

Identificação usando método não linear de um sistema de posicionamento

Antonio Weiller Corrêa do Lago* Lucas Castro Sousa*
Felipe Rebelo Lopes* Daniel Henrique Braz de Sousa*
Helon Vicente Hultmann Ayala* Marco Antonio Meggiolaro*

* Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, RJ, Brasil,
(e-mails: tottilago@gmail.com, lucascastro.mec@gmail.com,
felipelopes_9@hotmail.com, braz2012@gmail.com,
helon@puc-rio.br, meggi@puc-rio.br).

Abstract: Friction is one of the main challenges in robotics, specifically in robot manipulators, affecting the lifetime and performance of the system. The presence of complex and non-linear aspects in this phenomenon makes its modelling challenging to conceive. We present an original experimental bench composed of an motor and a link joined by a rigid joint. We seek to find the friction model that best represents the developed servosystem through experimental measurements. Thus, the Gray Box type identification process is used to optimize the different parameters of the friction models. The parameters of the different friction models are identified using the Shooting Method through the data. Then the different models are compared. We observed that the models that consider the most significant number of friction phenomena perform better.

Resumo: O atrito é um dos principais desafios na área de robótica, mais especificamente em robôs manipuladores, afetando a duração de vida e a performance do sistema. A presença de aspectos complexos e não lineares neste fenômeno torna sua modelagem de difícil concepção. Neste trabalho apresentamos uma bancada experimental original composta de um motor e de um elo unidos por uma junta rígida. Por meio de medições experimentais busca-se encontrar o modelo de atrito que melhor represente o servossistema desenvolvido. Assim, o processo de identificação do tipo caixa-cinza é utilizado para otimizar os diferentes parâmetros dos modelos de atrito. Através dos dados são identificados os parâmetros dos diferentes modelos de atrito usando o método de shooting. Em seguida os diferentes modelos são comparados. Observamos que os modelos que consideram o maior número de fenômenos do atrito têm uma melhor performance.

Keywords: Friction Models; System Identification; Gray Box modeling; Servosystem; Robotic system

Palavras-chaves: Modelos de atrito; Identificação de sistemas; Modelagem caixa-cinza; Servossistemas; Sistemas robóticos

1. INTRODUÇÃO

Com os avanços tecnológicos dos últimos anos, servossistemas de alta-precisão com juntas flexíveis têm sido extensivamente utilizados em múltiplas áreas, em especial na área da robótica. No entanto, importantes características que afetam a precisão de sistemas de controle, como flexibilidade das juntas, atrito e incertezas de modelagem (Wang et al., 2020) ainda requerem atenção de pesquisadores. Dentre estes fatores, o atrito se destaca pois pode ocasionar danos e afetar diretamente o desempenho do sistema. O atrito é um fenômeno não-linear complexo que está presente em sistemas dinâmicos com movimento relativo entre seus componentes (Worden et al., 2007). Basicamente, o atrito ou fricção possui características delimitadas por dois regimes de trabalho, o regime de pré-deslizamento e o regime de deslizamento (Casanova, 2007). No pré-deslizamento, a fricção é caracterizada pela deformação

elasto-plástica das asperezas devido ao deslocamento entre as superfícies. No regime de deslizamento, a força depende principalmente da velocidade, devido a resistência das asperezas (Worden et al., 2007). Sua complexidade e não linearidade é atribuída a quantidade de dependências que a influenciam a força: condições e parâmetros físicos (Pennestrì et al., 2015).

Estudos detalhados sobre diferentes características e modelos de fricção podem ser identificados na literatura (Armstrong-Helouvry et al., 1994; Olsson et al., 1998). Dahl (1968) propôs um modelo baseado no proposto por Coulomb (1809) adicionando o comportamento que ocorre microscopicamente entre as superfícies no regime de pré-deslizamento, este modelo foi em seguida estudado por Haessing e Friedland (1991), chamado de Bristle Model. O modelo de LuGre (Canudas-De-Wit et al., 1995) propõe uma extensão do trabalho feito por Dahl (1968), incluindo

os efeitos de *Stribeck*, histerese, *Stick-Slip*, ciclos-limites, e o aumento de atrito estático (Wang, 2020).

Segundo Olsson et al. (1998), o estudo de atrito tem tido um ressurgimento importante nos últimos anos graças aos avanços tecnológicos permitindo o uso de novas ferramentas de medida. Usando dados medidos em função do tempo é possível construir os modelos de atrito com o objetivo de implementar um controle baseado em modelos (Wang, 2020). Esta área de trabalho denominada de Identificação de sistemas. Os métodos de identificação de sistemas dinâmicos são diferenciados pela quantidade de conhecimento referente à física do problema: modelos de caixa-branca, caixa-cinza e caixa-preta (Quaranta et al., 2020). O método de caixa-branca define a estrutura do modelo e seus parâmetros a partir de conhecimentos da física do problema. O método de caixa-cinza usa conhecimentos físicos e dados experimentais para determinar parâmetros desconhecidos (Sjöberg et al., 1995). Por fim, a modelagem caixa-preta considera que não há nenhum conhecimento físico anterior e há dados suficientes sobre o sistema para poder caracterizá-lo.

Na literatura, modelos de identificação dos 3 tipos foram propostos na análise de diferentes sistemas. Usando o método de tipo caixa-branca, Fujii et al. (2001) propuseram um modelo matemático para prever o comportamento da fricção em um freio de um automóvel, obtendo bons resultados. A maioria dos trabalhos aproveitam dos dados medidos (caixa-cinza e caixa-preta) para obter um modelo. Na área de automobilismo, estes métodos têm sido usados para simular os diferentes fenômenos da dinâmica (Vicente et al., 2021). Liu et al. (2006) propuseram uma metodologia utilizando algoritmos genéticos para determinar os parâmetros estáticos e dinâmicos do modelo de atrito de LuGre, obtendo resultados coerentes com os dados experimentais. Wang et al. (2016) analisaram a determinação de parâmetros de diferentes modelos de fricção, em um servo sistema com uma entrada em torque, usando algoritmos evolutivos. Sun et al. (2016) desenvolveram uma bancada experimental com o objetivo de comparar o fenômeno de atrito experimental com os modelos dinâmicos de atrito.

Este trabalho visa apresentar a identificação da dinâmica de um sistema servo mecânico e do comportamento do atrito. A partir de dados experimentais obtidos em uma bancada de testes. A principal contribuição deste artigo é o uso de medidas feitas em uma bancada de testes original, através das quais será feita uma análise de diferentes modelos de atrito para encontrar o modelo de melhor representante a fricção de uma junta rígida. Assim, a otimização dos parâmetros de cada modelo será feita usando o método de identificação de tipo caixa-cinza usando técnicas de aproximação de tipo shooting.

O artigo está dividido em 7 partes. Após uma contextualização e uma breve revisão bibliográfica na Introdução. Apresentamos, na Seção 2, o sistema servo mecânico original e a modelagem matemático utilizada para caracterizá-lo. A Seção 3, analisa o fenômeno do atrito e os diferentes modelos propostos na literatura. Em seguida, na Seção 4, a metodologia de identificação de sistema utilizada para estimar os parâmetros da fricção e modelar a bancada experimental é apresentada. A Seção 5 descreve o conjunto de dados obtido experimentalmente e define as métricas

de erro que serão utilizadas para avaliar os modelos. Na Seção 6, apresentamos os resultados da identificação e comparamos os diferentes modelos de atrito com o modelo real. Finalmente, na Seção 7 escrevemos a conclusão deste trabalho e indicamos os possíveis trabalhos futuros.

2. SISTEMA SERVO-MECÂNICO

2.1 Bancada Experimental

A bancada de testes desenvolvida na PUC-RIO, representada na Fig. 1, é um sistema de posicionamento composto de um motor DC brushless dois eixos D5065 de 270 Kv que emite um torque rotacionando o elo através da junção.

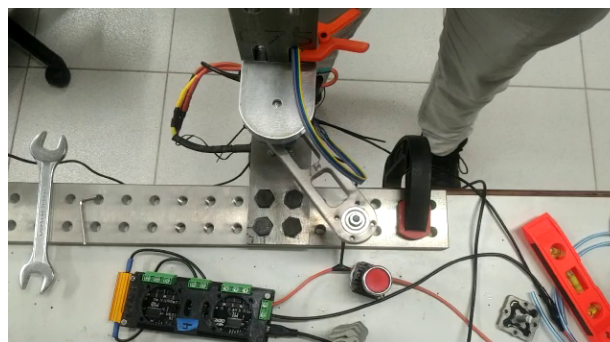


Fig. 1. Bancada Experimental do Sistema de Posicionamento

O torque varia nos dois sentidos com amplitudes e frequências controladas. O motor é equipado com um sensor AMT102-V com 8192 ciclos por revolução capaz de medir a posição do elo e estimar a velocidade a partir de um estimador de estados. Através de algoritmos escritos em Python, o controle é feito por uma placa controladora ODrive V3.6 conectada a um PC via porta USB.

2.2 Modelagem Matemática

A Fig. 2, apresenta um diagrama da bancada de teste. Um motor transmite um torque a junção que movimento o elo. A Equação (1) define o modelo dinâmico do sistema de posicionamento.

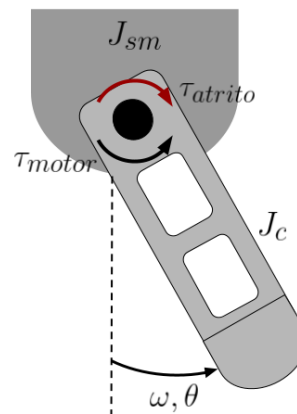


Fig. 2. Diagrama do Sistema de Posicionamento

$$J\dot{\omega} + \tau_{atrito}(\omega) = \tau_{motor} \quad (1)$$

onde $\dot{\omega}$, ω são respectivamente a aceleração, velocidade angular na junta; τ_{motor} é o torque/força na junta; J é a soma dos momentos de inércia do sistema incluindo o momento de inércia do servomotor (J_{sm}) e da carga (J_s) e τ_{atrito} torque de atrito que depende da velocidade e/ou do posicionamento dependendo do modelo de atrito empregado.

3. MODELOS DE ATRITO

3.1 Modelo Linear

O modelo linear é a representação mais simples do atrito e considera somente o atrito viscoso. Este método não considera os múltiplos fenômenos que influenciam a fricção. Assim, podemos considerar a força de atrito linearmente proporcional à velocidade relativa dada em (2), onde v é a velocidade relativa entre as duas superfícies, f_v o coeficiente de atrito viscoso, e a força de atrito por τ_{atrito} .

$$\tau_{atrito} = f_v v \quad (2)$$

3.2 Modelo de Coulomb

O modelo de Coulomb foi desenvolvido em 1785, e é considerado um dos primeiros modelos de atrito. Pressupondo que existe uma força que se opõe ao movimento relativo entre duas superfícies. Sua análise é limitada, considerando que o atrito depende somente da rugosidade das superfícies e não da velocidade e da área de contato.

Este modelo considera dois tipos de atritos, o atrito seco quando a velocidade é nula, definido pelo coeficiente estático de atrito μ_e . Quando as superfícies estão em movimento entre eles, consideramos outro coeficiente μ_d representando as características dinâmicas do atrito. A Equação (3), apresenta o modelo de Coulomb:

$$\tau_{atrito} = \begin{cases} \leq \mu_e F_n & v = 0 \\ -\mu_d F_n \text{sgn}(v) & v \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

onde v é a velocidade relativa e F_n a força normal. Para facilitar o uso do modelo, omitimos a força normal F_n substituído por $f_d = \mu_d F_n$ e desconsideramos a força de atrito estático. Logo obtemos:

$$\tau_{atrito} = -f_d \text{sgn}(v) \quad (4)$$

Este modelo pode ser complementado adicionando a influência do atrito viscoso, apresentado na Seção 3.1, para considerar a influência da velocidade. O efeito Stribeck, é outra complementação importante, este considera que no início do regime de deslizamento, em baixas velocidades, ocorre uma redução do atrito com o aumento da velocidade (Casanova, 2007). Este fenômeno é caracterizado em (5), abaixo:

$$g(v) = f_c + (f_s - f_c)e^{(v/v_{Stribeck})^a} \quad (5)$$

onde o coeficiente de Coulomb é representado por f_c , o atrito estático por f_s e introduz uma velocidade limite, denominada de velocidade de *Stribeck*, $v_{Stribeck}$. Muvengui (2012) considera que $a = 2$ é um valor apropriado para o modelo. Com isso obtemos em (5) um modelo de atrito mais realista dentre os modelos clássicos.

$$\tau_{atrito} = -f_v v - \left[f_c + (f_s - f_c)e^{(v/v_{Stribeck})^2} \right] \text{sgn}(v) \quad (6)$$

3.3 Modelo de Dahl

Em Dahl (1968), o autor introduz o seu modelo de atrito a partir de experimentos que reúne o atrito de Coulomb com o atraso devido ao atrito no regime de pré-deslizamento. No pré-deslizamento as forças do atrito dependem principalmente do deslocamento. Segundo Casanova (2007), "Isto porque as junções formadas pelo contato entre duas superfícies deformam-se elasto-plasticamente comportando-se como molas não-lineares".

A análise de Dahl inicia usando a curva tensão-deformação, quando submetido a tensão a força de atrito aumenta gradualmente até que ocorra ruptura (Canudas de Wit et al., 1995). Modelando a curva tensão-deformação por uma equação diferencial (7) onde o deslocamento é definido por x , a torque de atrito τ_{atrito} , e a força de atrito de Coulomb f_c :

$$\frac{\tau_{atrito}}{dx} = \sigma_0 \left(1 - \frac{\tau_{atrito}}{f_c} \text{sgn}(v) \right)^\alpha \quad (7)$$

onde σ_0 é o coeficiente de rigidez, α é o parâmetro que caracteriza a forma da curva de atrito pelo deslocamento. Segundo Olsson et al. (1998), normalmente $\sigma = 1$ é utilizado. Uma nova variável de estado é introduzida z que representa o deslocamento na zona de pré-deslizamento, o atrito é então definido em (8):

$$\tau_{atrito} = \sigma_0 z \quad (8)$$

Considerando $dx = v dt$ e conhecendo F pode-se substituir em (8) obtém-se:

$$\frac{dz}{dt} = v \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{f_c} \text{sgn}(v) \right)^\alpha \quad (9)$$

3.4 Modelo de LuGre

O modelo de atrito de LuGre é uma extensão do modelo de Dahl. Proposto por Canudas de Wit et al. (1995), este modelo consegue descrever de forma mais precisa as características estáticas e dinâmicas do atrito, incluindo o efeito de stick slip, limit cycle oscillation, pré-deslizamento, friction memory, aumento de fricção estática e a curva estática de Stribeck (Liu, 2006).

Segundo Casanova (2007), quando analisamos as superfícies, sob o ponto de vista microscópica, o contato é efetuado através de asperezas. Logo Haessig e Friedland (1990) desenvolvem um modelo que represente este comportamento chamado de Bristle Model. Modelando o contato entre as superfícies por hastes flexíveis (Fig.3). Quando as superfícies se deslocam uma em relação a outra, os esforços aumentam as hastes se comportam como molas e geram uma força de atrito (Olsson et al., 1998).

Na Fig. 3 é introduzido z uma variável de estado que modela a deflexão medias das hastes. Lund e Grenoble (1995), propõem (10):

$$\tau_{atrito} = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad (10)$$

onde σ_0 representa o coeficiente de rigidez das deformações microscópicas de z , σ_1 o coeficiente de amortecimento de, σ_2 o termo de atrito viscoso. Definindo dz/dt , por (11):

$$\frac{dz}{dt} = v \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{g(v)} \text{sgn}(v) \right) \quad (11)$$

onde $g(v)$ representa a aproximação do efeito de *Stribeck*, definido anteriormente:

$$g(v) = f_c + (f_s - f_c)e^{(v/v_{Stribeck})^\alpha} \quad (12)$$

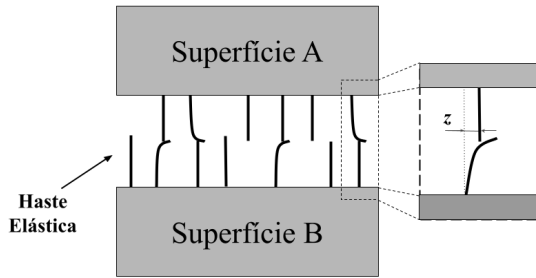


Fig. 3. Comportamento das hastes nas superfícies

4. IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

A dinâmica do sistema mecânico é apresentada na Seção 2.2, este pode ser apresentado no formato de equações diferenciais ordinárias (EDO), com as variáveis de estado θ e ω . Para os modelos de atrito com somente duas variáveis de estado é usado (13).

$$\begin{cases} \omega = \dot{\theta} \\ \dot{\omega} = \frac{\tau_{motor} - \tau_{atrito}(\omega)}{J} \end{cases} \quad (13)$$

No caso dos modelos de Dahl e LuGre, a variável de estado do deslocamento médio das hastes z deve ser introduzida, esta é dada respectivamente por (9) e (11).

Neste trabalho o problema de otimização é resolvido através da ferramenta fonte aberta “*CasADi*” no *MATLAB* (Andersson et al., 2006). É utilizado o método de *shooting method* para resolver as equações diferenciais ordinárias (EDO). Este método transforma o problema de valor sobre o contorno em um problema de valor inicial, testando os múltiplos valores dos parâmetros até atingir uma solução satisfatória. Através de conhecimentos prévios sobre o servossistema e da literatura pode-se definir intervalos de limites de buscas dos parâmetros. devem ser definidos para que possa ser feita a integração e os chutes. O integrador escolhido é o integrador *Runge Kutta* de 4ª ordem de passo fixo.

5. DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

Nesta Seção, apresentamos inicialmente o conjunto de dados utilizado nas diferentes análises dinâmicas e as diferentes métricas para medir o desempenho do modelo.

5.1 Descrição do Conjunto de Dados

Através do uso de sensores e medidores, na bancada de testes apresentada na Seção 2.1, foram obtidos os diferentes dados necessários para efetuar a identificação dos parâmetros.

A entrada do sistema é o torque transmitido ao elo, definido por τ_{atrito} . Através dos dados de entrada deseja-se obter um modelo dinâmico que estime os dados de saída

do sistema: a velocidade na junção ω e a posição θ . O conjunto de dados tem uma duração de aproximadamente 20 segundos com uma frequência de medida de 130 Hz. O torque transmitido oscila entre 0,07 N·m e -0,07 N·m.

5.2 Métricas de Erro

Diferentes métricas são utilizadas para analisar as diferenças entre os modelos de atrito e os dados experimentais. As equações abaixo apresentam os diferentes erros calculados, comparando os dados experimentais y_j , os dados simulados \hat{y}_j . A Equação (14), apresenta a fórmula do erro quadrático médio também chamado de RMSE.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2} \quad (14)$$

A Equação (15), apresenta o erro médio absoluto (MAE).

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |y_j - \hat{y}_j| \quad (15)$$

A Equação (16) define o coeficiente de determinação, também chamado de R^2 .

$$R^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2}{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y}_j)^2} \quad (16)$$

6. RESULTADOS

Nesta Seção analisa-se os resultados dos diferentes modelos utilizados para caracterizar a dinâmica do servossistema mecânico. Os diferentes parâmetros dos modelos de atrito apresentados na Seção 3, são identificados usando o método de shooting method. Para melhorar a identificação dos parâmetros normaliza-se os dados experimentais usando o método Min-Max. Os resultados de cada métodos são comparados com os dados experimentais. O desempenho da identificação dos parâmetros pode ser afetada, pelas escolhas de intervalos de buscas. A Tabela 1 define os limites de buscas utilizados para os diferentes parâmetros dos modelos de atrito a serem estimados.

Tabela 1. Limites de Busca.

Parâmetro	Descrição	Limite Inferior	Limite Superior
J	Momento de Inercia	0	1×10^{-2}
f_v	Atrito Viscoso	0	1×10^{-2}
f_c	Atrito de Coulomb	0	1×10^{-1}
f_s	Atrito Estático	0	1×10^{-2}
σ_0	Coefficiente de Rigidez	0	10
σ_1	Coefficiente de Amortecimento	0	1×10^{-1}
σ_2	Coefficiente de Atrito Viscoso	0	1×10^{-1}
$v_{Stribeck}$	Velocidade de Stribeck	0	1×10^{-2}
Offset	-	-1×10^{-1}	1×10^{-1}

6.1 Modelo Linear

O modelo linear, apresentado na Seção 2.1 considera somente o atrito viscoso. Logo espera-se que não caracterize de uma forma realista o atrito. Os parâmetros a serem estimados são o momento de inercia do sistema, e o torque de atrito. A Tabela 2 apresenta os valores obtidos.

Tabela 2. Parâmetros estimados do modelo Linear.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
J	Momento de Inercia	0,0015	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
f_v	Atrito Viscoso	0,0058	$\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$

A Fig. 4 compara a velocidade medida (linha preta) e a velocidade simulada usando os parâmetros estimados (linha vermelha). Devido a simplicidade do modelo, a velocidade simulada não caracteriza idealmente o sistema mecânico. Observa-se através dos gráficos (Fig. 4 - Fig. 5) que o maior erro ocorre entre $t = [0,8]$ segundos. Observa-se que a amplitude da velocidade não está corretamente representada. Após este período, o erro estabiliza e se mantém entre o intervalo $[-1, 2.5]$ rad/s. Analisando as diferentes métricas

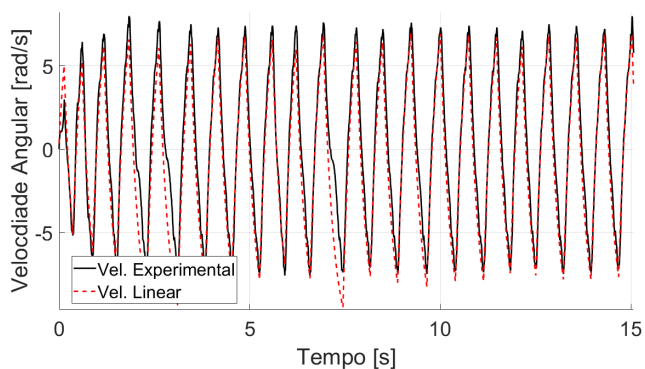


Fig. 4. Gráfico da velocidade experimental comparada com a velocidade obtida usando o modelo Linear.

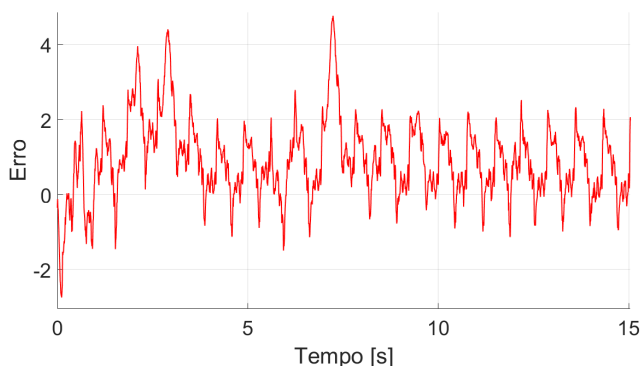


Fig. 5. Gráfico do erro entre a velocidade experimental e a velocidade obtida usando o modelo Linear.

de erro, observa-se através do $\text{RMSE} = 1,2863 \text{ rad/s}$ e do $\text{MAE} = 1,0038 \text{ rad/s}$ que as diferenças entre as velocidades experimentais e simuladas são importantes. Isto é esperado devido ao fato de o modelo possuir um menor grau de complexidade.

6.2 Modelo de Coulomb

O modelo de Coulomb com o acréscimo do efeito de Stribeck, apresentado na Seção 2.2, considera mais fenômenos da fricção. Com isso, um maior número de parâmetros deve ser estimado, podendo afetar a performance da otimização. A Tabela 3, apresenta os resultados do modelo.

Ao comparar a trajetória da velocidade simulada (linha vermelha) com a velocidade medida na Fig. 6. Observa-

Tabela 3. Parâmetros estimados do modelo Coulomb.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
J	Momento de Inercia	0,0015	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
f_v	Atrito Viscoso	0,0058	$\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$
f_c	Atrito de Coulomb	0,0022	$\text{N}\cdot\text{m}$
f_s	Atrito Estático	0,0040	$\text{N}\cdot\text{m}$
v_{Stribeck}	Velocidade de Stribeck	0,0015	rad/s
Offset	-	-0,0050	rad/s

se que os resultados obtidos são melhores do que os do modelo de atrito Linear. Ao analisar a Fig. 5, percebe-se que o erro no período $t = [0, 8]$ segundos, constatado na Seção anterior se repete. Após este período inicial, o sistema estabiliza e mantém uma dinâmica consistente, e a diferença é contida entre $1,5$ e $-1,5 \text{ rad/s}$.

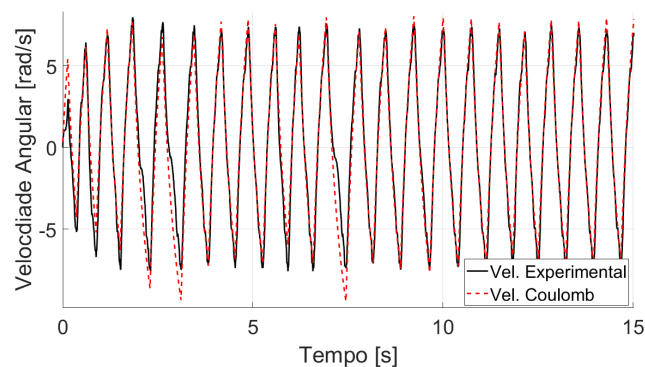


Fig. 6. Gráfico da velocidade experimental comparada com a velocidade obtida usando o modelo de Coulomb.

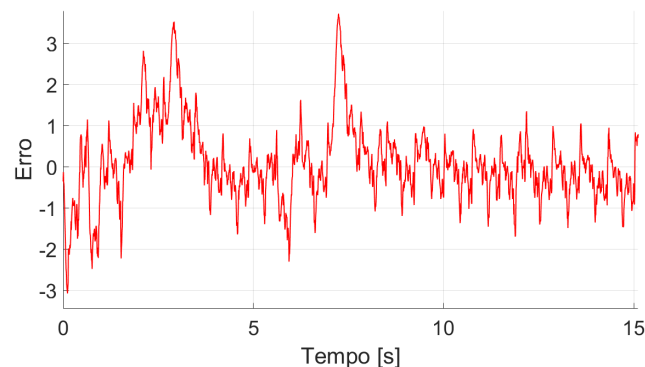


Fig. 7. Gráfico do erro entre a velocidade experimental e a velocidade obtida usando o modelo de Coulomb.

As seguintes métricas de erro são obtidas através do modelo de Coulomb + Stribeck, $\text{RMSE} = 0,8650 \text{ rad/s}$; $\text{MAE} = 0,6161 \text{ rad/s}$. Ao comparar com os valores do modelo linear observa-se que há uma redução significativa do erro confirmando as observações feitas através da análise gráfica. Este modelo tem uma atuação mais próxima da real.

6.3 Modelo de Dahl

O modelo de Dahl introduz uma nova variável de estado z que representa a deflexão média das hastas. Considera-se também um offset, ou seja, um compensador do torque de entrada. Os parâmetros estimados são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4. Parâmetros estimados do modelo de Dahl.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
J	Momento de Inercia	0,0016	kg·m ²
f_c	Atrito de Coulomb	4,5649	N·m/rad
σ_0	Coefficiente de Rigidez	0,0040	N·m
Offset	-	-0,0048	rad/s

Ao analisar o gráfico na Fig. 8, as trajetórias das velocidades simuladas e medidas são próximas. A complexidade da otimização é mais importante ao adicionar uma nova variável de estado. Observa-se os picos de erro presente no início do movimento do sistema mecânico, presente em todos os modelos anteriores. Mas após este período, pode-se concluir graficamente (Fig. 9) que a diferença se mantém entre -2 e 1,5 rad/s, oferecendo um desempenho similar ao modelo de Coulomb.

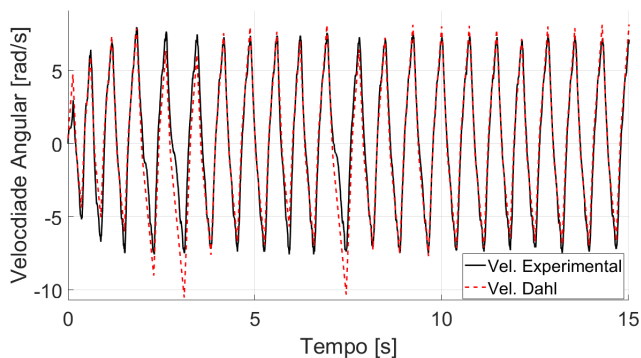


Fig. 8. Gráfico da velocidade experimental comparada com a velocidade obtida usando o modelo de Dahl.

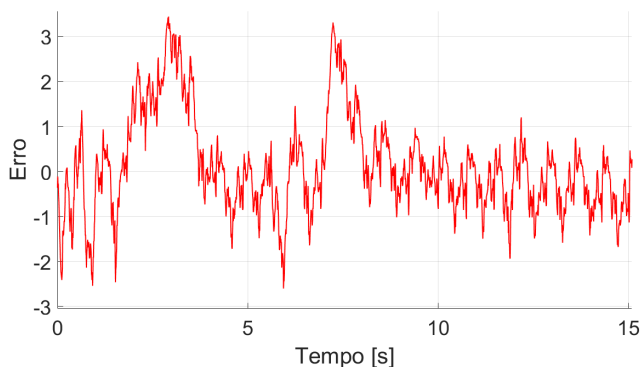


Fig. 9. Gráfico do erro entre a velocidade experimental e a velocidade obtida usando o modelo de Dahl.

As métricas de erro confirmam a observação feita graficamente (RMSE = 0,9974 rad/s; MAE = 0,7372 rad/s) os resultados dos diferentes métodos de erros são maiores que os do modelo de Coulomb + *Striebeck*. Esta diferença pode ser justificada por não considerar diferentes fenômenos do atrito que incluem o efeito *Stick-Slip*, além de desconsiderar o efeito *Striebeck*.

6.4 Modelo de LuGre

O modelo de LuGre, dentre os modelos apresentados, é o modelo que abrange o maior número de fenômenos da

fricção. Com isso, espera-se que seja o modelo que melhor represente o sistema de posicionamento. Dito isso, é um modelo com um número importante de parâmetros, e uma variável de estado adicional, a mesma do modelo de Dahl. Estes fatores podem afetar a eficiência do processo de otimização. A Tabela 5, apresenta os parâmetros do modelo de atrito e os valores obtidos através do procedimento de otimização.

Tabela 5. Parâmetros do modelo de LuGre.

Parâmetro	Descrição	Limite Inferior	Limite Superior
J	Momento de Inercia	0,0016	kg·m ²
f_c	Atrito de Coulomb	0,0064	N·m
f_s	Atrito Estático	0,0064	N·m
σ_0	Coefficiente de Rigidez	3,1166	N·m/rad
σ_1	Coefficiente de Amortecimento	0,0021	N·m·s/rad
σ_2	Coefficiente de Atrito Viscoso	0,0029	N·m·s/rad
$v_{Striebeck}$	Velocidade de Striebeck	0,0010	rad/s
Offset	-	-0,0044	rad/s

Através dos gráficos (Fig. 10 – Fig. 11) observa-se que as trajetórias das velocidades experimentais e simulada são similares. Como em todos os modelos anteriores, o início do movimento do sistema de posicionamento não é bem representado. Devido a diferentes fatores, mencionados anteriormente. Após este período disruptivo, ao analisar a Fig. 11 percebe-se que o erro é o menor de todos. O erro mantém-se entre -1 e 1 rad/s.

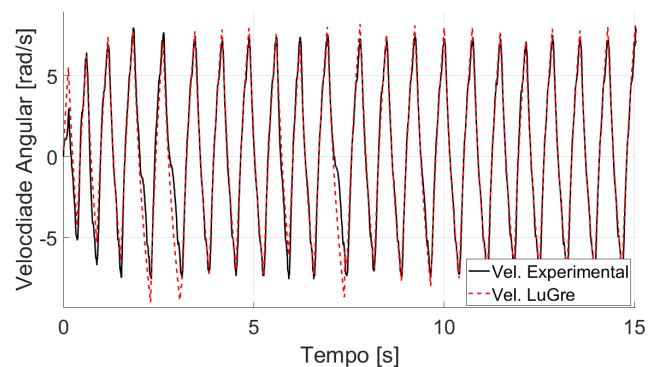


Fig. 10. Gráfico da velocidade experimental comparada com a velocidade obtida usando o modelo de LuGre.

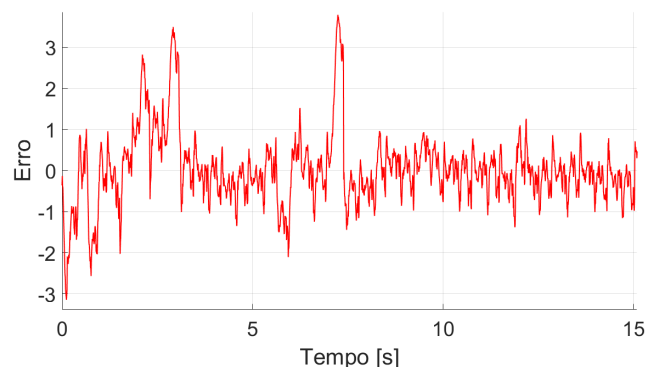


Fig. 11. Gráfico do erro entre a velocidade experimental e a velocidade obtida usando o modelo de LuGre.

Ao analisar as diferentes métricas de erro (RMSE = 0,7829 rad/s; MAE = 0,5202 rad/s; R² = 0,970) observa-se que os erros RMSE e MAE são os menores dentre os modelos. Confirmando as observações feitas através da análise gráfica, e indicando que este modelo de atrito é o que melhor representa a bancada experimental. O

indicador R^2 mais próximo de 1 indica que este é o modelo que mais se aproxima da dinâmica real do sistema.

6.5 Discussão

O desempenho dos diferentes modelos de fricção em comparação com os dados reais foi avaliada (Tabela 6). Baseados na diferentes métricas de erros e da análise gráfica pode-se concluir que os melhores resultados foram obtidos usando o modelo de atrito de LuGre. Este resultado é esperado, sendo o modelo que inclui o maior número de fenômenos da fricção. Observando a Fig. 11 o erro continua importante especialmente na parte inicial do movimento. Isto pode ser causado por múltiplas razões, por exemplo, a não linearidade do atrito (especialmente no regime de pré-deslizamento), as imprecisões ou ruídos na medição, inconsistências e não linearidade do sistema.

Tabela 6. Métricas de erro dos diferentes modelos.

Modelo	RMSE	MAE	R^2
Linear	1,2863	1,0038	0,9191
Coulomb + <i>Stribeck</i>	0,9650	0,6164	0,9631
Dahl	0,9974	0,7372	0,9514
LuGre	0,7829	0,5202	0,9700

7. CONCLUSÃO

Este trabalho abordou o uso de identificação de tipo caixa-cinza usando o *shooting method* para otimizar a representação da dinâmica de um sistema mecânico. A otimização de parâmetros de diferentes modelos de atrito pôde ser realizada a partir de dados obtidos experimentalmente. Em seguida, a performance dos modelos foi comparada com os dados de saída reais. Ao comparar os diferentes modelos de atrito, conclui-se que o modelo de atrito de LuGre é o que tem o melhor desempenho, obtendo os menores erros. Por fim, podemos considerar que os resultados da identificação de tipo caixa-cinza são satisfatórios.

Trabalhos futuros poderiam incluir outros modelos de atrito que considerem mais dinâmicas do atrito e comparar os resultados. Outro foco poderia ser testar diferentes métodos de identificação de tipo caixa-cinza e comparar os desempenhos de cada algoritmo. Por fim utilizar o método de identificação de sistemas de tipo caixa-preta. Através de modelos como o NARX e redes neurais o objetivo seria encontrar um método que caracterize a dinâmica da bancada experimental.

REFERÊNCIAS

Andersson, J.A.E., Gillis, J., Horn, G., Rawlings, J.B., and Diehl, M. (2018). Casadi: a software framework for nonlinear optimization and optimal control. *Mathematical Programming Computation*, 11, 1–36.

Armstrong-Hélouvry, B., Dupont, P., and De Wit, C.C. (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 30, 1083–1138.

Canudas de Wit, C., Olsson, H., Astrom, K., and Lischinsky, P. (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40, 419–425.

Casanova, C. (2007). *Modelagem e compensação de atrito em robôs manipuladores com flexibilidades nas juntas: identificação, análise e resultados experimentais*. Ph.D. thesis.

Coulomb, C.A. (1809). *Theorie des machines simples, en ayant egard au frottement de leurs parties, et a la roideur des cordages*. A Paris, Chez Bachelier.

Dahl, P.R. (1968). A solid friction model. *The Aerospace Corporation*.

Fujii, Y., Tobler, W.E., and Snyder, T.D. (2001). Prediction of wet band brake dynamic engagement behaviour part 1: Mathematical model development. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 215, 479–492.

Haessig, D.A. and Friedland, B. (1991). On the modeling and simulation of friction. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 113, 354–362.

Liu, D. (2006). Parameter identification for lugre friction model using genetic algorithms. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, 2006, 3419–3422.

Muvengei, O.M., Kihui, J.M., and Ikua, B.W. (2012). Computational implementation of lugre friction model in a revolute joint with clearance.

Olsson, H., Åström, K., Canudas de Wit, C., Gäfvert, M., and Lischinsky, P. (1998). Friction models and friction compensation. *European Journal of Control*, 4, 176–195.

Pennestrì, E., Rossi, V., Salvini, P., and Valentini, P.P. (2015). Review and comparison of dry friction force models. *Nonlinear Dynamics*, 83, 1785–1801.

Piatkowski, T. (2014). Dahl and lugre dynamic friction models — the analysis of selected properties. *Mechanism and Machine Theory*, 73, 91–100.

Quaranta, G., Lacarbonara, W., and Masri, S.F. (2020). A review on computational intelligence for identification of nonlinear dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, 99, 1709–1761.

Sjöberg, J., Zhang, Q., Ljung, L., Benveniste, A., Delyon, B., and et al. (1995). Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview. *Automatica*, 31, 1691–1724.

Sun, Y.H., Chen, T., Wu, C.Q., and Shafai, C. (2016). A comprehensive experimental setup for identification of friction model parameters. *Mechanism and Machine Theory*, 100, 338–357.

Vicente, B.A.H., James, S.S., and Anderson, S.R. (2021). Linear system identification versus physical modeling of lateral-longitudinal vehicle dynamics. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 29, 1380–1387.

Wang, S. and Na, J. (2020). Parameter estimation and adaptive control for servo mechanisms with friction compensation. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 16, 6816–6825.

Wang, X., Lin, S., and Wang, S. (2016). Dynamic friction parameter identification method with lugre model for direct-drive rotary torque motor. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016, 1–8.

Worden, K., Wong, C., Parlitiz, U., Hornstein, A., Engster, D., and et al. (2007). Identification of pre-sliding and sliding friction dynamics: Grey box and black-box models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21, 514–534.