

Controle robusto de sistemas afins com comutação e pontos de equilíbrio incertos

João L. N. Brito^{1,2}, Grace S. Deaecto², José C. Geromel³

¹ *Laboratório Nacional de Luz Síncrotron - LNLS, 13083-970, Brasil, joao.brito@lnls.br.*

² *Faculdade de Engenharia Mecânica - FEM/UNICAMP, 13083-860, Brasil, grace@fem.unicamp.br.*

³ *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - FEEC/UNICAMP, 13083-852, Brasil, geromel@dsce.fee.unicamp.br.*

Abstract: This paper deals with robust control of switched affine systems with uncertain affine term, ensuring asymptotic stability of a set of pre-specified equilibrium points. In this class of switched systems, the affine term depends linearly on an uncertain vector which can be used, for instance, to model input and load variations of dc-dc power converters. The goal is to design a switching function that governs the trajectories of the closed-loop system towards an uncertain, partially unknown equilibrium point, in a framework characterized by lack of information. The control design problem is decomposed into two successive sub-problems expressed by linear matrix inequalities. An academic example with two unstable third order subsystems illustrates the theoretical results. Furthermore, the control design of a dc-dc flyback converter is used for comparison with the results available in the literature.

Resumo: Este artigo trata do controle robusto de sistemas afins com comutação com termo afim sujeito a incertezas, assegurando estabilidade assintótica de um conjunto de pontos de equilíbrio pré-especificados. Nesta classe de sistemas, o termo afim depende linearmente de um vetor incerto que pode ser usado, por exemplo, para modelar variações na entrada e na carga em conversores de potência cc-cc. O objetivo é projetar uma função de comutação que governe as trajetórias do sistema em malha fechada para um ponto de equilíbrio incerto, parcialmente desconhecido, em um contexto caracterizado pela falta de informação. O problema de projeto de controle é decomposto em dois subproblemas descritos por desigualdades matriciais lineares. Um exemplo acadêmico com dois subsistemas instáveis de terceira ordem ilustra os resultados teóricos. Além disso, o controle de um conversor flyback cc-cc é usado para comparar os resultados apresentados com outros existentes na literatura.

Keywords: Switched affine systems, global asymptotic stability, robustness, LMI.

Palavras-chaves: Sistemas afins com comutação, estabilidade assintótica global, robustez, LMI.

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, o interesse de pesquisa em sistemas afins com comutação tem aumentado. Esses sistemas podem ser encontrados em diversas aplicações práticas, principalmente na área de eletrônica de potência, e apresentam muitos desafios teóricos a serem explorados pela comunidade científica.

Diferente dos sistemas lineares com comutação, que têm sido amplamente estudados na literatura, como por exemplo em Deaecto et al. (2011), Geromel and Colaneri (2006), Lin and Antsaklis (2009) e Shorten et al. (2007), estes sistemas apresentam termos afins nas equações dinâmicas, permitindo que os subsistemas possam ter pontos de equilíbrio distintos, diferentes da origem e não coincidentes com aqueles que podem ser atingidos a partir da comutação entre os subsistemas. Desta forma, o problema de controle

ganha uma complexidade adicional, pois além de levar em conta o projeto de uma função de comutação estabilizante para governar as trajetórias do estado em direção a um ponto de equilíbrio, deve também considerar a determinação de um conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis, como visto em Bolzern and Spinelli (2004), Deaecto et al. (2010).

Além disso, quando a frequência de comutação é limitada superiormente, a estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio desejado não é mais possível de ser assegurada. Neste caso, as condições são projetadas para garantir a estabilidade assintótica de um ciclo limite adequado (veja Benmiloud et al. (2018), Egidio et al. (2020)) ou estabilidade prática (veja Egidio and Deaecto (2019), Sanchez et al. (2019), Hetel and Fridman (2013)). Nesta última, as trajetórias do estado são guiadas para um conjunto invariante, tão pequeno quanto possível, contendo o ponto de equilíbrio desejado.

¹ Este trabalho contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico CNPq/Brasil, através dos projetos 303499/2018-4 e 302013/2019-9.

Outra dificuldade surge quando o sistema é incerto, pois neste caso é impossível determinar *a priori* o conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis. Embora esta situação seja muito comum em aplicações práticas, como por exemplo, na regulação da tensão de saída de conversores de potência cc-cc sujeitos a variações na entrada e na carga, existem poucos resultados tratando de robustez para esta classe de sistemas. A maioria deles é baseada em estudo de casos específicos, como nas referências Martinez-Salamero et al. (2013), Noori et al. (2016) que propõem técnicas de controle por modos deslizantes para lidar com conversores de potência cc-cc buck e boost, Theunisse et al. (2015) que trata da modelagem e controle híbrido de um conversor boost cc-cc e Baldi et al. (2018) que propõe uma estratégia de comutação adaptativa para o projeto de controladores baseados em sinais de modulação por largura de pulso em conversores de potência.

Tratando da mesma classe de sistemas que a deste artigo, em que os termos afins dependem linearmente de um vetor incerto, Beneux et al. (2019) propõe uma estratégia de controle baseada em observadores de estado, a qual utiliza a estimativa do vetor incerto para atualizar a função de comutação em tempo real. No entanto, esta estratégia exige que todos os subsistemas sejam estáveis (autovalores com parte real não positiva), o que é uma hipótese muito restritiva. No presente trabalho, uma solução alternativa, mais geral do que aquela de Beneux et al. (2019) é proposta, utilizando um procedimento de projeto de controle em duas etapas descrito em termos de LMIs e que não requer nenhuma hipótese sobre a estabilidade dos subsistemas envolvidos. A função de comutação depende do ponto de equilíbrio, que é aproximado por uma função linear por partes, reajustado de acordo com a estimativa corrente do vetor incerto. O mesmo conversor de potência cc-cc flyback visto em Beneux et al. (2019) é utilizado para comparação e ilustração, juntamente com um exemplo acadêmico composto por dois subsistemas instáveis de terceira ordem.

A notação utilizada é usual. Para matrizes quadradas, $\text{tr}(\cdot)$ indica a função traço. Para vetores ou matrizes reais, (\cdot) refere-se à sua transposta. Para matrizes simétricas, (\bullet) denota o bloco simétrico. Os símbolos \mathbb{R} , \mathbb{R}_+ e \mathbb{N} denotam os conjuntos dos números reais, reais não negativos e naturais, respectivamente. Dois subconjuntos finitos de \mathbb{N} são $\mathbb{K} = \{1, \dots\}$ e $\mathbb{J} = \{1, \dots\}$. Para qualquer matriz simétrica $X > 0$ ($X \geq 0$) denota uma matriz positiva (semi-)definida. Para matrizes quadradas, o operador hermitiano é indicado por $\text{He}(X) = X' + X$ enquanto que a matriz identidade é indicada por I . A combinação convexa de matrizes é denotada como $X_\lambda = \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i X_i$ sendo $\lambda \in \Lambda$ um elemento do simplex unitário.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere a representação no espaço de estados de um sistema afim com comutação dada por

$$\dot{x} = A_\sigma x + g_\sigma(p), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

$$y = Cx \quad (2)$$

em que $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é a variável de estado, $y(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida, e $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{K}$ é a lei de comutação a ser projetada. É claro que $C = I$ indica que toda a variável de estado é medida e, portanto, está

disponível para realimentação. Para todo $\sigma \in \mathbb{K}$, o termo afim $g_\sigma(\cdot) : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é linear e da forma

$$g_\sigma(p) = b_\sigma + G_\sigma p \quad (3)$$

em que $p \in \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^{n_p}$ é um vetor incerto. É importante notar que $p \in \mathfrak{D}$ não é conhecido, mas o conjunto fechado e limitado \mathfrak{D} é.

A seguir, apresentamos um método para determinar uma função de comutação $\sigma(t) = u(x(t))$ dependente do estado $x(t)$, com $u(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$, tal que o sistema afim com comutação em malha fechada, seja globalmente assintoticamente estável e

$$x_e = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \in \mathfrak{X} \quad (4)$$

em que $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ é conhecido. Os resultados apresentados na sequência generalizam os de Beneux et al. (2019) em diversos aspectos, mas principalmente, não exigem que todas as matrizes $\{A_i\}_{i \in \mathbb{K}}$ sejam estáveis. Com isso, elimina-se uma restrição por demais exigente.

Seguindo Beneux et al. (2019) e Deaecto (2016), o projeto da função de comutação deve garantir a estabilidade assintótica global do sistema afim com comutação para cada $p \in \mathfrak{D}$, com

$$x_e(p) = -A_\lambda^{-1} g_\lambda(p) \quad (5)$$

e $\lambda \in \Lambda$ tal que A_λ seja Hurwitz estável (autovalores com parte real negativa). Claramente, devido à restrição $x_e(p) \in \mathfrak{X}$, em geral, o vetor λ depende de p , ou seja, $\lambda = \lambda(p) \in \Lambda$. Neste ponto, considera-se a seguinte hipótese, que será adotada a partir daqui.

Hipótese 1. O conjunto \mathfrak{D} é composto por um número finito de células disjuntas \mathfrak{D}_j , tais que $\mathfrak{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{J}} \mathfrak{D}_j$ e $\mathfrak{D}_i \cap \mathfrak{D}_j = \emptyset$, $\forall i \neq j \in \mathbb{J}$. A função $x_e(p) : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{X}$ é aproximada por uma função linear por partes tal que

$$x_e(p) = -A_{\lambda(j)}^{-1} g_{\lambda(j)}(p) \quad (6)$$

$$\frac{\partial x_e}{\partial p}(p) = -A_{\lambda(j)}^{-1} G_{\lambda(j)} \quad (7)$$

sempre que $p \in \mathfrak{D}_j$ for membro da célula $j \in \mathbb{J}$.

A partir desta hipótese, a condição de projeto (4) é satisfeita pela determinação de $\lambda(j) \in \Lambda$ tal que

$$x_{e_j}(p) = -A_{\lambda(j)}^{-1} g_{\lambda(j)}(p) \quad (8)$$

$$H_j = -A_{\lambda(j)}^{-1} G_{\lambda(j)} \quad (9)$$

para $p \in \mathfrak{D}_j$ e $j \in \mathbb{J}$. Em Beneux et al. (2019) as quantidades (8)-(9) são calculadas analiticamente para um sistema de segunda ordem e um determinado conjunto \mathfrak{X} . Nas seções seguintes, um procedimento semelhante, baseado na Hipótese 1 é adotado, uma vez que esta é sempre satisfeita pela escolha de um número suficientemente grande de células disjuntas. No entanto, é importante deixar claro que a aproximação através de células disjuntas, no caso geral, merece maior esforço de pesquisa em um futuro próximo.

3. CONTROLE COM COMUTAÇÃO

Para a resolução do problema de interesse, o principal desafio advém de $p \in \mathfrak{D}$ ser desconhecido. Para colocar este fato em uma perspectiva clara, vamos supor inicialmente que $p = \hat{p} \in \mathfrak{D}$ seja conhecido e que $x_e(\hat{p}) \in \mathfrak{X}$ para

algum $\hat{\lambda} \in \Lambda$. Definindo a nova variável $\xi = x - x_e(\hat{p})$ e assumindo que o estado do sistema afim com comutação (1) está disponível para realimentação, como já descrito anteriormente, temos

$$\dot{\xi} = A_\sigma \xi + A_\sigma x_e(\hat{p}) + g_\sigma(\hat{p}) \quad (10)$$

que nos permite determinar a derivada temporal da função de Lyapunov candidata $v(\xi) = \xi' P \xi$, com $P > 0$, ao longo de uma trajetória arbitrária de (10), como sendo

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi) &= 2\xi' P (A_\sigma \xi + A_\sigma x_e(\hat{p}) + g_\sigma(\hat{p})) \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} 2\xi' P (A_i \xi + A_i x_e(\hat{p}) + g_i(\hat{p})) \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} 2\xi' P (A_\lambda \xi + A_\lambda x_e(\hat{p}) + g_\lambda(\hat{p})) \\ &\leq \xi' (A'_\lambda P + P A_\lambda) \xi \\ &< 0, \forall \xi \neq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

em que foi utilizada a função de comutação dependente do estado $\sigma(t) = u(\xi(t))$ dada por

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' P (A_i \xi + A_i x_e(\hat{p}) + g_i(\hat{p})) \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' P (A_i x + g_i(\hat{p})) \end{aligned} \quad (12)$$

Além disso, o ponto de equilíbrio (5) implica que $A_{\hat{\lambda}} x_e(\hat{p}) + g_{\hat{\lambda}}(\hat{p}) = 0$ e $A_{\hat{\lambda}}$ sendo Hurwitz estável permite determinar uma matriz $\hat{P} > 0$ tal que $A'_{\hat{\lambda}} \hat{P} + \hat{P} A_{\hat{\lambda}} < 0$, o que torna (11) válida. Para mais detalhes veja Deaecto et al. (2010).

Tratando agora do caso mais geral, em que $p \in \mathfrak{D}$ é desconhecido, uma possibilidade é estimar $p \in \mathfrak{D}$ a partir do estado do sistema afim com comutação. Claramente, como sugerido em Beneux et al. (2019) e, em um cenário mais geral, em Deaecto (2016), um observador de estado pode ser projetado tendo em mente que $\dot{p} = 0$ e $g_\sigma(\cdot)$ é uma função linear. O observador baseado no modelo interno da planta tem a forma

$$\dot{\hat{x}} = A_\sigma \hat{x} + g_\sigma(\hat{p}) + L_{x\sigma} C (x - \hat{x}) \quad (13)$$

$$\dot{\hat{p}} = L_{p\sigma} C (x - \hat{x}) \quad (14)$$

em que $L_\sigma = [L'_{x\sigma} \ L'_{p\sigma}]'$ é o ganho do observador dependente da função de comutação a ser determinado de tal forma a assegurar que o erro de estimação convirja para zero. Para tanto, note que as componentes do erro de estimação, a saber $e_x = x - \hat{x}$ e $e_p = p - \hat{p}$ satisfazem

$$\dot{e}_x = (A_\sigma - L_{x\sigma} C) e_x + G_\sigma e_p \quad (15)$$

$$\dot{e}_p = -L_{p\sigma} C e_x \quad (16)$$

e, conseqüentemente, o ganho L_σ e a função de comutação $\sigma(\cdot) \in \mathbb{K}$ devem garantir a estabilidade assintótica do par planta/observador, conjuntamente.

Agora, tendo em mente que \hat{p} depende do tempo e muitas vezes $p \neq \hat{p}$, a variável de interesse $\xi = x - x_e(\hat{p})$ satisfaz a equação diferencial

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_\sigma \xi + A_\sigma x_e(\hat{p}) + g_\sigma(\hat{p}) - \frac{\partial x_e}{\partial \hat{p}} \dot{\hat{p}} \\ &= A_\sigma \xi + A_\sigma x_e(\hat{p}) + g_\sigma(\hat{p}) + G_\sigma e_p - \\ &\quad - H(\hat{p}) L_{p\sigma} C e_x \end{aligned} \quad (17)$$

em que $H(\hat{p}) = \partial x_e / \partial \hat{p}$. Esta equação, juntamente com as do observador (15)-(16) e o vetor de estado aumentado $\psi = [\xi' \ e'_x \ e'_p]'$ são suficientes para definir o seguinte sistema afim com comutação

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \begin{bmatrix} A_\sigma & -H(\hat{p}) L_{p\sigma} C & G_\sigma \\ 0 & A_\sigma - L_{x\sigma} C & G_\sigma \\ 0 & -L_{p\sigma} C & 0 \end{bmatrix} \psi + \\ &\quad + \begin{bmatrix} A_\sigma x_e(\hat{p}) + g_\sigma(\hat{p}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

o qual, $x \rightarrow x_e(\hat{p})$ e $\hat{p} \rightarrow p$ sempre que existir uma função de comutação tal que a origem $\psi = 0$ seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Concluindo a resolução do problema apresentado, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e(p) \in \mathfrak{X} \quad (19)$$

Observe que sendo possível projetar uma função de comutação dependente apenas de ξ então, por construção, obtém-se uma lei de controle, via realimentação de estado, mais simples de ser implementada. As condições de projeto são fornecidas no próximo teorema e expressas pelas matrizes

$$\mathbf{A}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} A_i & -H_j L_{pi} C & G_i \\ 0 & A_i - L_{xi} C & G_i \\ 0 & -L_{pi} C & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{J}$, particionadas em quatro blocos conforme indicado.

Teorema 1. Se existirem matrizes de dimensões compatíveis $\mathbf{R}_{(i,j)} = \text{diag}(R_{(i,j)}, 0)$, L_i , para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{J}$ e $\mathbf{P} = \text{diag}(P, S) > 0$ tais que

$$\mathbf{A}'_{(i,j)} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_{(i,j)} < -\mathbf{R}_{(i,j)}, \quad (i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{J} \quad (21)$$

$$\mathbf{R}_{(\lambda(j),j)} \geq 0, \quad j \in \mathbb{J} \quad (22)$$

então, a função de comutação

$$u(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} -\xi' R_{(i,j)} \xi + 2\xi' P (A_i x_e(\hat{p}) + g_i(\hat{p})) \quad (23)$$

faz a origem $\psi = 0$ ser globalmente assintoticamente estável sempre que $\hat{p} \in \mathfrak{D}_j$ para algum $j \in \mathbb{J}$.

Prova 1. Assumindo que $\hat{p} \in \mathfrak{D}_j$ para algum $j \in \mathbb{J}$, a derivada em relação ao tempo da função de Lyapunov candidata $v(\psi) = \psi' \mathbf{P} \psi$, ao longo de uma trajetória arbitrária de (18), satisfaz

$$\begin{aligned} \dot{v}(\psi) &= \psi' (\mathbf{A}'_{(\sigma,j)} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_{(\sigma,j)}) \psi + \\ &\quad + 2\xi' P (A_\sigma x_e(\hat{p}) + g_\sigma(\hat{p})) \\ &< -\xi' R_{(\sigma,j)} \xi + 2\xi' P (A_\sigma x_e(\hat{p}) + g_\sigma(\hat{p})) \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} -\xi' R_{(i,j)} \xi + 2\xi' P (A_i x_e(\hat{p}) + g_i(\hat{p})) \\ &\leq -\xi' R_{(\lambda(j),j)} \xi + 2\xi' P (A_{\lambda(j)} x_e(\hat{p}) + g_{\lambda(j)}(\hat{p})) \\ &\leq 0, \quad \forall \psi \neq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

onde, considerando as desigualdades (21)-(22), a função de comutação (23) e, devido à Hipótese 1, a igualdade $A_{\lambda(j)} x_e(\hat{p}) + g_{\lambda(j)}(\hat{p}) = 0$ se verifica. A prova está completa.

Com relação a este resultado, é possível introduzir uma simplificação importante que consiste na determinação das matrizes que satisfazem a restrição (22). Definindo

$$\mathbf{B}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} A_{\lambda(j)} & -H_j L_{pi} C & G_i \\ 0 & A_i - L_{xi} C & G_i \\ 0 & -L_{pi} C & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{J}$, o próximo corolário do Teorema 1 fornece tal resultado que simplifica também a função de comutação (23).

Corolário 1. Se existirem matrizes de dimensões compatíveis $L_i, i \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{P} = \text{diag}(P, S) > 0$ tais que

$$\mathbf{B}'_{(i,j)}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}_{(i,j)} < 0, (i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{J} \quad (26)$$

então, a função de comutação

$$u(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' P (A_i x + g_i(\hat{p})) \quad (27)$$

sempre que $\hat{p} \in \mathcal{D}_j$ para algum $j \in \mathbb{J}$, faz a origem $\psi = 0$ ser globalmente assintoticamente estável.

Prova 2. A prova é uma consequência direta do Teorema 1. De fato, considere as variáveis matriciais

$$R_{(i,j)} = (A_{\lambda(j)} - A_i)' P + P (A_{\lambda(j)} - A_i) \quad (28)$$

para todo $j \in \mathbb{J}$. É uma tarefa simples verificar que a equação (22) é satisfeita e que ao ser substituída em (21) produz

$$\mathbf{A}'_{(i,j)}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_{(i,j)} + \mathbf{R}_{(i,j)} = \mathbf{B}'_{(i,j)}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}_{(i,j)} \quad (29)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{J}$, onde a condição (26) implica na factibilidade de (21). Resta calcular a função de comutação (23), como sendo

$$\begin{aligned} u(x) &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} -\xi' R_{(i,j)} \xi + 2\xi' P (A_i x_e(\hat{p}) + g_i(\hat{p})) \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' P A_i \xi + \xi' P (A_i x_e(\hat{p}) + g_i(\hat{p})) \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' P (A_i \hat{x} + g_i(\hat{p})) \end{aligned} \quad (30)$$

o que leva a (27), concluindo a prova.

Uma verificação cuidadosa traz à luz que as desigualdades (26) exibem uma estrutura de realimentação estática de saída e, portanto, não podem ser tratadas diretamente pelos algoritmos de resolução de LMIs. No entanto, podemos aproveitar o fato de que, no caso geral em estudo, as matrizes $\mathbf{B}_{(i,j)}, (i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{J}$ apresentam a mesma estrutura bloco-triangular. Tendo esta propriedade em mente, o seguinte procedimento, decomposto em duas etapas, pode ser adotado para determinar (se houver) uma solução factível para (26), sem introduzir nenhum conservadorismo:

1. Dado $\alpha > 0$, determine uma solução factível $S > 0$ e Y_i para as LMIs

$$\text{He} \left\{ S \begin{bmatrix} A_i & G_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - Y_i \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \right\} < -2\alpha S \quad (31)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, que fornece os ganhos estabilizantes do observador de estado $L_i = S^{-1}Y_i$.

2. Dado $\beta > 0, S > 0$ e $L_i, i \in \mathbb{K}$, determine uma solução factível $Q > 0$ para as LMIs

$$\begin{bmatrix} A_{\lambda(j)}Q + QA'_{\lambda(j)} & [-H_j L_{pi} C & G_i] \\ \bullet & -\beta S \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

para todo $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{J}$, que fornece a matriz de Lyapunov $P = Q^{-1} > 0$.

É importante deixar explícitas as condições sob as quais este procedimento é bem sucedido em fornecer as matrizes do projeto de controle. As LMIs em (31) são factíveis se, e somente se, existirem ganhos estabilizadores $L_i, i \in \mathbb{K}$ tais que as matrizes de malha fechada

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} A_i & G_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - L_i \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}, i \in \mathbb{K} \quad (33)$$

sejam quadraticamente estáveis. Embora, os ganhos compartilhem a mesma matriz de Lyapunov $S > 0$, o fato deles dependerem de $i \in \mathbb{K}$ torna esta condição menos

restritiva. Vale notar que, se $S > 0$ for factível para (31) então o mesmo ocorre para βS com qualquer $\beta > 0$.

Por outro lado, as LMIs em (32) são factíveis se, e somente se, as matrizes $A_{\lambda(j)}$ obtidas pela combinação convexa com $\lambda(j) \in \Lambda, \forall j \in \mathbb{J}$, forem quadraticamente estáveis. Os exemplos numéricos apresentados na próxima seção mostram que essas condições são menos restritivas que aquelas adotadas em Beneux et al. (2019).

Nota 1. Uma questão relevante envolvendo as provas do Teorema 1 e do Corolário 1 está na hipótese de que $\hat{p} \in \mathcal{D}_j$ para algum $j \in \mathbb{J}$. Neste sentido é importante notar que o erro de estimação

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} A_\sigma - L_{x\sigma}C & G_\sigma \\ -L_{p\sigma}C & 0 \end{bmatrix} e \quad (34)$$

converge para zero para qualquer função de comutação $\sigma(\cdot) \in \mathbb{K}$. Isto é uma consequência imediata de (31) que implica em

$$\|e(t)\| \leq \kappa \|e(0)\| e^{-\alpha t}, \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (35)$$

sendo $\kappa \geq 1$ um parâmetro que depende exclusivamente da matriz $S > 0$. Desta forma, como $p \in \mathcal{D}$ então sempre existe $\tau \geq 0$ tal que $\hat{p}(t) \in \mathcal{D}$ para todo $t \geq \tau$. Considerando que a célula \mathcal{D}_j é representada por $p(j) \in \mathcal{D}_j$ então

$$j_\star = \arg \min_{j \in \mathbb{J}} \|\hat{p} - p(j)\| \quad (36)$$

define o índice da célula mais próxima de \hat{p} .

4. EXEMPLOS E COMPARAÇÕES

Nesta seção, os resultados teóricos são ilustrados por meio de dois exemplos que passamos a apresentar detalhadamente. Um deles é o mesmo utilizado em Beneux et al. (2019) e consiste de um conversor de potência cc-cc flyback operando em modo de condução contínua, cujo modelo tem dois subsistemas estáveis de segunda ordem. O outro exemplo é composto por dois subsistemas instáveis de terceira ordem, para o qual os resultados propostos em Beneux et al. (2019) não se aplicam. Em ambos os casos, o objetivo principal é controlar as trajetórias do sistema em malha fechada $x(t)$ para um ponto de equilíbrio $x_e(p) \in \mathcal{X}$ que contém o valor desejado ϕ_e em sua segunda componente.

4.1 Aspectos Numéricos

As condições de projeto são fornecidas no Corolário 1 e resolvidas por meio do procedimento de duas etapas (31) e (32). Para melhorar o condicionamento numérico, o primeiro passo é resolvido a partir do problema de otimização convexa

$$\min_{S>0, W>0, Y_i} \text{tr}(W) \quad (37)$$

sujeito a (31) e $W > Y_i' S^{-1} Y_i, \forall i \in \mathbb{K}$. No segundo passo resolvemos

$$\min_{Q>0} \text{tr}(Q) \quad (38)$$

sujeito a (32).

Neste trabalho, consideramos \mathcal{D} uma área retangular com uma grade suficientemente fina formada pelo produto cartesiano $\ell_{p1} \times \ell_{p2}$, onde ℓ_{p1} e ℓ_{p2} são os intervalos de incerteza da primeira e da segunda componente de p , respectivamente. Para cada célula \mathcal{D}_j , determinamos o

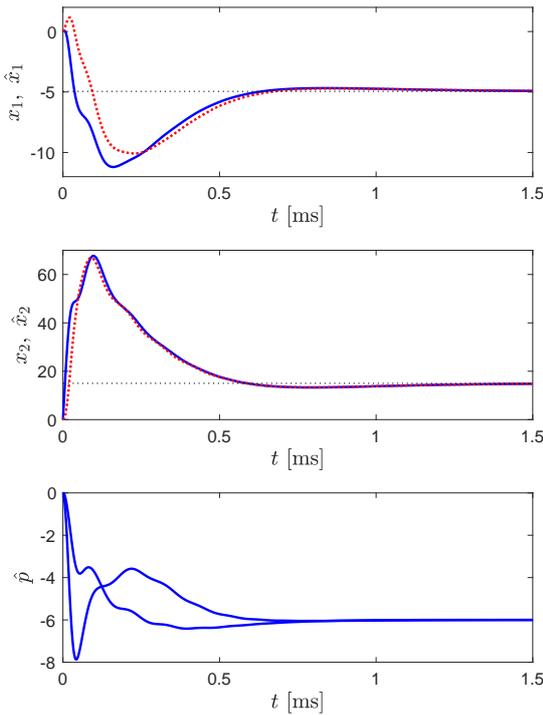


Figura 1. Estados do sistema e do observador e estimativa do parâmetro incerto.

correspondente par $(\lambda(j), p(j))$ para o qual a segunda componente de x_e é igual ao valor desejado ϕ_e . Apenas as células \mathfrak{D}_j correspondentes às matrizes $A_{\lambda(j)}$ Hurwitz estáveis foram consideradas para compor o conjunto \mathfrak{D} utilizado nas condições de projeto (32).

A implementação da função de comutação (27) depende de $x_e(\hat{p})$ dado em (6) o qual, em cada instante de tempo, é calculado através de $\lambda(j_*)$ com j_* dado em (36). Como já mencionado, a precisão envolvida depende do número de células disjuntas \mathfrak{D}_j , $j \in \mathbb{J}$, que define a quantidade de LMIs a serem resolvidas em (32). Portanto, certamente existe um compromisso entre a escolha da precisão com que \mathfrak{D} é representado, o que impacta na qualidade da solução, e na dificuldade numérica envolvida².

4.2 Exemplo 1

Considere o conversor flyback tratado na referência Beneux et al. (2019), com os mesmos valores numéricos, a saber $V_e = 28$ V, $L_c = 200$ μ H, $C_c = 2.6$ μ F, $n_T = 2$ e uma carga resistiva de $R_o = 75$ Ω . Considera-se que o conversor é afetado por variações na entrada e na carga e seu modelo matemático é dado pelo sistema dependente de parâmetros (1)-(2) com as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/(R_o C_c) \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} V_e/L_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -n_T/L_c \\ n_T/C_c & -1/(R_o C_c) \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/L_c \\ -1/C_c & 0 \end{bmatrix}$$

² Os problemas (37) e (38) foram resolvidos no ambiente LMI Lab. As simulações foram realizadas em Matlab - R2017a, Apple Computer, 3,5 GHz Intel Core i7 Quad -Core, 16 GB de RAM.

sendo o estado $x = [i_L \ v_C]'$ composto pela corrente no indutor i_L e pela tensão no capacitor v_C . A tensão desejada a ser atingida é $\phi_e = 15$ V. Assim como na referência Beneux et al. (2019), supôs-se que ambos os estados são medidos e, portanto, adota-se $C = I$.

Consideramos o conjunto \mathfrak{D} como sendo a caixa definida por $[-7.5, -2.5] \times [-7.5, -2.5]$, gradeada com um passo de 0.25, que claramente contém o parâmetro desconhecido $p = [-6 \ -6]'$, responsável pela definição final do ponto de equilíbrio do sistema real. Resolvendo o procedimento de duas etapas (31) e (32) com $\alpha = 5 \times 10^3$ e $\beta = 10^6$, obtemos os ganhos estabilizantes do observador

$$[L_1|L_2] = 10^4 \begin{bmatrix} 0.9818 & -0.5224 & 0.4279 & 0.6535 \\ -0.1653 & 0.6516 & 0.9192 & 2.1568 \\ -0.0299 & -1.0427 & 1.1009 & -0.0727 \\ -1.7223 & -0.3985 & 0.2053 & -1.7067 \end{bmatrix}$$

e a matriz

$$Q = 10^4 \begin{bmatrix} 0.0169 & 0.0097 \\ 0.0097 & 1.2969 \end{bmatrix}$$

importante para a implementação da função de comutação. O primeiro e segundo gráficos da Figura 1 representam as trajetórias do sistema e do estado do observador, em linhas sólidas e pontilhadas, respectivamente, evoluindo a partir da origem $x = 0$. O terceiro gráfico da mesma figura mostra o vetor estimado de parâmetros incertos \hat{p} . Observe que o valor de $p \in \mathfrak{D}$ foi estimado corretamente e a tensão do capacitor atingiu o valor 15 [V] conforme desejado.

4.3 Exemplo 2

Considere o sistema afim com comutação (1)-(2) composto por dois subsistemas instáveis, a saber

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -416 & -62 & -1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 94 & -23 & -5 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O objetivo principal é projetar a função de comutação (27) para controlar o segundo componente do estado para o valor $\phi_e = 3$, sem o conhecimento do parâmetro incerto $p = [30.5 \ -17.5]'$ do sistema real e com $C = I$.

Considerando que o conjunto \mathfrak{D} é um retângulo definido por $[25, 40] \times [-20, -15]$, com passo de 0.2, resolvemos o procedimento de duas etapas (31)-(32) com $\alpha = 0.5$ e $\beta = 10^4$, obtendo os ganhos estabilizantes do observador

$$L_1 = \begin{bmatrix} 6.3527 & -2.3404 & -2.9095 \\ 0.1964 & 0.7134 & 0.8397 \\ -20.6293 & 9.1136 & 11.3457 \\ -0.5019 & 2.5720 & -0.3522 \\ 43.4496 & -56.7979 & -16.8307 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 6.3084 & -0.3528 & 1.2316 \\ -0.2790 & 1.2637 & 0.9222 \\ -1.9410 & -11.8047 & 16.7003 \\ -2.3786 & 4.3795 & -0.6011 \\ 58.6950 & -19.3539 & 2.7450 \end{bmatrix}$$

e a matriz

$$Q = 10^5 \begin{bmatrix} 0.0083 & -0.0117 & -0.1082 \\ -0.0117 & 0.1170 & -0.0020 \\ -0.1082 & -0.0020 & 3.2636 \end{bmatrix}$$

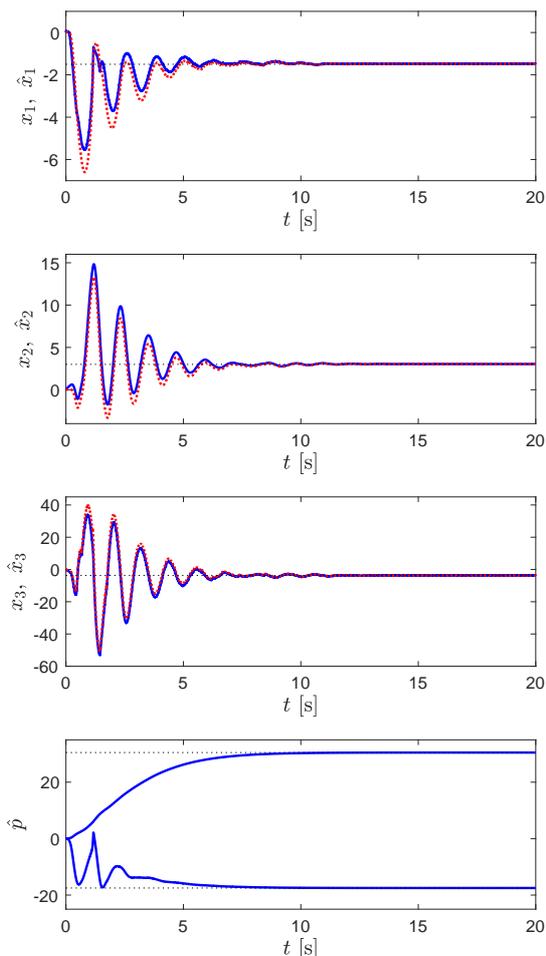


Figura 2. Estados do sistema e do observador e estimativa do parâmetro incerto.

que é importante para a implementação da função de comutação. As LMIs do procedimento de duas etapas foram resolvidas em aproximadamente 14 segundos sendo a segunda etapa composta por 3953 LMIs. Os estados do sistema e do observador são apresentados nos três primeiros gráficos da Figura 2 evoluindo a partir das condições iniciais $x(0) = \hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0]'$, enquanto que o quarto gráfico apresenta o vetor incerto estimado. Observe que, mesmo para o caso em que ambos os subsistemas são instáveis, a estratégia de controle foi eficiente em estimar o parâmetro incerto $p \in \mathcal{D}$ e em levar a segunda componente do estado para $\phi_e = 3$.

5. CONCLUSÕES

Neste artigo, propusemos uma função de comutação baseada em observador de estado, garantindo estabilidade assintótica global para sistemas afins com comutação e incertezas paramétricas. O termo afim depende de um parâmetro incerto, o que torna o ponto de equilíbrio parcialmente desconhecido. A abordagem proposta é realizar o projeto levando em consideração que o ponto de equilíbrio é ajustado em tempo real através da estimativa do vetor incerto. As condições de projeto são expressas por LMIs. O controle de um conversor flyback e um exemplo acadêmico com dois subsistemas instáveis foram utilizados para comparação e para validação da teoria proposta.

REFERÊNCIAS

- Baldi, S., Papachristodoulou, A., and Kosmatopoulos, E.B. (2018). Adaptive pulse width modulation design for power converters based on affine switched systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 30, 306–322.
- Beneux, G., Riedinger, P., Daafouz, J., and Grimaud, L. (2019). Adaptive stabilization of switched affine systems with unknown equilibrium points: Application to power converters. *Automatica*, 99, 82–91.
- Benmiloud, M., Benalia, A., Djemai, M., and Defoort, M. (2018). On the local stabilization of hybrid limit cycles in switched affine systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 64(2), 841–846.
- Bolzern, P. and Spinelli, W. (2004). Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In *IEEE Am. Contr. Conf.*, volume 5, 3890–3895.
- Deaecto, G.S. (2016). Dynamic output feedback \mathcal{H}_∞ control of continuous-time switched affine systems. *Automatica*, 71, 44–49.
- Deaecto, G.S., Geromel, J.C., and Daafouz, J. (2011). Dynamic output feedback \mathcal{H}_∞ control of switched linear systems. *Automatica*, 47(8), 1713–1720.
- Deaecto, G.S., Geromel, J.C., Garcia, F.S., and Pomilio, J.A. (2010). Switched affine systems control design with application to dc–dc converters. *IET Control Theory & Applications*, 4(7), 1201–1210.
- Egidio, L.N., Daiha, H.R., and Deaecto, G.S. (2020). Global asymptotic stability of limit cycle and $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ performance of discrete-time switched affine systems. *Automatica*, 116, 108927.
- Egidio, L.N. and Deaecto, G.S. (2019). Novel practical stability conditions for discrete-time switched affine systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 64(11), 4705–4710.
- Geromel, J.C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(5), 1915–1930.
- Hetel, L. and Fridman, E. (2013). Robust sampled-data control of switched affine systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 58(11), 2922–2928.
- Lin, H. and Antsaklis, P.J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 54(2), 308–322.
- Martinez-Salamero, L., García, G., Orellana, M., Lahore, C., Estibals, B., Alonso, C., and Carrejo, C.E. (2013). Analysis and design of a sliding-mode strategy for start-up control and voltage regulation in a buck converter. *IET Power Electronics*, 6(1), 52–59.
- Noori, A., Farsi, M., and Esfanjani, R.M. (2016). Design and implementation of a robust switching strategy for dc–dc converters. *IET Power Electronics*, 9(2), 316–322.
- Sanchez, C.A., Garcia, G., Hadjeras, S., Heemels, W.M.H., and Zaccarian, L. (2019). Practical stabilization of switched affine systems with dwell-time guarantees. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 64(11), 4811–4817.
- Shorten, R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K., and King, C. (2007). Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM review*, 49(4), 545–592.
- Theunisse, T.A., Chai, J., Sanfelice, R.G., and Heemels, W.M.H. (2015). Robust global stabilization of the dc–dc boost converter via hybrid control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 62(4), 1052–1061.