

## Controle em Rede com Acionamento por Eventos para Sistemas Sujeitos a Ataques Cibernéticos<sup>\*</sup>

Márcia L. C. Peixoto<sup>\*</sup> Pedro H. S. Coutinho<sup>\*</sup> Paulo S. P. Pessim<sup>\*</sup>  
Iury Bessa<sup>\*,\*\*</sup> Reinaldo M. Palhares<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil  
(e-mails: {marciapeixoto, phcoutinho, ppessim}@ufmg.br)

<sup>\*\*</sup> Departamento de Eletricidade, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, Brasil (e-mail: iurybessa@ufam.edu.br)

<sup>\*\*\*</sup> Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil (e-mail: rpalhares@ufmg.br)

---

**Abstract:** This paper presents a novel approach for networked event-triggered control for linear parameter-varying systems subject to stochastic cyberattacks and network-induced delay. The proposed networked control system is composed of a gain-scheduled controller and an event-triggering mechanism. To design them, new co-design conditions based on linear matrix inequalities are provided to guarantee the mean-square asymptotic stability and the robustness with respect to stochastic norm-bounded deceptive attacks. Numerical simulations indicate that the new conditions are less conservative than other approaches in the literature and they are also able to ensure the stabilization for higher attack occurrence probability.

**Resumo:** Este trabalho apresenta uma nova abordagem de controle em rede com acionamento por eventos para sistemas lineares com parâmetros variantes e sujeitos a ataques cibernéticos estocásticos assim como retardos no tempo induzidos pela rede. O sistema de controle em rede proposto é composto por um controlador com ganhos escalonados e um mecanismo estático e periódico de acionamento por evento. Para projetá-los, novas condições de *codesign* baseadas em desigualdades matriciais lineares são fornecidas para garantir a estabilidade assintótica em média quadrática e robusta à ocorrência de ataques deceptivos estocásticos. Simulações numéricas indicam que as novas condições apresentadas neste trabalho são menos conservadoras que outras encontradas na literatura e, ainda, são capazes de garantir a estabilidade para uma maior probabilidade de ocorrência de ataque.

**Keywords:** Event-triggered control; Networked control; Cyberattacks; Linear matrix inequalities; Linear parameter-varying systems.

**Palavras-chaves:** Controle com acionamento por eventos; Controle em rede; Ciberataques; Desigualdades matriciais lineares; Sistemas lineares com parâmetros variantes.

---

### 1. INTRODUÇÃO

O controle em rede é caracterizado pela troca de dados entre os componentes do sistema por meio de redes de comunicação. Com o desenvolvimento das tecnologias de comunicação e a internet das coisas (IoT), esse tipo de estratégia de controle encontra grande apelo, incluindo sistemas de larga de escala. No entanto, devido à limitação de recursos, tais como largura de banda e energia, as técnicas de controle em rede devem ser capazes de lidar com questões inerentes às redes de comunicação, tais como perdas de pacote, retardos no tempo induzidos pela rede, e quantização (Peng and Li, 2018). Além disso, pela natureza do problema *per se*, há vulnerabilidades oriundas de ciberataques (Teixeira et al., 2015).

Nesse contexto, há diferentes propostas para lidarem com questões de cibersegurança de sistemas em controle como, por exemplo, estratégias de detecção de ciberataques e estratégias de controle resiliente ou robusta à ciberataques. Para o desenvolvimento dessas técnicas, os ciberataques são classificados em dois grandes grupos: ataques deceptivos (Ding et al., 2018) que violam a integridade dos dados na rede, modificando sinais de controle ou sensores; e ataques de negação de serviço (DoS) (Persis and Tesi, 2016), que restringem o fluxo de dados na rede. Particularmente para lidar com os ciberataques, são usualmente propostos modelos para os diferentes tipos de ataques. No caso de DoS, usam-se modelos caracterizados por sua frequência e duração (Persis and Tesi, 2016), ou por ataques modulados por comprimento de pulsos com energia limitada (Rotondo et al., 2019; Pessim et al., 2021). No caso dos ataques deceptivos, assume-se o limite em norma para esses ataques cuja ocorrência é estocástica (Cao et al., 2021).

---

<sup>\*</sup> Esse trabalho foi financiado pelo CNPq (307933/2018-0; 164692/2020-7; 141252/2021-9), CAPES (Código de financiamento 001) e pelo programa de bolsas de estudos PROPG-CAPES/FAPEAM (88887.199399/2018-00).

Outro aspecto do controle em rede diz respeito ao uso eficiente dos recursos, tais como a largura da banda. Para lidar com essa questão, técnicas de controle com acionamento por eventos são propostas como alternativas ao tradicional acionamento por tempo (Ban et al., 2020). No controle por acionamento por evento, um novo comando de controle é transmitido apenas quando um mecanismo de acionamento avalia que o desvio entre a trajetória do sistema observada e a trajetória desejada se torna significativo. Tal política evita transmissões desnecessárias comuns em estratégias de acionamento periódico.

As estratégias de controle com acionamento por evento podem ser classificadas quanto à forma de aquisição de sinais da planta e quanto à estrutura do mecanismo de acionamento por eventos (ETM, do inglês *event-triggering mechanism*). Em relação à aquisição dos sinais, o controle com acionamento por evento pode ser contínuo (Coutinho and Palhares, 2022), que avalia continuamente os sensores da planta; ou periódico (Coutinho and Palhares, 2021), onde a aquisição de sinal e avaliação da condição de acionamento é realizada periodicamente. Quanto às estruturas, os ETMs podem ser estáticos (Zhang et al., 2022), onde uma função de acionamento estática com parâmetros fixos é adotada; dinâmicos (Coutinho and Palhares, 2021), que apresentam uma dinâmica interna com parâmetros fixos; ou adaptativos (Zhang et al., 2019), nas quais os parâmetros da função de acionamento são variantes no tempo. Além disso, os sistemas de controle com acionamento por evento podem ser projetados por emulação (Ghodrat and Marquez, 2020), onde o controlador e o ETM são projetados separadamente; ou por *codesign* (Coutinho et al., 2022), onde ambos são projetados ao mesmo tempo, o que geralmente conduz a melhor desempenho do sistema.

Este trabalho apresenta uma estratégia de controle com escalonamento de ganhos e acionamento por eventos periódico, para sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV, do inglês *linear parameter-varying*) sujeitos a ciberataques deceptivos estocásticos e a retardos induzidos pela rede. A estratégia proposta é obtida por meio de novas condições construtivas de *codesign* baseada em otimização convexa com restrições de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*) que garantem estabilidade assintótica em média quadrática. Simulações numéricas apresentadas nesse trabalho indicam que as condições de projeto propostas são menos conservadoras que outras na literatura. Além disso, o sistema de controle é capaz de garantir a estabilidade assintótica em média quadrática para diferentes probabilidades de ataque.

O restante deste trabalho é organizado da seguinte forma: na Seção 2, discute-se aspectos gerais de sistemas de controle em rede sujeitos a ciberataques deceptivos, e também formula o problema de estabilização; a Seção 3 fornece as condições de *codesign* do sistema de controle com acionamento por eventos que garantam a estabilidade assintótica em média quadrática levando em conta retardos induzidos pela rede e ataques deceptivos; a Seção 4 apresenta simulações numéricas para avaliar a abordagem proposta; e a Seção 5 conclui este trabalho.

*Notação:*  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  é o conjunto de números naturais e  $\mathbb{N}_{\leq m}$  o conjunto de naturais menores ou iguais a  $m$ ;  $\mathbb{R}^n$  denota o espaço Euclidiano  $n$ -dimensional e  $\mathbb{R}^{m \times n}$  o

conjunto de matrizes reais  $m \times n$ .  $X > 0$  ( $X < 0$ ) significa que  $X$  é uma matriz simétrica definida positiva (negativa). A matriz identidade de ordem  $n$  é denotada por  $I_n$  e a matriz nula de ordem  $n \times m$  por  $0_{n \times m}$ . As dimensões são omitidas quando forem facilmente deduzidas.  $\text{diag}(A, B)$  denota um bloco matriz diagonal cujos elementos são  $A, B$ ;  $A \otimes B$  denota o produto de Kronecker entre as matrizes  $A$  and  $B$ ;  $\text{He}[X]$  denota  $X + X^T$ . Termos deduzidos por simetria em matrizes simétricas são identificados como ‘ $\star$ ’.  $E[X]$  é o valor esperado de uma variável aleatória  $X$ . Denota-se  $x_t : [-d, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  como o segmento  $x_t(s) = x(t+s)$ ,  $s \in [-d, 0]$ .

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### 2.1 Configuração do sistema de controle em rede

A configuração considerada para o sistema de controle em rede é descrita na Figura 1. Nessa configuração, a comunicação via rede de comunicação é baseada em pacotes. A informação do estado da planta é disponibilizada periodicamente com período de amostragem  $h$  para o ETM que compara o sinal de  $x(jh)$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ , com o último sinal enviado através da rede de comunicação,  $x(t_k h)$ . Desta forma, o ETM determina o próximo instante de transmissão a partir de uma função de acionamento apropriada. Nesse contexto, a sequência de transmissões é dada por  $\{t_k h\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ , com  $t_k \in \mathbb{N}_0$  satisfazendo a  $t_k < t_{k+1}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_0$ , e  $t_0 \geq 0$ .

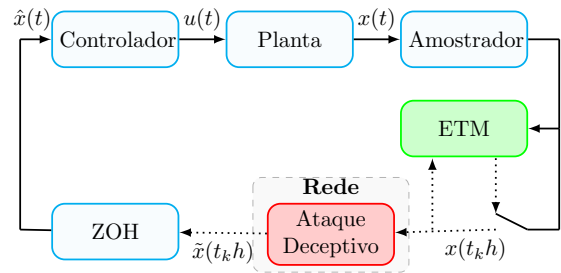


Figura 1. Estrutura do sistema de controle em rede sujeito a ataques deceptivos e retardo no tempo.

Em cada instante de transmissão  $t_k h$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , o sinal  $x(t_k h)$  é enviado ao nó do controlador via rede de comunicação com um retardo induzido  $\tau_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Além disso, a rede está sujeita a ataques deceptivos, que caracterizam-se pela injeção de informação falsa com o objetivo de gerar um sinal corrompido do estado,  $\tilde{x}(t_k h)$ , a ser disponibilizado ao controlador no lugar da informação correta do estado  $x(t_k h)$ . Considerando a implementação de um segurador de ordem zero (ZOH, do inglês *zero-order hold*), o sinal disponibilizado ao controlador é mantido constante entre dois instantes de transmissão tal que  $\hat{x}(t)$  é atualizado da seguinte forma:

$$\hat{x}(t) = \tilde{x}(t_k h), \forall t \in [t_k h + \tau_k, t_{k+1} h + \tau_{k+1}). \quad (1)$$

Note que no caso em que a rede não está sujeita a ataques deceptivos, tem-se simplesmente  $\tilde{x}(t_k h) \equiv x(t_k h)$ . Considera-se a hipótese a seguir sobre o retardo no tempo induzido pela rede de comunicação.

Hipótese 1. Existe um retardo máximo dado  $\bar{\tau} \in \mathbb{R}_{>0}$ , tal que o retardo induzido pela rede de comunicação satisfaz a condição:  $0 \leq \tau_k \leq \bar{\tau}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_0$ .

Considere uma planta descrita pelo modelo LPV:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t) \quad (2)$$

no qual  $[A(\alpha(t)) \ B(\alpha(t))] = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) [A_i \ B_i]$ , sendo  $N$  o número de vértices e  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]^T$  o vetor de parâmetros variantes no tempo pertencentes ao simplexo

$$\mathcal{H} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i \in \mathbb{N}_{\leq N} \right\}. \quad (3)$$

Para estabilização, considera-se o controlador com ganhos escalonados da forma:

$$u(t) = K(\alpha(t))\hat{x}(t), \quad (4)$$

no qual  $K(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) K_i$ , sendo  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i \in \mathbb{N}_{\leq N}$ , ganhos a serem projetados.

## 2.2 Ataques deceptivos estocásticos

Quando o sinal de  $x(t_k h)$  é enviado para a rede em  $t = t_k h$ , o atacante pode substituir essa informação por outra corrompida. Assim como em (Liu et al., 2021), este trabalho considera ataques deceptivos estocásticos caracterizados por uma taxa de sucesso aleatória  $\beta$  modelada por uma distribuição de Bernoulli. Especificamente, assume-se que o valor esperado e a variância de  $\beta$  são, respectivamente,  $E[\beta] = \bar{\beta}$  e  $E[(\beta - \bar{\beta})^2] = \bar{\beta}(1 - \bar{\beta})$  com  $\bar{\beta} \in [0,1]$ . Por conseguinte, o sinal transmitido pela rede de comunicação sujeita a ataques deceptivos é dado por

$$\tilde{x}(t_k h) = \beta(t_k h)g(t_k h, x(t_k h)) + (1 - \beta(t_k h))x(t_k h), \quad (5)$$

onde  $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função de ataque que produz o sinal injetado pelo atacante para corromper o sinal do estado. Assim como em (Cao et al., 2021), a seguinte hipótese é feita sobre a função de ataque.

Hipótese 2. A função  $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz:

$$\|g(t, x)\|^2 \leq \|Gx\|^2. \quad (6)$$

Nota 3. Em cada instante de transmissão  $t = t_k h$ , se  $\beta(t_k h) = 0$ , o ataque deceptivo não ocorre e a informação correta do estado é entregue ao controlador, logo  $\tilde{x}(t_k h) = x(t_k h)$ . Por outro lado, se  $\beta(t_k h) = 1$ , então o ataque deceptivo ocorre e o controlador recebe a informação corrompida, ou seja,  $\tilde{x}(t_k h) = g(t_k h, x(t_k h))$ .

## 2.3 Comunicação baseada em eventos

A comunicação baseada em eventos é usada para reduzir a quantidade de transmissões requeridas para garantir a estabilidade do sistema. Neste trabalho, considera-se o ETM periódico com  $t_0 = 0$ ,

$$t_{k+1}h = \min\{t > t_k h : \Gamma(x(t), e(t)) < 0, t \in \mathcal{S}_k\}, \quad (7)$$

onde  $\mathcal{S}_k := \{t_k h + ih\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ ,  $e(t) = x(t_k h) - x(t)$ ,  $\forall t \in \mathcal{S}_k$ , é o erro de transmissão, e a função de acionamento é

$$\Gamma(x, e) = \sigma x^T \Omega x - e^T \Omega e, \quad (8)$$

sendo  $\sigma \in (0,1)$  um parâmetro especificado e  $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica definida positiva a ser projetada. Essa classe de mecanismos de acionamento é denominada periódica, pois a informação do estado da planta é disponibilizada ao mecanismo com um período de amostragem fixo  $h$ , garantindo a exclusão do comportamento de Zenão da solução do sistema (Coutinho and Palhares, 2021).

A amostragem aperiódica e o retardo no tempo induzido pela rede são modelados conforme o proposto por Yue et al. (2013). Considere o intervalo  $\mathcal{I}^k = [t_k h + \tau_k, t_{k+1} h + \tau_{k+1})$  decomposto como  $\mathcal{I}^k = \cup_{j=0}^{d_k} \mathcal{I}_j^k$ , sendo que:

$$\mathcal{I}_j^k = \begin{cases} [t_k h + \tau_k, t_k h + h + \bar{\tau}), & j = 0 \\ [t_k h + ih + \bar{\tau}, t_k h + ih + h + \bar{\tau}), & j \in \mathbb{N}_{\leq d_k - 1} \\ [t_k h + d_M h + \bar{\tau}, t_{k+1} h + \tau_{k+1}), & j = d_k, \end{cases}$$

e  $d_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  é escolhido tal que

$$t_k h + d_k h + \bar{\tau} \leq t_{k+1} h + \tau_{k+1} < t_k h + (d_k + 1)h + \bar{\tau}.$$

Nesse caso, define-se uma função linear por partes

$$\tau(t) = t - t_k h - jh, \quad t \in \mathcal{I}_j^k, j \in \{0\} \cup \mathbb{N}_{\leq d_k} \quad (9)$$

que satisfaz a condição

$$0 \leq \tau(t) \leq h + \bar{\tau} = d. \quad (10)$$

Além disso, o erro visto do lado do atuador é

$$e_k(t) = x(t_k h) - x(t_k h + jh), \quad t \in \mathcal{I}_j^k, j \in \{0\} \cup \mathbb{N}_{\leq d_k}, \quad (11)$$

o que permite escrever

$$x(t_k h) = e_k(t) + x(t - \tau(t)), \quad \forall t \in \mathcal{I}^k. \quad (12)$$

## 2.4 Representação do sistema em malha fechada

Considerando a definição do retardo variante no tempo em (10) e (12), a dinâmica do sistema em malha fechada com o ETM (7) é escrita da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + \beta(t_k h)B(\alpha(t))K(\alpha(t))g(t_k h, x(t_k h)) + (1 - \beta(t_k h))B(\alpha(t))K(\alpha(t))(x(t - \tau(t)) + e_k(t)). \quad (13)$$

Neste trabalho, considera-se a seguinte definição de estabilidade assintótica em média quadrática.

Definição 4. Seja  $x(t)$  a solução no instante  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  do sistema (13) equipado com o ETM periódico (7) para uma condição inicial  $x(s) = x_0$ ,  $\forall s \in [-d, 0]$ . O ponto de equilíbrio  $x = 0$  de (13) é assintoticamente estável em média quadrática se  $E[\|x(t)\|^2] \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

O problema a ser abordado neste artigo é descrito abaixo.

Problema 5. Seja o sistema (2) com a lei de controle (4) sujeito a ataques deceptivos estocásticos descritos em (5) e retardos no tempo induzidos pela rede de comunicação  $\tau_k$ . Considerando que a sequência de instantes de transmissão é gerada pelo ETM periódico (7) e que as Hipóteses 1 e 2 são satisfeitas, determine a lei de controle de ganho escalonado (4) e a função de acionamento (8) tal que a origem do sistema em malha fechada (13) seja assintoticamente estável em média quadrática, de acordo com a Definição 4.

## 3. RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção uma condição de *codesign* dependente do retardo é proposta como solução para o Problema 5.

Teorema 6. Sejam  $\bar{\beta} \in [0,1]$ ,  $h \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\bar{\tau} \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\sigma \in (0,1)$ ,  $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ , e  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  fornecidos. Se existirem matrizes simétricas  $\tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{\Omega} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e  $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , e matrizes  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , e  $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , tais que

$$\tilde{P} > 0, \tilde{R} > 0, \tilde{Q} > 0, \tilde{\Omega} > 0, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \Theta_{ii}(\tau) < 0, & i = j \\ \Theta_{ij}(\tau) + \Theta_{ji}(\tau) < 0, & i < j \end{cases} \quad (15)$$

para todo  $i, j \in \mathbb{N}_{\leq N}$  e  $\tau \in \{0, d\}$ , em que

$$\Theta_{ij}(0) = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{ij}(0) - \mathcal{F}^\top \tilde{\Phi}(0) \mathcal{F} & \star & \star \\ [\tilde{Y}_1^\top \ 0] \mathcal{F} & -\tilde{\mathcal{R}} & \star \\ \tilde{\Lambda} & 0_{n \times 2n} & -I_n \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{ij}(d) = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{ij}(d) - \mathcal{F}^\top \tilde{\Phi}(d) \mathcal{F} & \star & \star \\ [0 \ \tilde{Y}_2] \mathcal{F} & -\tilde{\mathcal{R}} & \star \\ \tilde{\Lambda} & 0_{n \times 2n} & -I_n \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Psi}_{ij}(\tau) = \text{He}[F_0^\top \tilde{P} F_1(\tau) + \tilde{\Upsilon}_{ij}] + \tilde{\Pi}, \quad \tilde{\mathcal{R}} = \text{diag}(\tilde{R}, 3\tilde{R}),$$

$$\tilde{\Phi}(\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{R}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{R}} \end{bmatrix} + \frac{d-\tau}{d} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{R}} & \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_2^\top & 0 \end{bmatrix} + \frac{\tau}{d} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_1^\top & \tilde{\mathcal{R}} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Pi} = \text{diag}(d^2 \tilde{R}, \tilde{Q}, \sigma \tilde{\Omega}, -\tilde{Q}, 0_{2n}, -\tilde{\Omega}, -I_n),$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - v_4 \end{bmatrix}, \quad F_1(\tau) = \begin{bmatrix} v_2 \\ \tau v_5 + (d - \tau)v_6 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} v_2 - v_3 \\ v_2 + v_3 - 2v_5 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} v_3 - v_4 \\ v_3 + v_4 - 2v_6 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Lambda} = GX(v_3 + v_7), \quad v_i = [0_{n \times (i-1)n} \ I_n \ 0_{n \times (8-i)n}],$$

$$\tilde{\Upsilon}_{ij} = (v_1 + \eta v_2 + v_3)^\top (-Xv_1 + A_i Xv_2 + \beta B_i \tilde{K}_j v_8) + (1 - \beta)(v_1 + \eta v_2 + v_3)^\top B_i \tilde{K}_j (v_3 + v_7).$$

Então, a origem do sistema em malha fechada (13) equipado com o ETM periódico (7) e função de acionamento (8) é assintoticamente estável em média quadrática com  $K_j = \tilde{K}_j X^{-1}$ ,  $j \in \mathbb{N}_{\leq N}$ , e  $\Omega = X^{-\top} \tilde{\Omega} X^{-1}$ .

**Demonstração.** Considere o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato:

$$V(x_t, \dot{x}_t, t) = V_1(x_t, t) + V_2(x_t, t) + V_3(\dot{x}_t, t), \quad (16)$$

em que

$$V_1(x_t, t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-d}^t x(s) ds \end{bmatrix}^\top P \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_{t-d}^t x(s) ds \end{bmatrix},$$

$$V_2(x_t, t) = \int_{t-d}^t x^\top(s) Q x(s) ds,$$

$$V_3(\dot{x}_t, t) = d \int_{t-d}^t \int_s^t \dot{x}^\top(v) R \dot{x}(v) dv ds,$$

sendo  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes simétricas definidas positivas. Definindo  $\tilde{P} = (I_2 \otimes X^\top) P (I_2 \otimes X)$ ,  $\tilde{Q} = X^\top Q X$  e  $\tilde{R} = X^\top R X$ , é possível verificar que (14) garante que o funcional candidato (16) é definido positivo. Definindo o vetor aumentado da forma:

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \\ x(t - \tau(t)) \\ x(t - d) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \\ e_k(t) \\ g(t_k h, x(t - \tau(t))) + e_k(t) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$v_1(t) = \frac{1}{\tau(t)} \int_{t-\tau(t)}^t x(s) ds, \quad v_2(t) = \frac{1}{d-\tau(t)} \int_{t-d}^{t-\tau(t)} x(s) ds,$$

e computando a derivada temporal de (16), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t, \dot{x}_t, t) &= \xi^\top(t) (F_0^\top P F_1(\tau) + F_1(\tau)^\top P F_0) \xi(t) \\ &\quad + x^\top(t) Q x(t) - x^\top(t-d) Q x(t-d) \\ &\quad + d^2 \dot{x}^\top(t) R \dot{x}(t) - d \int_{t-d}^t \dot{x}^\top(s) R \dot{x}(s) ds, \end{aligned}$$

com  $F_0$  e  $F_1(\tau)$  em (15). De acordo com a desigualdade de Wirtinger (Seuret and Gouaisbaut, 2013), tem-se que

$$-d \int_{t-d}^t \dot{x}^\top(s) R \dot{x}(s) ds \leq -\xi^\top(t) \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \frac{d}{d-\tau(t)} \mathcal{R} & 0 \\ 0 & \frac{d}{\tau(t)} \mathcal{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \xi(t), \quad (18)$$

sendo  $\mathcal{R} = \text{diag}(R, 3R)$ . Além disso, aplicando o Lema da reciprocidade convexa dependente do retardo (Seuret and Gouaisbaut, 2018), e considerando  $\varrho(t) = \tau(t)/d$ ,  $X_1 = \mathcal{R} - Y_1 \mathcal{R}^{-1} Y_1^\top$  e  $X_2 = \mathcal{R} - Y_2^\top \mathcal{R}^{-1} Y_2$ , (18) implica

$$-d \int_{t-d}^t \dot{x}^\top(s) R \dot{x}(s) ds \leq -\xi^\top(t) \mathcal{F}^\top (\Phi(\tau) - \Phi_0(\tau)) \mathcal{F} \xi(t), \quad (19)$$

$$\text{sendo } \Phi(\tau) = \begin{bmatrix} \mathcal{R} & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{bmatrix} + \frac{d-\tau}{d} \begin{bmatrix} \mathcal{R} & Y_2 \\ Y_2^\top & 0 \end{bmatrix} + \frac{\tau}{d} \begin{bmatrix} 0 & Y_1 \\ Y_1^\top & \mathcal{R} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\Phi_0(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{d-\tau}{d} Y_1 \mathcal{R}^{-1} Y_1^\top & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{d} Y_2^\top \mathcal{R}^{-1} Y_2 \end{bmatrix}.$$

De acordo com a Hipótese 2, tem-se

$$\xi^\top(t) [v_8^\top v_8 - (v_3 + v_7)^\top G^\top G (v_3 + v_7)] \xi(t) \leq 0, \quad (20)$$

e, de acordo o ETM periódico (7)–(8), tem-se

$$\xi^\top(t) (\sigma v_3^\top \Omega v_3 - v_7^\top \Omega v_7) \xi(t) \geq 0. \quad (21)$$

Considerando (19), (20) e (21), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t, \dot{x}_t, t) &\leq \xi^\top(t) (F_0^\top P F_1(\tau) + F_1(\tau)^\top P F_0) \xi(t) \\ &\quad + \xi^\top(t) \Pi \xi(t) - \xi^\top(t) \mathcal{F}^\top (\Phi(\tau) - \Phi_0(\tau)) \mathcal{F} \xi(t) \\ &\quad + \xi^\top(t) (v_3 + v_7)^\top G^\top G (v_3 + v_7) \xi(t), \end{aligned} \quad (22)$$

com  $\Pi = \text{diag}(d^2 R, Q, \sigma \Omega, -Q, 0_{2n}, -\Omega, -I_n)$ . Definindo

$$\mathcal{B}(\alpha, \beta) = -v_1 + A(\alpha)v_2 + \beta B(\alpha)K(\alpha)v_8 + (1-\beta)B(\alpha)K(\alpha)(v_3 + v_7),$$

é possível verificar, a partir de (13), que  $\mathcal{B}(\alpha(t), \beta(t_k h)) \xi(t) = 0$ . Como  $E[\beta(t) - \bar{\beta}] = 0$ , tem-se também  $E[\mathcal{B}(\alpha(t), \bar{\beta}) \xi(t)] = 0$  e, conseqüentemente,  $\int_{t_0}^t E[\mathcal{B}(\alpha(s), \bar{\beta}) \xi(s)] ds = 0$ , para  $t > t_0$ . Dado isso, aplicando o Lema de Finsler generalizado (Chen et al., 2010) considerando (22), tem-se que se a condição

$$\text{He}[F_0^\top P F_1(\tau) + (v_1 + \eta v_2 + v_3)^\top X^{-\top} \mathcal{B}(\alpha, \bar{\beta})] + \Pi - \mathcal{F}^\top (\Phi(\tau) - \Phi_0(\tau)) \mathcal{F} + (v_3 + v_7)^\top G^\top G (v_3 + v_7) < 0, \quad (23)$$

é satisfeita, então  $E[\dot{V}(x_t, \dot{x}_t, t)] < 0$ . Aplicando complemento de Schur, considerando a relação afim em  $\tau$ , e definindo  $\Psi(\alpha, \tau) = \text{He}[F_0^\top P F_1(\tau) + \Upsilon(\alpha)] + \Pi$ ,  $\Lambda = G(v_3 + v_7)$ , e  $\Upsilon(\alpha) = (v_1 X^{-1} + \eta v_2 X^{-1} + v_3 X^{-1})^\top \mathcal{B}(\alpha, \bar{\beta})$ , a condição (23) é satisfeita se

$$\begin{bmatrix} \Psi(\alpha, 0) - \mathcal{F}^\top \Phi(0) \mathcal{F} & \star & \star \\ [Y_1^\top \ 0] \mathcal{F} & -\mathcal{R} & \star \\ \Lambda & 0_{n \times 2n} & -I_n \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi(\alpha, d) - \mathcal{F}^\top \Phi(d) \mathcal{F} & \star & \star \\ [0 \ Y_2] \mathcal{F} & -\mathcal{R} & \star \\ \Lambda & 0_{n \times 2n} & -I_n \end{bmatrix} < 0,$$

Multiplicando as desigualdades em (24) por  $\text{diag}(I_7 \otimes X^\top, I_n, I_3 \otimes X^\top)$  à esquerda e por sua transposta à direita e levando em conta a convexidade dos parâmetros em (3), é possível mostrar pelo Lema de Wang et al. (1996) que as condições em (15) são suficientes para garantir (24). Logo, se as condições em (14) e (15) são satisfeitas, então a origem do sistema em malha fechada (13) equipado com o ETM (7), com a função (8), é assintoticamente estável em média quadrática. Isso conclui a prova.

#### 4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção, um exemplo é apresentado para ilustrar a eficácia da condição de *codesign* dependente do retardo proposta para sistemas LPV sob ataques deceptivos estocásticos e retardos induzidos pela rede<sup>1</sup>.

Considere o sistema massa-mola retirado de Wie and Bernstein (1992) apresentado na Figura 2. Este sistema

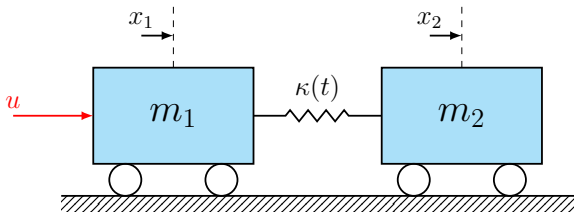


Figura 2. Sistema massa-mola acoplado.

pode ser escrito em espaço de estados da forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa(t)}{m_1} & \frac{\kappa(t)}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa(t)}{m_2} & -\frac{\kappa(t)}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (25)$$

sendo  $x_1$  e  $x_2$  as posições das massas  $m_1$  e  $m_2$ , e  $x_3$  e  $x_4$  as suas velocidades, respectivamente. Além disso, considera-se que o parâmetro  $\kappa(t)$  que representa as características da mola, é limitado e variante no tempo, ou seja,  $\kappa(t) \in [\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$ , com  $\kappa_{\min} = 1$  e  $\kappa_{\max} = 5$ . Considerando  $m_1 = m_2 = 1$  e tomando os valores mínimo e máximo de  $\kappa(t)$ , pode-se obter um sistema LPV com dois vértices. As matrizes e parâmetros são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1(t) = \frac{\kappa(t) - \kappa_{\min}}{\kappa_{\max} - \kappa_{\min}}, \alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t).$$

Para mostrar a eficácia da abordagem proposta, dois casos de estudo são considerados.

- Caso 1. Este caso visa avaliar o conservadorismo da condição proposta no Teorema 6 quando comparada a (Liu et al., 2021, Corolário 2). Para isso, considera-se  $\kappa(t) = \kappa_{\min} = 1$ , visto que a abordagem proposta em (Liu et al., 2021) não é capaz de lidar com sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo.

Neste caso, considerou-se  $G = \text{diag}(0,3; 0,4; 0,2; 0,1)$  e  $d = h + \bar{\tau} = 0,1$ . A condição apresentada em (Liu et al.,

<sup>1</sup> As rotinas foram implementadas em Matlab utilizando Yalmip e o resolvidor Mosek.

2021, Corollary 2) foi avaliada com  $d_M = \eta_M = d$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 1$ , e para a solução do Teorema 6, escolheu-se  $\eta = 1$ . Pode-se notar pela Tabela 1 que a abordagem proposta leva a um resultado menos conservador do que o método apresentado em (Liu et al., 2021).

Tabela 1. Máximo valor de  $\bar{\beta}$  obtido para diferentes valores de  $\sigma$  e  $d = 0,1$ .

	(Liu et al., 2021, Corolário 2)	Teorema 6
$\sigma = 0,1$	0,18	0,97
$\sigma = 0,2$	0,14	0,97
$\sigma = 0,3$	0,10	0,96

- Caso 2: Neste caso, o objetivo é projetar um controlador de ganho escalonado sob o esquema ETC periódico (7) tal que a origem do sistema LPV em malha fechada (13) seja assintoticamente estável em média quadrática sob ataques deceptivos estocásticos.

Para esse caso, escolheu-se  $G = \text{diag}(0,3; 0,3; 0,1; 0,1)$ ,  $\sigma = 0,1$ ,  $d = 0,1$  e  $\eta = 1$ . Além disso,  $\beta(t_k h)$  foi escolhido  $\bar{\beta} = 0,7$ , ou seja, há probabilidade de 70% que o sinal enviado ao controlador esteja corrompido. O Teorema 6 é usado para obter as seguintes matrizes da função de acionamento e dos ganhos

$$\Omega = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1,8356 & -1,7849 & 1,0383 & -0,4690 \\ -1,7849 & 1,7370 & -0,9833 & 0,4418 \\ 1,0383 & -0,9833 & 1,4263 & -0,7863 \\ -0,4690 & 0,4418 & -0,7863 & 0,4721 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = [-14,0643 \ 13,5534 \ -12,6560 \ 6,8806],$$

$$K_2 = [-2,1614 \ 1,6773 \ -12,4986 \ 7,0722].$$

As Figuras 3(a) e 3(b) apresentam, respectivamente, as trajetórias dos estados e do sinal de controle do sistema em malha fechada para a condição inicial  $x(0) = [0,5; 0,75; -0,5; -0,25]^\top$ , e a Figura 3(c) ilustra o tempo entre eventos. Nessas figuras, os intervalos de tempo em que o sistema está sob ataque deceptivo são dados na cor cinza. A simulação foi realizada considerando o retardo induzido e sinais de ataque definidos como

$$\tau_k = \frac{\bar{\tau}}{2} (1 + \cos(0,25\pi t_k h)), g(t, x(t)) = \begin{bmatrix} \tanh(0,3x_1(t)) \\ \tanh(0,3x_2(t)) \\ \tanh(0,1x_3(t)) \\ \tanh(0,1x_4(t)) \end{bmatrix}.$$

Note que a abordagem proposta estabiliza o sistema em malha fechada mesmo sob ataque deceptivo e com retardo induzido pela rede.

#### 5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma abordagem de controle em rede para sistemas LPV sujeitos a ataques deceptivos estocásticos e retardos induzidos pela rede. Novas condições de *codesign* baseadas em LMIs foram apresentadas para projetar o controlador com ganho escalonado e o mecanismo estático e periódico de acionamento por eventos que garantem a estabilidade assintótica em média quadrática do sistema em malha fechada. Simulações numéricas ilustraram a eficácia do método proposto.

#### REFERÊNCIAS

- Ban, J., Seo, M., Goh, T., Jeong, H., and Kim, S.W. (2020). Improved co-design of event-triggered dynamic

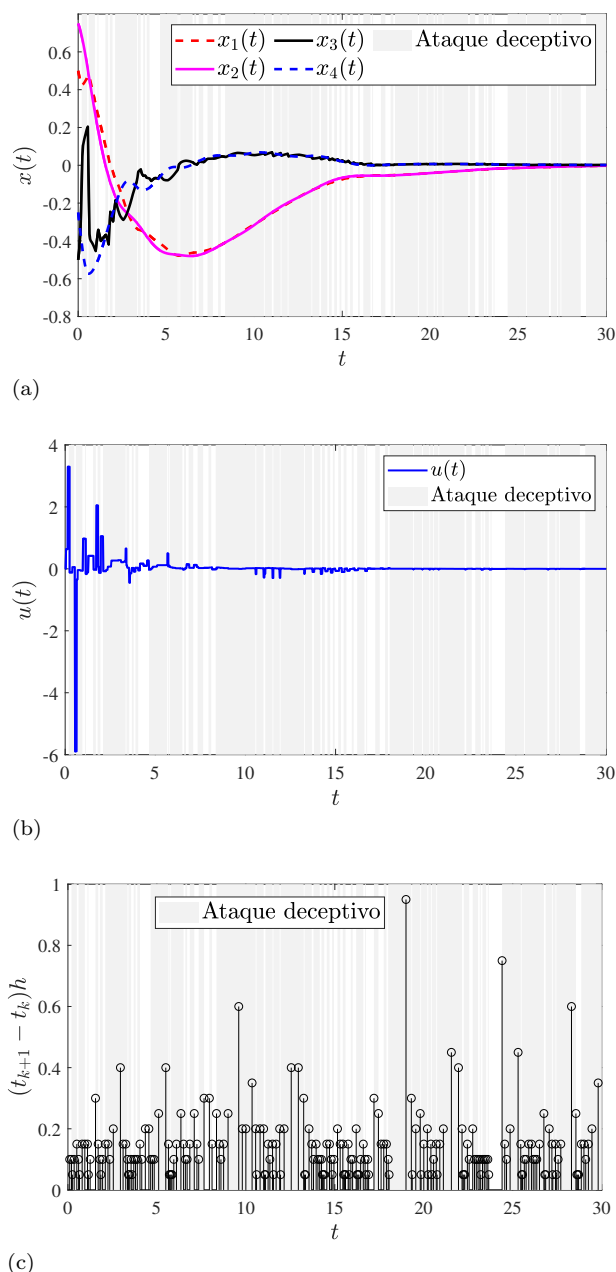


Figura 3. Evolução temporal (a) das trajetórias dos estados, (b) do sinal de controle e (c) do tempo entre eventos do sistema (25). Os instantes de tempo (intervalos) quando o sistema está sob ataque estão representados na cor cinza.

output feedback controllers for linear systems. *Automatica*, 111, 108600.

Cao, J., Da Ding, Liu, J., Tian, E., Hu, S., and Xie, X. (2021). Hybrid-triggered-based security controller design for networked control system under multiple cyber attacks. *Inf. Sci.*, 548, 69–84.

Chen, Y., Zheng, W.X., and Xue, A. (2010). A new result on stability analysis for stochastic neutral systems. *Automatica*, 46(12), 2100–2104.

Coutinho, P.H.S., Peixoto, M.L.C., Bessa, I., and Palhares, R.M. (2022). Dynamic Event-Triggered Gain-Scheduling Control of Discrete-Time quasi-LPV System. *Automatica*, 141, 110292.

Coutinho, P.H.S. and Palhares, R.M. (2021). Dynamic periodic event-triggered gain-scheduling control co-design for quasi-LPV systems. *Nonlinear Anal.: Hybrid Syst.*, 41, 101044.

Coutinho, P.H.S. and Palhares, R.M. (2022). Co-design of dynamic event-triggered gain-scheduling control for a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 67(8), 4186–4193.

Ding, D., Wang, Z., Han, Q.L., and Wei, G. (2018). Security control for discrete-time stochastic nonlinear systems subject to deception attacks. *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern. Syst.*, 48(5), 779–789.

Ghodrat, M. and Marquez, H.J. (2020). On the event-triggered controller design. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 65(10), 4122–4137.

Liu, J., Wu, Z.G., Yue, D., and Park, J.H. (2021). Stabilization of Networked Control Systems with Hybrid-Driven Mechanism and Probabilistic Cyber Attacks. *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern. Syst.*, 51(2), 943–953.

Peng, C. and Li, F. (2018). A survey on recent advances in event-triggered communication and control. *Inf. Sci.*, 457–458, 113–125.

Persis, C.D. and Tesi, P. (2016). Networked control of nonlinear systems under denial-of-service. *Syst. Control Lett.*, 96, 124–131.

Pessim, P.S.P., Peixoto, M.L.C., Palhares, R.M., and Lacerda, M.J. (2021). Static output-feedback control for cyber-physical LPV systems under DoS attacks. *Inf. Sci.*, 563, 241–255.

Rotondo, D., Sánchez, H.S., Puig, V., Escobet, T., and Quevedo, J. (2019). A virtual actuator approach for the secure control of networked LPV systems under pulse-width modulated DoS attacks. *Neurocomputing*, 365, 21–30.

Seuret, A. and Gouaisbaut, F. (2013). Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems. *Automatica*, 49(9), 2860–2866.

Seuret, A. and Gouaisbaut, F. (2018). Stability of Linear Systems With Time-Varying Delays Using Bessel-Legendre Inequalities. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 63(1), 225–232.

Teixeira, A., Shames, I., Sandberg, H., and Johansson, K.H. (2015). A secure control framework for resource-limited adversaries. *Automatica*, 51, 135–148.

Wang, H.O., Tanaka, K., and Griffin, M.F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 4(1), 14–23.

Wie, B. and Bernstein, D.S. (1992). Benchmark problems for robust control design. *J. Guid. Control Dyn.*, 15(5), 1057–1059.

Yue, D., Tian, E., and Han, Q.L. (2013). A delay system method for designing event-triggered controllers of networked control systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 58(2), 475–481.

Zhang, H., Hu, J., Liu, G.P., and Yu, X. (2022). Event-triggered secure control of discrete systems under cyber-attacks using an observer-based sliding mode strategy. *Inf. Sci.*, 587, 587–606.

Zhang, Z., Liang, H., Wu, C., and Ahn, C.K. (2019). Adaptive event-triggered output feedback fuzzy control for nonlinear networked systems with packet dropouts and actuator failure. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 27(9), 1793–1806.