. ESTUDOS DE CASO

Nesta seção, dois estudos de caso são apresentados. Inicialmente, um sistema simples em malha fechada é analisado e em seguida, uma rede mais complexa é utilizada. O objetivo é mostrar que é possível estimar de modo consistente os módulos das redes com base nos métodos apresentados ao longo desse trabalho. Ao final desta seção, apresentam-se resultados de validação dos modelos estimados.

A geração de dados e simulação do método foram feitas usando o *software* MATLAB R2022. A análise de tempo de processamento e requisitos técnicos da máquina não são consideradas.

Para comparar a variância das estimativas com o método direto e o método em duas etapas, utilizamos o Coeficiente de Variabilidade (*CV*). Considere o parâmetro estimado  $x$ , cuja média é  $\tilde{x}$  e variância é  $\delta_x$ , então o *CV* é definido como

$$CV(x) = \frac{\delta_x}{\tilde{x}} 100. \quad (16)$$

Portanto, o *CV* é uma ferramenta que permite relativizar a variabilidade do parâmetro em relação à média do mesmo, uma vez que um mesmo valor de variância para médias distintas não apresenta impacto similar na análise do modelo.

### 6.1 Um sistema de realimentação

Para iniciar a validação das técnicas discutidas, um sistema sintético simples é projetado para extrair dados. Como a teoria apresentada nesse artigo parte da identificação em malha fechada, escolhemos um caso simples de realimentação (que também é uma rede) para aplicar a metodologia.

O sistema é ilustrado na Figura 3. O sinal externo  $r_1$  é um ruído branco distribuído normalmente com média 0 e variância 1. Observe que um sinal de ruído foi adicionado ao nó 2, que é também um sinal aleatório Gaussiano de média 0, mas com variância 0,1.

As funções de transferência dos módulos  $G_{21}$  e  $G_{12}$  são definidas como

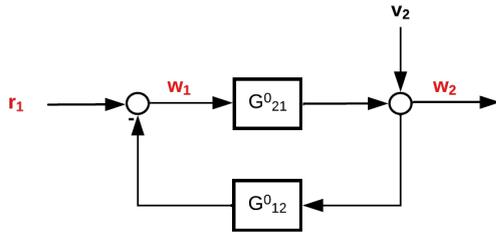


Figura 3. Uma realimentação simples.

$$\begin{aligned} G^0_{21}(q) &= \frac{b_1}{q + a_1} = \frac{1}{q - 0,7}, \\ G^0_{12}(q) &= \frac{b_2}{q + a_2} = \frac{0,3}{q - 0,5}. \end{aligned} \quad (17)$$

Para verificar se os dois módulos do sistema de realimentação podem ser estimados de forma consistente usando o método direto, obtém-se 500 amostras para cada experimento. Além disso, aplica-se 1.000 experimentos de identificação e calcula-se a média e a variância dos parâmetros, conforme mostrado na Tabela 1.

Tabela 1. Resultados da estimação dos módulos da realimentação simples usando o método direto.

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
$a_1$	-0,7	-0,7001	$4,0 \times 10^{-4}$
$a_2$	-0,5	-0,5002	$3,6 \times 10^{-3}$
$b_1$	1,0	1,0006	$1,0 \times 10^{-4}$
$b_2$	0,3	0,3010	$7,0 \times 10^{-4}$

Tabela 2. Resultados da estimação dos módulos da realimentação simples usando o método em dois estágios.

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
$a_1$	-0,7	-0,6999	$4,0 \times 10^{-5}$
$a_2$	-0,5	-0,5000	$7,0 \times 10^{-5}$
$b_1$	1,0	1,0002	$9,0 \times 10^{-5}$
$b_2$	0,3	0,2999	$9,0 \times 10^{-5}$

Para fins de comparação, usamos o método de dois estágios para estimar os modelos SISO para os módulos do sistema de realimentação. O mesmo conjunto de dados foi usado. A Tabela 2 mostra a média e a variância da estimativa. Note que houve uma redução considerável na variância das estimativas, conforme é validado pela comparação do CV entre os dois métodos (ver Figura 4). Vale notar que os parâmetros  $a_2$  e  $b_2$  apresentaram uma discrepância maior entre os métodos com base no CV.

### 6.2 Uma rede dinâmica complexa

Considere a rede dinâmica representada na Figura 5. O sinal de excitação  $r_1$  é um ruído branco de média 1 e variância 0,1 e os sinais  $v_2, v_4$  e  $v_5$  são ruídos branco com média 0 e variância 0,1. Os sinais medidos estão ilustrados em vermelho na imagem, são eles: os sinais nodais  $w_1, w_2, w_3, w_4$  e  $w_5$  e o sinal de excitação  $r_1$

As funções de transferência dos módulos da rede são definidas como

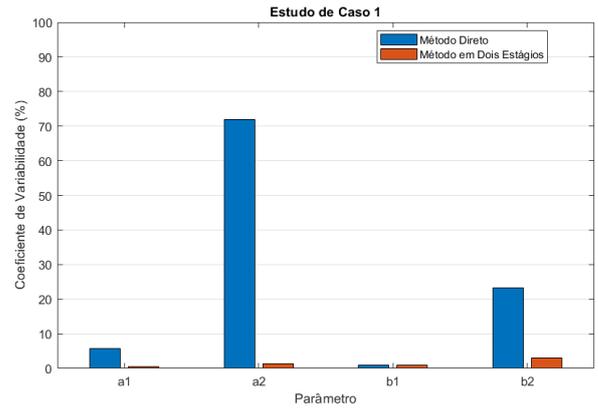


Figura 4. Coeficiente de variabilidade- sistema de realimentação.

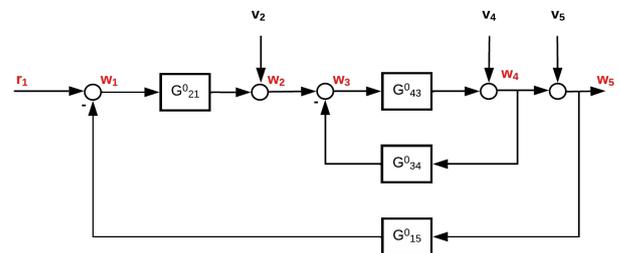


Figura 5. Rede dinâmica com 5 nós e 4 módulos.

$$\begin{aligned} G^0_{21}(q) &= \frac{b_1}{q + a_1} = \frac{1}{q - 0,7}, \\ G^0_{43}(q) &= \frac{b_2}{q + a_2} = \frac{0,5}{q - 0,4}, \\ G^0_{34}(q) &= \frac{b_3}{q + a_3} = \frac{0,2}{q - 0,9}, \\ G^0_{15}(q) &= \frac{b_4}{q + a_4} = \frac{0,3}{q - 0,5}. \end{aligned} \quad (18)$$

Aplicando a mesma metodologia do estudo de caso anterior para gerar os dados e estimar os parâmetros, 500 amostras são utilizadas por experimento, e 1.000 experimentos de identificação foram gerados. A Tabela 3 mostra os resultados da média e variância da estimativa dos parâmetros para o método direto e a Tabela 4 mostra os resultados para o método em dois estágios.

Tabela 3. Resultados da estimação dos módulos da rede dinâmica usando o método direto.

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
$a_1$	-0,7	-0,7046	$1,2 \times 10^{-4}$
$a_2$	-0,4	-0,3980	$2,1 \times 10^{-4}$
$a_3$	-0,9	-0,9014	$6,3 \times 10^{-4}$
$a_4$	-0,5	-0,4929	$4,5 \times 10^{-4}$
$b_1$	1,0	0,9997	$3,1 \times 10^{-5}$
$b_2$	0,5	0,4993	$1,1 \times 10^{-4}$
$b_3$	0,2	0,3022	$3,0 \times 10^{-4}$
$b_4$	0,3	0,2985	$3,6 \times 10^{-3}$

A comparação em relação ao CV das estimativas é apresentada na Figura 6, onde nota-se uma redução da variância quando empregado o método em dois estágios.

Tabela 4. Resultados da estimação dos módulos da rede dinâmica usando o método em dois estágios.

Parâmetro	Valor real	Média	Variância
$a_1$	-0,7	-0,7001	$7,5 \times 10^{-5}$
$a_2$	-0,4	-0,3999	$3,8 \times 10^{-5}$
$a_3$	-0,9	-0,9007	$1,6 \times 10^{-4}$
$a_4$	-0,5	-0,4993	$5,3 \times 10^{-5}$
$b_1$	1,0	1,0005	$1,9 \times 10^{-5}$
$b_2$	0,5	0,5002	$8,3 \times 10^{-5}$
$b_3$	0,2	0,2101	$3,1 \times 10^{-4}$
$b_4$	0,3	0,3003	$3,0 \times 10^{-4}$

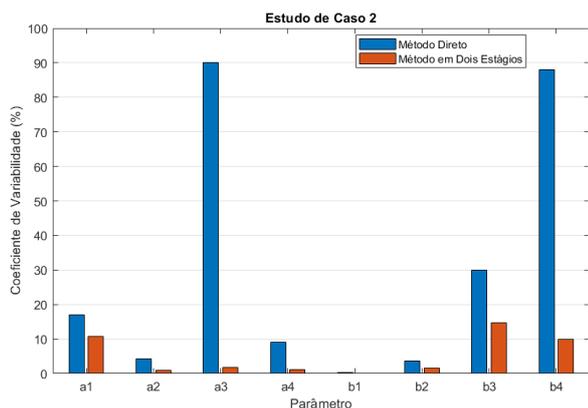


Figura 6. Coeficiente de variabilidade- rede complexa.

Nesse estudo de caso, vale notar que o método direto apresentou uma estimativa polarizada de  $G_{34}^0$ . Isso foi reduzido com o método em dois estágios, porém ainda percebe-se um viés no parâmetro  $b_3$ . A literatura indica que uma possível solução para mitigar tais efeitos é adicionar mais sinais de excitação, por exemplo, adicionar  $r_2$  na rede da Figura 5 pode melhorar as estimativas para o método em dois estágios (den Hof et al., 2013; Dankers, 2014).

### 6.3 Validação dos modelos

Em seguida a estimação dos parâmetros do modelo, a validação foi realizada para todos os módulos das redes da Figura 3 e da Figura 5. Para isso, foi obtido um novo conjunto de dados com 350 amostras com base nas mesmas características de média e variância dos sinais de ruído e dos sinais externos. Observou-se a resposta dos modelos quando submetidos ao sinal de validação e utilizou-se a métrica NRMSE ou RMSE normalizado, dada por:

$$NRMSE = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_1^N (\hat{y} - y)^2}}{y_{max} - y_{min}}, \quad (19)$$

tal que  $\hat{y}$  é o valor estimado e  $y$  é o valor real,  $y_{max}$  e  $y_{min}$  são, respectivamente, os valores máximos e mínimos das amostras de  $y$ , e  $N$  denota o número de amostras.

Os 2 módulos do Estudo de Caso 1,  $G_{12}$  e  $G_{21}$ , apresentaram NRMSE igual a 81% e 92%, respectivamente. Os 4 módulos do Estudo de Caso 2 apresentaram NRMSE maior que 80%, sendo a única exceção a se apontar o caso do modelo  $G_{34}$  que apresentou desempenho de 70% na validação. Esse comportamento é esperado uma vez que a

estimativa dos parâmetros deste módulo não apresentaram grande acurácia.

## 7. CONCLUSÃO

Esse artigo apresentou a implementação e comparação de dois métodos de identificação de sistemas dinâmicos que operam em uma estrutura de interconexão complexa: o método direto e o método em dois estágios. As duas ferramentas mostraram-se úteis para estimação de módulos embutidos em redes dinâmicas, com base em dois estudos de casos. Notou-se que o método direto pode apresentar polarização, principalmente em casos de sistemas mais complexos. Normalmente, a polarização ocorre devido ao método não considerar o resto da rede. Isto é, distúrbios não modelados podem criar problemas para o procedimento de identificação. A identificação consistente de funções de transferências mostrou-se possível, a depender da topologia da rede. O método em dois estágios, por sua vez, levou a uma redução na variabilidade das estimativas como demonstrado tanto pela variância quanto pelo coeficiente de variabilidade. Portanto, os métodos de predição de erro apresentados são capazes de estimar consistentemente módulos embutidos em redes dinâmicas. Observando o desempenho dos dois métodos de estimação, foi possível notar que o método em dois estágios é capaz de retornar modelos com parâmetros que melhor se aproximam dos valores reais e esse comportamento se repetiu na etapa de validação. Ainda, os autores apontam que ao limitar a atenção aos preditores SISO, o efeito de todas as outras entradas que afetam  $w_j$  será modelado como ruído e, portanto, aumentará a variância da estimativa do parâmetro.

## AGRADECIMENTOS

Esse trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)–Brasil.

## REFERÊNCIAS

- Aguirre, L. (2015). *Introdução à Identificação de Sistemas*. Alameer, Z., Fathalla, A., Li, K., Ye, H., and Jianhua, Z. (2020). Multistep-ahead forecasting of coal prices using a hybrid deep learning model. *Resources Policy*, 65, 101588.
- Bazanella, A., Gevers, M., Hendrickx, J., and Parraga, A. (2017). Identifiability of dynamical networks: Which nodes need be measured? 5870–5875.
- Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1982). *Graph Theory with Applications*. Elsevier Science Publishing.
- Chen, B., Hu, G., Ho, D.W., and Yu, L. (2019). Distributed kalman filtering for time-varying discrete sequential systems. *Automatica*, 99, 228–236.
- Colin, K., Bako, L., and Bombois, X. (2021). Data informativity for the closed-loop identification of miso arx systems. *IFAC-PapersOnLine*, 54(7), 779–784. 19th IFAC Symposium on System Identification SYSID 2021.
- Dankers, A.G. (2014). *System Identification in Dynamic Networks*. Ph.D. thesis, Dutch Institute of Systems and Control (disc).
- Dankers, A., Van den Hof, P.M.J., Bombois, X., and Heuberger, P.S.C. (2016). Identification of dynamic models

- in complex networks with prediction error methods: Predictor input selection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(4), 937–952.
- Dankers, A., Van den Hof, P.M., Bombois, X., and Heuberger, P.S. (2013). Predictor input selection for two stage identification in dynamic networks. In *2013 European Control Conference (ECC)*, 1422–1427.
- Dankers, A., Van den Hof, P.M., Heuberger, P.S., and Bombois, X. (2012). Dynamic network identification using the direct prediction-error method. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 901–906.
- Dankers, A.G., Van den Hof, P.M.J., and Bombois, X. (2014). Direct and indirect continuous-time identification in dynamic networks. In *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, 3334–3339.
- den Hof, P.M.V., Dankers, A., Heuberger, P.S., and Bombois, X. (2013). Identification of dynamic models in complex networks with prediction error methods—basic methods for consistent module estimates. *Automatica*, 49(10), 2994–3006.
- den Hof, P.M.V. and Schrama, R.J. (1993). An indirect method for transfer function estimation from closed loop data. *Automatica*, 29(6), 1523–1527.
- den Hof, P.V. (2006). *System Identification*. Delft University of Technology.
- Desoer, C.A. and Kuh, E.S. (1969). *Basic Circuit Theory*. McGraw-Hill Book Company.
- Diestel, R. (2017). *Graph Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Etesami, J. and Kiyavash, N. (2014). Directed information graphs: A generalization of linear dynamical graphs. *2014 American Control Conference*, 2563–2568.
- Forssell, U. and Ljung, L. (1999). Closed-loop identification revisited. *Automatica*, 35(7), 1215–1241.
- Gevers, M., Bazanella, A.S., and da Silva, G.V. (2018). A practical method for the consistent identification of a module in a dynamical network. *IFAC-PapersOnLine*, 51(15), 862–867. 18th IFAC Symposium on System Identification SYSID 2018.
- Gevers, M., Bombois, X., Codrons, B., Scorletti, G., and Anderson, B.D. (2003). Model validation for control and controller validation in a prediction error identification framework—part i: theory. *Automatica*, 39(3), 403–415.
- Gunes, B., Dankers, A., and den Hof, P.M.V. (2014). A variance reduction technique for identification in dynamic networks. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3), 2842–2847. 19th IFAC World Congress.
- Hendrickx, J.M., Gevers, M., and Bazanella, A.S. (2019). Identifiability of dynamical networks with partial node measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(6), 2240–2253.
- Kivits, E. and den Hof, P.M.V. (2018). On representations of linear dynamic networks. *IFAC-PapersOnLine*, 51(15), 838–843. 18th IFAC Symposium on System Identification SYSID 2018.
- Ljung, L. (1981). Analysis of a general recursive prediction error identification algorithm. *Automatica*, 17(1), 89–99.
- Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall PTR.
- Mapurunga, E. and Bazanella, A.S. (2021). Identifiability of dynamic networks from structure. *IFAC-PapersOnLine*, 54(7), 55–60. 19th IFAC Symposium on System Identification SYSID 2021.
- Massioni, P. and Verhaegen, M. (2009). Subspace identification of distributed, decomposable systems. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, 3364–3369.
- Ramaswamy, K.R., Bottegal, G., and Van den Hof, P.M. (2018). Local module identification in dynamic networks using regularized kernel-based methods. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 4713–4718.
- Ristevski, S., Yucelen, T., and Muse, J.A. (2021). An event-triggered distributed control architecture for scheduling information exchange in networked multiagent systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1–12.
- Söderström, T. and Stoica, P. (1989). *System Identification*. Prentice Hall.
- Telesford, Q.K., Simpson, S.L., Burdette, J.H., Hayasaka, S., and Laurienti, P.J. (2011). The brain as a complex system: Using network science as a tool for understanding the brain. *Brain Connectivity*, 1.
- van den Bosch, P.P.J. and van der Klauw, A.C. (1994). *Modeling, Identification and Simulation of Dynamical Systems*. CRC PR INC.
- Van den Hof, P.M., Dankers, A.G., Heuberger, P.S., and Bombois, X. (2012). Identification in dynamic networks with known interconnection topology. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 895–900.
- Van Den Hof, P.M. and Schrama, R.J. (1995). Identification and control — closed-loop issues. *Automatica*, 31(12), 1751–1770. Trends in System Identification.
- Weerts, H.H., den Hof, P.M.V., and Dankers, A.G. (2018). Prediction error identification of linear dynamic networks with rank-reduced noise. *Automatica*, 98, 256–268.
- Willems, J.C. (2008). Modeling interconnected systems. *International Symposium on Communications Control and Signal Processing*, 421–424.
- Wilson, R.J. (1996). *Introduction to Graph Theory*. Longman Group, 4th edition.
- Zhang, X., Moore, C., and Newman, M. (2016). Random graph models for dynamic networks. *The European Physical Journal B*, 90.
- Zheng, J., Okamura, H., Pang, T., and Dohi, T. (2021). Availability importance measures of components in smart electric power grid systems. *Reliability Engineering System Safety*, 205, 107164.
- Zheng, K., Zheng, Q., Yang, H., Zhao, L., Hou, L., and Chatzimisios, P. (2015). Reliable and efficient autonomous driving: the need for heterogeneous vehicular networks. *IEEE Communications Magazine*, 53(12), 72–79.
- Zorzi, M. and Chiuso, A. (2017). Sparse plus low rank network identification: A nonparametric approach. *Automatica*, 76, 355–366.