Busca Extremal baseada em Eventos com Acionamento Dinâmico ⋆

Victor Hugo Pereira Rodrigues * **Liu Hsu** * **Tiago Roux Oliveira** ** **Mamadou Diagne** *** **Pedro Vieira Martins dos Anjos** **

* *Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ (e-mails: rodrigues.vhp@gmail.com, liu@coep.ufrj.br)*
** *Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ (e-mail: tiagoroux@uerj.br, pedrovieirama@gmail.com)*
*** *Rensselaer Polytechnic Institute, New York, USA (e-mail: diagnm@rpi.edu)*

Abstract: This paper proposes a dynamic event-triggered scheme for scalar extremum seeking control. Integrating Lyapunov and averaging theories for dis- continuous systems, a systematic design procedure and stability analysis are developed. Ultimately, the resulting closed-loop dynamics proves the advantages of integrating both approaches, dynamic event-triggered and extremum seeking. The Zeno behavior is precluded and the local exponential stability of the closed-loop system are guaranteed. An illustration of the benefits of the new control method is presented using consistent simulation results.

Resumo: Este artigo propõe um esquema de acionamento dinâmico baseado em eventos para o controle por busca extremal escalar. Integrando critérios de estabilidade segundo Lyapunov e a teoria da média para sistemas descontínuos, desenvolve-se um procedimento sistemático de análise de estabilidade. O sistema em malha fechada resultante reúne a vantagem de integrar ambas abordagens, sendo eles o acionamento dinâmico baseado em eventos e a busca extremal. O comportamento Zeno é impedido e a estabilidade local exponencial do sistema de malha fechada é garantida. Por fim, um exemplo de simulação é apresentado ilustrando os benefícios dessa nova estratégia de controle.

Keywords: Extremum Seeking, Dynamic Event-Triggered Control, Averaging.

Palavras-chaves: Busca Extremal, Controle Acionado por Eventos, Acionamento Dinâmico, Teoria da Média.

1. INTRODUÇÃO

O Controle por Busca Extremal, do inglês *Extremum Seeking Control* (ESC), é uma estratégia de controle importante que permite ao projetista alcançar e manter a saída de um mapeamento não-linear nas proximidades de seu extremo. Se os parâmetros do mapeamento não-linear estiverem disponíveis, a busca extremal torna-se uma tarefa de controle fácil, pois é possível obter exatamente o gradiente da não-linearidade e o objetivo do controle pode ser definido como a estabilização desse gradiente. Infelizmente, devido a incertezas paramétricas, o gradiente exato não pode ser obtido diretamente e a tarefa de controle não é simples.

Na atual era tecnológica da ciência de redes, pesquisadores estão focando em reduzir os custos de cabeamento desenvolvendo esquemas de comunicação mais seguros e mais velozes, onde a planta e o controlador podem não estar fisicamente conectados, ou podem ainda estar em diferentes localizações geográficas. Esses sistemas de controles por redes oferecem vantagens financeiras tanto de instalação quanto de manutenção [17]. Entretanto, uma das maiores desvantagens é o congestionamento resultando devido ao alto tráfego, podendo resultar em altas latências e perda de pacotes, *i.e.*, dados podem ser perdidos durante o trânsito na rede [7]. Esses problemas estão altamente relacionados aos recursos limitados ou à largura de banda disponível nos canais. Para aliviar ou mitigar esse problema, Controladores Baseados em Eventos, do inglês *Event-Triggered Controllers* (ETC), podem ser utilizados [6].

O ETC executa a tarefa de controle aperiodicamente em resposta à uma condição de acionamento projetada como uma função do estado da planta [16]. Além da propriedade da estabilidade assintótica, [15], essa estratégia reduz o esforço de controle uma vez que as atualizações do sinal de controle e a comunicação de dados apenas ocorrem se forem realmente necessárias [2].

Neste artigo, considera-se o projeto e a análise de um ESC escalar para mapas estáticos dentro de uma estrutura acionada dinamicamente por eventos. Ao invés de técnicas para sistemas híbridos, como apresentadas em [14], a análise de estabilidade é realizada usando o critério de

⋆ Este projeto foi financiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem as Agências Brasileiras de Financiamento: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológio (CNPq) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

estabilidade de Lyapunov bem como a teoria da média para sistemas descontínuos de modo a caracterizar as propriedades de estabilidade do sistema de malha fechada.

Este artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta a formulação do problema de controle a ser solucionado. O sistema de malha fechada é descrito na Seção 3. Os resultados de estabilidade e convergência são apresentados na Seção 4. Os resultados da simulação são mostrados na Seção 5 e as considerações finais estão na Seção 6.

Notação: Ao longo do artigo, os valores absolutos das variáveis escalares são denotados por barras simples $|\cdot|$. Considere $\varepsilon \in [-\varepsilon_0\,,\varepsilon_0] \subset \mathbb{R}$ e os mapeamentos $\delta_1(\varepsilon)$ e $\delta_2(\varepsilon)$, onde $\delta_1 : [-\varepsilon_0\,,\varepsilon_0] \to \mathbb{R}$ e $\delta_2 : [-\varepsilon_0\,,\varepsilon_0] \to \mathbb{R}$. Afirma-se que $\delta_1(\varepsilon)$ tem magnitude de ordem $\delta_2(\varepsilon)$, *i.e.*, $\delta_1(\varepsilon) = \mathcal{O}(\delta_2(\varepsilon))$, existindo constantes positivas k e c de modo que $|\delta_1(\varepsilon)| \leq k|\delta_2(\varepsilon)|$, para todo $|\varepsilon| < c$.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PARA BUSCA EXTREMAL BASEADA EM EVENTOS

Para o diagrama de blocos apresentado na Figura 1, define-se o seguinte mapeamento estático não-linear

$$Q(\theta(t)) = Q^* + \frac{H^*}{2}(\theta(t) - \theta^*)^2\,, \tag{1}$$

onde $H^* \in \mathbb{R} - \{0\}$ é a Hessiana, $\theta^* \in \mathbb{R}$ é o otimizador desconhecido, e a entrada do mapa $\theta(t) \in \mathbb{R}$ é projetada com estimador em tempo real $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}$ de θ^* adicionalmente perturbado pela senoide $a\,\mathrm{sen}(\omega t)$, *i.e.*,

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a\,\mathrm{sen}(\omega t)\,. \tag{2}$$

Da Figura 1, a saída do mapa não-linear (1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} y(t) &= Q(\theta(t)) \\ &= Q^* + \frac{H^*}{2}(\theta(t) - \theta^*)^2\,. \end{aligned} \tag{3}$$

2.1 Hipóteses

As seguintes hipóteses são consideradas ao longo do artigo:

(H1) O valor do otimizador $\theta^* \in R$ e do escalar Q^* são parâmetros desconhecidos do mapa não-linear (1).
(H2) A Hessiana H^* é um parâmetro conhecido.
(H3) O ganho de controle K satisfaz

$$\mathrm{sign}(K) = -\mathrm{sign}(H^*)\,. \tag{4}$$

(H4) Não há atraso devido ao processamento do sensor e do atuador, bem como a transmissão nas ramificações do sensor ao controlador e do controlador ao sensor.
(H5) Apenas $\hat{G}(t)$ está disponível para o projeto do acionamento baseado em eventos.

2.2 Busca Extremal em Tempo Contínuo

Define-se o erro de estimação

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*\,, \tag{5}$$

e a estimativa do Gradiente dada pela demodulação da saída $y(t)$ por $a\,\mathrm{sen}(\omega t)$, *i.e.*,

$$\hat{G}(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega t)\; y(t)\,, \tag{6}$$

na qual a amplitude a é diferente de zero e ω é a frequência [4, 9].

De (2) e (5), pode-se reescrever

$$\theta(t) = \tilde{\theta}(t) + a\,\mathrm{sen}(\omega t) + \theta^*\,, \tag{7}$$

e, portanto, substituindo (7) em (3), $y(t)$ pode também ser reescrita como

$$\begin{aligned} y(t) = Q^* &+ \frac{H^* a^2}{4} + \frac{H^*}{2}\tilde{\theta}^2(t) + a\,\mathrm{sen}(\omega t) H^* \tilde{\theta}(t) \\ &- \frac{H^* a^2}{4}\cos(2\omega t)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Então, de (6) e (8), a estimativa do gradiente [3], é dada por

$$\begin{aligned} \hat{G}(t) = \frac{a^2 H^*}{2}&\left(1 - \cos(2\omega t)\right)\tilde{\theta}(t) + \frac{a H^*}{2}\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\tilde{\theta}^2(t) \\ &+ \left(a Q^* + \frac{3a^3 H^*}{8}\right)\mathrm{sen}(\omega t) - \frac{a^3 H^*}{8}\,\mathrm{sen}(3\omega t)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Observe que o termo quadrático $\tilde{\theta}(t)$ em (9) pode ser negligenciado em uma análise local [1]. Assim, daqui em diante a estimativa do gradiente será dada por

$$\begin{aligned} \hat{G}(t) = \frac{a^2 H^*}{2}&\left(1 - \cos(2\omega t)\right)\tilde{\theta}(t) \\ &+ \left(a Q^* + \frac{3a^3 H^*}{8}\right)\mathrm{sen}(\omega t) - \frac{a^3 H^*}{8}\,\mathrm{sen}(3\omega t)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Por outro lado, da derivada de tempo de (5) e do esquema de ESC da Figura 1, a dinâmica que governa $\hat{\theta}(t)$, bem como $\tilde{\theta}(t)$, é dada por

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t) = u(t)\,, \tag{11}$$

onde u é a lei de controle do ESC a ser projetada como

$$u(t) = K\hat{G}(t)\,, \quad \forall t \geq 0\,. \tag{12}$$

Tomando-se a derivada temporal de (10) e a equação (11), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\hat{G}}(t) = \frac{a^2 H^*}{2}&\left(1 - \cos(2\omega t)\right)u(t) + a^2\omega H^*\,\mathrm{sen}(2\omega t)\,\tilde{\theta}(t) \\ &+ \left(a\omega Q^* + \frac{3a^2\omega H^*}{8}\right)\cos(\omega t) - \frac{3a^2\omega H^*}{8}\cos(3\omega t)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

2.3 Emulação do Controle Baseado em Eventos no Projeto de Busca Extremal

Usando t_k para denotar a sequência de tempo ilimitada monotonicamente crescente , *i.e.*,

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots\,, \quad k \in \mathbb{Z}^+\,, \lim_{k\to\infty} t_k = \infty\,, \tag{14}$$

com os intervalos de amostragem aperiódicos $\tau_k = t_{k+1} - t_k > 0$.

Considera-se a medição contínua da saída do sistema enquanto a atuação se dá por eventos. O atuador transforma a entrada de controle em tempo discreto $U(t_k)$ para uma entrada de controle contínua por partes $u(t)$ como em sistemas de dados amostrados com *zero-order hold*.

Assume-se que não há atraso nas ramificações sensor-controlador e controlador-atuador, obtém-se

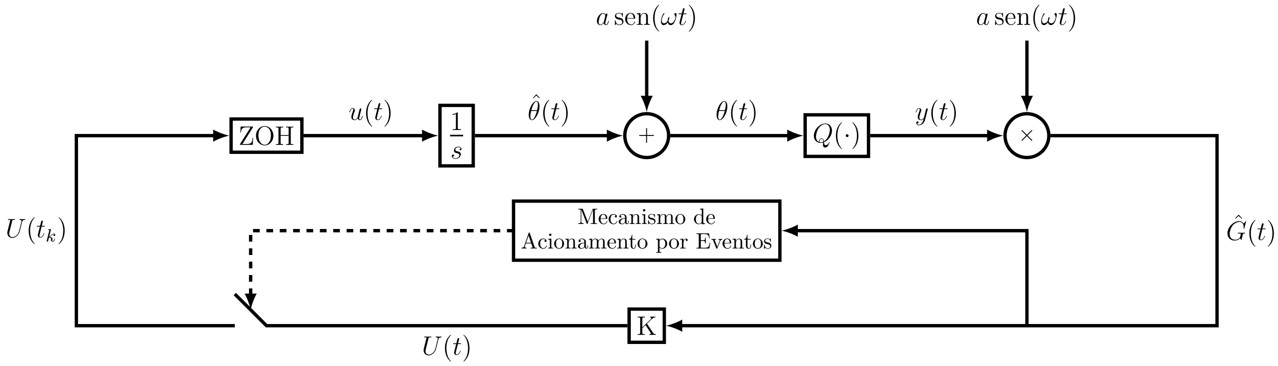


Figura 1. Esquema do controle de busca extremal com acionamento baseado em eventos.

$$u(t) = U_k = U(t_k)\,, \quad t \in \; [t_k\,, t_{k+1}[\,, \quad k \in \mathbb{Z}^+\,. \tag{15}$$

Então, define-se a entrada de controle para todos $t \in [t_k\,, t_{k+1}[$, $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = K\hat{G}(t_k)\,, \tag{16}$$

e introduzimos o vetor de erro

$$e(t) := \hat{G}(t_k) - \hat{G}(t)\,, \quad \forall t \in [t_k\,, t_{k+1}[\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{17}$$

Portanto, utilizando a lei de controle acionada dinamicamente por eventos (16), adicionando e subtraindo o termo $\frac{a^2 H^* K}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\hat{G}(t)$ em (13) e adicionando e subtraindo o termo $K\hat{G}(t)$ em (11), chega-se à representação *Input-to-State Stable (ISS)* da dinâmica do $\hat{G}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$ no que diz respeito ao vetor de erro $e(t)$ na equação (17):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{G}}(t) =& \frac{a^2 H^* K}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\hat{G}(t) \\ &+ \frac{a^2 H^* K}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)e(t) - \frac{3a^2\omega H^*}{8}\cos\left(3\omega t\right) \\ &+ a^2\omega H^*\,\mathrm{sen}\left(2\omega t\right)\tilde{\theta}(t) + \left(a\omega Q^* + \frac{3a^2\omega H^*}{8}\right)\cos\left(\omega t\right)\,,\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\theta}}(t) =& K\hat{G}(t_k) + K\hat{G}(t) - K\hat{G}(t) = K\hat{G}(t) + K\left[\hat{G}(t_k) - \hat{G}(t)\right] \\ =& \frac{a^2 H^* K}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\tilde{\theta}(t) + Ke(t) \\ &+ \left(aQ^*K + \frac{3a^3 H^* K}{8}\right)\mathrm{sen}\left(\omega t\right) - \frac{a^3 H^* K}{8}\mathrm{sen}\left(3\omega t\right)\,.\end{aligned} \tag{19}$$

Em uma implementação convencional de dados amostrados, os instantes de transmissão são distribuídos equidistantemente ao longo do tempo, significando que $t_{k+1} = t_k + h$, para todo k, e em intervalos bem definidos $h > 0$.

No controle acionado por eventos, essas transmissões são orquestradas por um mecanismo de execução que é acionado aperiodicamente [6].

2.4 Mecanismo de Controle Baseado em Eventos

Na Definição 1 nossa estratégia de acionamento dinâmico é apresentada.

Definição 1. Considere o mapeamento $\Xi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dado por

$$\Xi(\hat{G}, e) = a^2|H^*||K|\left[\sigma\hat{G}^2(t) + \hat{G}(t)e(t)\right]\,, \tag{20}$$

onde $\sigma \in (0,1)$, e K é o ganho de controle (16) e $\upsilon(t)$ a solução da dinâmica

$$\dot{\upsilon}(t) = -\mu\upsilon(t) + \Xi(\hat{G}, e)\,, \mu > 0\,, \upsilon(0) \geq 0\,. \tag{21}$$

O controlador baseado em eventos com condição de acionamento dinâmico consiste de dois componentes:

(1) Um conjunto de sequência de tempo crescente $I = \{t_0\,, t_1\,, t_2\,, \ldots\}$ com $t_0 = 0$ gerado sob a seguinte regra:
   - Se $\left\{t \in \mathbb{R}^+ : t > t_k \wedge \upsilon(t) + \gamma\Xi(\hat{G}, e) < 0 = \emptyset\right\}$, o conjunto dos tempos dos eventos é $I = \{t_0\,, t_1\,, \ldots, t_k\}$.
   - Se $\left\{t \in \mathbb{R}^+ : t > t_k \wedge \upsilon(t) + \gamma\Xi(\hat{G}, e) < 0 \neq \emptyset\right\}$, o tempo do próximo evento é dado por

   $$t_{k+1} = \inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : t > t_k \wedge \upsilon(t) + \gamma\Xi(\hat{G}, e) < 0\right\}, \tag{22}$$

   que é o mecanismo de acionamento dinâmico, no qual $\gamma > 0$ é uma constante.

(2) Uma ação de controle realimentado com atualização nos instantes de acionamento gerados é dada por

$$u_k = K\hat{G}(t_k)\,, \tag{23}$$

para todo $t \in [t_k\,, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$.

3. SISTEMA DE MALHA FECHADA

3.1 Sistema de Escalonamento de Tempo

Utilizando a transformação $\bar{t} = \omega t$ onde

$$\omega := \frac{2\pi}{T}\,, \tag{24}$$

é possível reescrever a dinâmica (18)–(19) numa diferente escala de tempo tal que

$$\frac{d\hat{G}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\hat{\mathcal{G}}\left(\bar{t}, \hat{G}, \tilde{\theta}, \upsilon, \frac{1}{\omega}\right)\,, \tag{25}$$

$$\frac{d\tilde{\theta}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\tilde{\Theta}\left(\bar{t}, \hat{G}, \tilde{\theta}, \upsilon, \frac{1}{\omega}\right)\,, \tag{26}$$

$$\frac{d\upsilon(\bar{t})}{d\bar{t}} = \frac{1}{\omega}\Upsilon\left(\bar{t}, \hat{G}, \tilde{\theta}, \upsilon, \frac{1}{\omega}\right)\,, \tag{27}$$

com

ISSN: 2525-8311

DOI: 10.20906/CBA2022/3450

$$\hat{\mathcal{G}}\left(\bar{t},\hat{G},\tilde{\theta},\upsilon,\frac{1}{\omega}\right)=\frac{a^2H^*K}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\hat{G}(t) + \frac{a^2H^*K}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)e(t)-\frac{3a^2\omega H^*}{8}\cos\left(3\omega t\right) + a^2\omega H^*\operatorname{sen}\left(2\omega t\right)\tilde{\theta}(t)+\left(a\omega Q^*+\frac{3a^2\omega H^*}{8}\right)\cos\left(\omega t\right)\,, \tag{28}$$

$$\tilde{\Theta}\left(\bar{t},\hat{G},\tilde{\theta},\upsilon,\frac{1}{\omega}\right)=\frac{a^2H^*K}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right)\tilde{\theta}(t)+Ke(t) + \left(aQ^*K+\frac{3a^3H^*K}{8}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t\right)-\frac{a^3H^*K}{8}\operatorname{sen}\left(3\omega t\right)\,, \tag{29}$$

$$\Upsilon\left(\bar{t},\hat{G},\tilde{\theta},\upsilon,\frac{1}{\omega}\right)=-\mu\upsilon(t)+\Xi(\hat{G},e)\,. \tag{30}$$

Um sistema médio apropriado na escala de tempo $\bar{t}$ pode ser derivado na próximo Seção.

3.2 Sistema Médio

Agora, definindo o estado aumentado

$$X^T(\bar{t}):=\left[\hat{G}(\bar{t})\,,\tilde{\theta}(\bar{t})\,,\upsilon(\bar{t})\right]\,, \tag{31}$$

chega-se à dinâmica

$$\frac{dX(\bar{t})}{d\bar{t}}=\frac{1}{\omega}\mathcal{F}\left(\bar{t},X,\frac{1}{\omega}\right)\,, \tag{32}$$

$$\mathcal{F}^T=\left[\hat{\mathcal{G}}\,,\tilde{\Theta}\,,\Upsilon\right]\,. \tag{33}$$

Devido a natureza descontínua da estratégia de controle proposta, durante o artigo a teoria da média para sistemas descontínuos é utilizada, como apresentada em [13].

O sistema aumentado (32) é descontínuo, tem um pequeno parâmetro $1/\omega$ assim como a função T-periódica $\mathcal{F}\left(\bar{t},X,\frac{1}{\omega}\right)$ em $\bar{t}$ e, portanto, admite-se o método da média para análise de estabilidade de $\mathcal{F}\left(\bar{t},X,\frac{1}{\omega}\right)$ em $\lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{1}{\omega}=0$, como mostrado em [13], *i.e.*,

$$\frac{dX_{\text{av}}(\bar{t})}{d\bar{t}}=\frac{1}{\omega}\mathcal{F}_{\text{av}}\left(X_{\text{av}}\right)\,, \tag{34}$$

$$\mathcal{F}_{\text{av}}\left(X_{\text{av}}\right)=\frac{1}{T}\int_0^T\mathcal{F}\left(\delta,X_{\text{av}},0\right)d\delta\,. \tag{35}$$

Basicamente, o problema no método da média é determinar em qual sentido o comportamento do sistema autônomo (34) se aproxima do comportamento de um sistema não-autônomo (32) tal que (32) pode ser representada como a perturbação do sistema (34).

Assim, tratando os estados $\hat{G}(\bar{t})$, $e(\bar{t})$ e $\tilde{\theta}(\bar{t})$ como constantes em (18), e utilizando a média dos valores, obtém-se

$$\frac{d\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})}{d\bar{t}}=\frac{a^2H^*K}{2\omega}\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})+\frac{a^2H^*K}{2\omega}e_{\text{av}}(\bar{t})\,, \tag{36}$$

$$e_{\text{av}}(\bar{t})=\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t}_k)-\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\,. \tag{37}$$

Portanto, de (36) é fácil de verificar as relações *ISS* de $\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})$ que dizem respeito à medição da média do erro $e_{\text{av}}(\bar{t})$.

Além disso, de (10), obtém-se

$$\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})=\frac{a^2H^*}{2}\tilde{\theta}_{\text{av}}(\bar{t})\,, \tag{38}$$

e, consequentemente,

$$\tilde{\theta}_{\text{av}}(\bar{t})=\frac{2}{a^2H^*}\hat{G}_{\text{av}}(\bar{t})\,, \tag{39}$$

com a derivada de tempo

$$\frac{d\tilde{\theta}_{\text{av}}(\bar{t})}{d\bar{t}}=\frac{a^2H^*K}{2\omega}\tilde{\theta}_{\text{av}}(\bar{t})+\frac{1}{\omega}Ke_{\text{av}}(\bar{t})\,. \tag{40}$$

Portanto, a seguinte lei de acionamento por evento pode ser introduzida para o sistema médio.

Definição 2. Considere $\Xi(\cdot)$ em (20), onde $\sigma\in(0,1)$, e K é o ganho de controle em (16), $\gamma>0$ uma constante positiva e $\upsilon(t)$ a solução da dinâmica

$$\frac{d\upsilon_{\text{av}}(\bar{t})}{d\bar{t}}=-\frac{\mu}{\omega}\upsilon_{\text{av}}(\bar{t})+\frac{1}{\omega}\Xi(\hat{G}_{\text{av}},e_{\text{av}})\,,\mu>0\,,\upsilon_{\text{av}}(0)\geq 0\,. \tag{41}$$

O mecanismo de acionamento dinâmico baseado em eventos consiste de dois componentes:

(1) Um conjunto de sequência de tempo crescente $I=\{\bar{t}_0\,,\bar{t}_1\,,\bar{t}_2\,,\ldots\}$ com $\bar{t}_0=0$ gerado a partir da seguinte regra:
- Se $\left\{\bar{t}\in\mathbb{R}^+:\bar{t}>\bar{t}_k\wedge\upsilon_{\text{av}}(\bar{t})+\gamma\Xi(\hat{G}_{\text{av}},e_{\text{av}})<0=\emptyset\right\}$, então o conjunto dos tempos dos eventos é $I=\{\bar{t}_0\,,\bar{t}_1\,,\ldots,\bar{t}_k\}$.
- Se $\left\{\bar{t}\in\mathbb{R}^+:\bar{t}>\bar{t}_k\wedge\upsilon_{\text{av}}(\bar{t})+\gamma\Xi(\hat{G}_{\text{av}},e_{\text{av}})<0\neq\emptyset\right\}$, o tempo do próximo evento é dado por

$$\bar{t}_{k+1}=\inf\left\{\bar{t}\in\mathbb{R}^+:\bar{t}>\bar{t}_k\wedge\upsilon_{\text{av}}(\bar{t})+\gamma\Xi(\hat{G}_{\text{av}},e_{\text{av}})<0\right\}, \tag{42}$$

e essa é a versão média do mecanismo de acionamento dinâmico baseado em eventos.

(2) A atualização da ação de controle realimentada na geração dos instantes de acionamento é dada por

$$u_k=K\hat{G}(\bar{t}_k)\,, \tag{43}$$

para todo $\bar{t}\in[\bar{t}_k\,,\bar{t}_{k+1})$, $k\in\mathbb{N}$.

4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Teorema 1. Considere a dinâmica média em malha fechada da estimativa do gradiente (36) e a versão média do mecanismo de acionamento por eventos dado pela Definição 2. Considere que as hipóteses (H1)–(H5) sejam satisfeitas. Se ω em (24) é uma constante suficientemente grande, a média da estimativa do gradiente (36) com estado $\hat{G}_{\text{av}}(t)$ é localmente assintoticamente estável e, consequentemente, $\tilde{\theta}_{\text{av}}(t)$ converge exponencialmente para zero. Portanto, existem constantes $m\,,M_\theta\,,M_y>0$ tais que

$$|\theta(t)-\theta^*|\leq M_\theta\exp(-mt)+\mathcal{O}\left(a+\frac{1}{\omega}\right)\,, \tag{44}$$

$$|y(t)-Q^*|\leq M_y\exp(-mt)+\mathcal{O}\left(a^2+\frac{1}{\omega^2}\right)\,, \tag{45}$$

onde as constantes M_θ e M_y dependem da condição inicial $\theta(0)$.

Inicialmente, perceba que a dinâmica do mecanismo de execução em (22) assegura, para todo $t \in [t_k\,, t_{k+1}[$,

$$\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \gamma \Xi(\hat{G}_{\rm av}, e_{\rm av}) \geq 0\,, \tag{46}$$

e, portanto,

$$\Xi(\hat{G}_{\rm av}, e_{\rm av}) \geq -\frac{1}{\gamma}\upsilon_{\rm av}(\bar{t})\,. \tag{47}$$

Agora, utilizando a desigualdade (47), a equação (41) pode ser limitada inferiormente com

$$\begin{aligned}\frac{d\upsilon_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}} &= -\frac{\mu}{\omega}\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}\Xi(\hat{G}_{\rm av}, e_{\rm av}) \\ &\geq -\frac{\mu}{\omega}\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) - \frac{1}{\omega\gamma}\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) = -\frac{1}{\omega}\left(\mu + \frac{1}{\gamma}\right)\upsilon_{\rm av}(\bar{t})\,.\end{aligned} \tag{48}$$

Invocando [8, Lema da Comparação, pp. 102], a solução $\hat{\upsilon}_{\rm av}(\bar{t})$ da seguinte dinâmica de primeira ordem

$$\frac{d\hat{\upsilon}_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}} = -\frac{1}{\omega}\left(\mu + \frac{1}{\gamma}\right)\hat{\upsilon}_{\rm av}(\bar{t})\,, \quad \hat{\upsilon}_{\rm av}(0) = \upsilon_{\rm av}(0) > 0\,, \tag{49}$$

precisamente,

$$\hat{\upsilon}_{\rm av}(\bar{t}) = \exp\left(-\frac{1}{\omega}\left(\mu + \frac{1}{\gamma}\right)\bar{t}\right)\hat{\upsilon}_{\rm av}(0) > 0\,, \quad \forall \bar{t} \geq 0\,, \tag{50}$$

é o limite inferior para $\upsilon_{\rm av}(\bar{t})$. Para verificar este fato, observe que, de (48) e (49),

$$\frac{d(\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) - \hat{\upsilon}_{\rm av}(\bar{t}))}{d\bar{t}} \geq -\frac{1}{\omega}\left(\mu + \frac{1}{\gamma}\right)(\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) - \hat{\upsilon}_{\rm av}(\bar{t}))\,. \tag{51}$$

Assim,

$$\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) - \hat{\upsilon}_{\rm av}(\bar{t}) \geq \exp\left(-\frac{1}{\omega}\left(\mu + \frac{1}{\gamma}\right)\bar{t}\right)\underbrace{(\upsilon_{\rm av}(0) - \hat{\upsilon}_{\rm av}(0))}_{=0} \tag{52}$$

e

$$\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) \geq \hat{\upsilon}_{\rm av}(\bar{t}) > 0\,, \quad \forall \bar{t} \geq 0\,. \tag{53}$$

Agora, sendo $\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) > 0$, para todo $\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) \neq 0$, considere a seguinte candidata a função média de Lyapunov

$$V_{\rm av}(\bar{t}) = \hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t}) + \upsilon_{\rm av}(\bar{t})\,, \tag{54}$$

com derivada temporal

$$\begin{aligned}\frac{dV_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}} &= -\frac{a^2|H^*||K|}{\omega}\hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t}) - \frac{a^2|H^*||K|}{\omega}\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})e_{\rm av}(\bar{t}) + \\ &\quad - \frac{\mu}{\omega}\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}\Xi(\hat{G}_{\rm av}, e_{\rm av})\,.\end{aligned} \tag{55}$$

Agora, adicionando e subtraindo o termo $\sigma\frac{a^2|H^*||K|}{\omega}\hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t})$ na equação (55), é possível reescrevê-la como

$$\begin{aligned}\frac{dV_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}} &= -\frac{(1-\sigma)a^2|H^*||K|}{\omega}\hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t}) - \frac{1}{\omega}\Xi(\hat{G}_{\rm av}, e_{\rm av}) + \\ &\quad - \frac{\mu}{\omega}\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \frac{1}{\omega}\Xi(\hat{G}_{\rm av}, e_{\rm av}) \\ &= -\frac{(1-\sigma)a^2|H^*||K|}{\omega}\hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t}) - \frac{\mu}{\omega}\upsilon_{\rm av}(\bar{t})\,.\end{aligned} \tag{56}$$

Usando (54), um majorante para (56) é

$$\frac{dV_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}} \leq -\frac{1}{\omega}\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|, \mu\right\}V_{\rm av}(\bar{t})\,. \tag{57}$$

Então, invocando-se o Lema da Comparação [8], um limitante superior $\bar{V}_{\rm av}$ para $V_{\rm av}$ pode ser encontrado como

$$V_{\rm av}(\bar{t}) \leq \bar{V}_{\rm av}(\bar{t})\,, \quad \forall \bar{t} > 0\,. \tag{58}$$

dado pela solução da seguinte dinâmica

$$\frac{d\bar{V}_{\rm av}}{d\bar{t}} = -\frac{1}{\omega}\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|, \mu\right\}\bar{V}_{\rm av}, \tag{59}$$

$$\bar{V}_{\rm av}(\bar{t}=0) = V_{\rm av}(\bar{t}=0)\,. \tag{60}$$

Em outras palavras,

$$\bar{V}_{\rm av}(\bar{t}) = \exp\left(-\frac{\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|, \mu\right\}}{\omega}\bar{t}\right)V_{\rm av}(\bar{t}=0)\,, \tag{61}$$

e a desigualdade (58) é reescrita como

$$V_{\rm av}(\bar{t}) \leq \exp\left(-\frac{\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|, \mu\right\}}{\omega}\bar{t}\right)V_{\rm av}(\bar{t}=0)\,. \tag{62}$$

Agora, obtém-se

$$\hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t}) \leq V_{\rm av}(\bar{t}) = \hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t}) + \upsilon_{\rm av}(\bar{t}) \tag{63}$$

$$\begin{aligned}&\leq \bar{V}_{\rm av}(\bar{t}) = \exp\left(-\frac{\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|, \mu\right\}}{\omega}\bar{t}\right) \times \\ &\times\left(\hat{G}^2_{\rm av}(0) + \upsilon_{\rm av}(0)\right)\,.\end{aligned} \tag{64}$$

Note que existe um escalar positivo κ tal que

$$\upsilon_{\rm av}(0) \leq \kappa\hat{G}^2_{\rm av}(0)\,, \tag{65}$$

logo é possível escrever

$$\hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t}) \leq \exp\left(-\frac{\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|, \mu\right\}}{\omega}\bar{t}\right)(1+\kappa)\,\hat{G}^2_{\rm av}(0)\,. \tag{66}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})| &\leq \exp\left(-\frac{\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|, \mu\right\}}{2\omega}\bar{t}\right)\sqrt{(1+\kappa)} \times \\ &\times |\hat{G}_{\rm av}(0)|\,.\end{aligned} \tag{67}$$

Como (18) é T-periódica em t, $1/\omega$ é um parâmetro positivo pequeno, e, da desigualdade (67), a origem $\hat{G}_{\rm av} = 0$ é ao menos um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema de malha fechada acionado por eventos. Então, invocando-se [13, Teorema 2], existe um limitante superior para (10) tal que

$$\begin{aligned}|\hat{G}(t)| &\leq |\hat{G}_{\rm av}(t)| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|, \mu\right\}}{2}t\right)\sqrt{(1+\kappa)} \times \\ &\quad \times |\hat{G}_{\rm av}(0)| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right).\end{aligned} \tag{68}$$

Apesar da análise ser focada na convergência de $\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})$ e, consequentemente, $\hat{G}(t)$, os resultados obtidos através de (68) podem ser facilmente estendidos para a variável $\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t})$ e $\tilde{\theta}(t)$. Observe que, utilizando (38) e a desigualdade (67), obtém-se

$$|\tilde{\theta}_{\rm av}(\bar{t})| \leq \exp\left(-\frac{\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|,\mu\right\}}{2\omega}\bar{t}\right)\sqrt{(1+\kappa)}\times \times |\tilde{\theta}_{\rm av}(0)|\,, \tag{69}$$

e invocando [13, Teorema 2], obtém-se

$$|\tilde{\theta}(t)| \leq \exp\left(-\frac{\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|,\mu\right\}}{2}t\right)\sqrt{(1+\kappa)}\times \times |\tilde{\theta}_{\rm av}(0)| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{70}$$

Agora, de (7), temos

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + a\,\mathrm{sen}(\omega t)\,, \tag{71}$$

a qual o valor absoluto satisfaz

$$\begin{aligned}|\theta(t) - \theta^*| &= |\tilde{\theta}(t) + S(t)| \leq |\tilde{\theta}(t)| + |a\,\mathrm{sen}(\omega t)| \\ &\leq \exp\left(-\frac{\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|,\mu\right\}}{2}t\right)\sqrt{(1+\kappa)}\times \\ &\times |\theta(0) - \theta^*| + \mathcal{O}\left(a + \frac{1}{\omega}\right).\end{aligned} \tag{72}$$

Definindo a variável de erro $\tilde{y}(t)$ como

$$\tilde{y}(t) := y(t) - Q^*\,, \tag{73}$$

e usando (3), bem como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, seu valor absoluto satisfaz

$$|\tilde{y}(t)| = |y(t) - Q^*| = |H^*||\theta(t) - \theta^*|^2\,, \tag{74}$$

e seu limite superior com (72) é dado por

$$\begin{aligned}|y(t) - Q^*| &\leq \exp\left(-\frac{\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|,\mu\right\}}{2}t\right)|H^*|\times \\ &\times\left[(1+\kappa)|\theta(0)-\theta^*| + 2\left(a+\frac{1}{\omega}\right)\right]|\theta(0) - \theta^*| + \\ &+ \mathcal{O}\left(a^2 + \frac{1}{\omega^2}\right).\end{aligned} \tag{75}$$

Por esse motivo, definindo as constantes positivas

$$m = \frac{\min\left\{(1-\sigma)a^2|H^*||K|,\mu\right\}}{2}\,, \tag{76}$$

$$M_\theta = |\theta(0) - \theta^*|\,, \tag{77}$$

$$M_y = \left[|\theta(0) - \theta^*| + 2\left(a + \frac{1}{\omega}\right)\right]|\theta(0) - \theta^*|\,, \tag{78}$$

as desigualdades (72) e (75) satisfazem (44) e (45), respectivamente.

Observe que, de (42) e utilizando a desigualdade de Peter-Paul [18], podemos escrever $cd \leq \frac{c^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon d^2}{2}$, para todo $c, d, \epsilon > 0$, with $c = |e_{\rm av}(\bar{t})|$, $d = |\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})|$ e $\epsilon = \sigma$, para todo $\bar{t} \in [t_k\,, t_{k+1}[$, o seguinte limite inferior é verificado

$$\begin{aligned}&\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \gamma a^2|H^*||K|\left[\sigma\hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t}) + e_{\rm av}(\bar{t})\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\right] \\ &\geq \upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \gamma a^2|H^*||K|\left[\sigma\hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t}) - |e_{\rm av}(\bar{t})||\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})|\right] \\ &\geq \upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \gamma a^2|H^*||K|\sigma\hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t}) + \\ &\quad - \frac{\gamma a^2|H^*||K|}{2}\left(\sigma\hat{G}^2_{\rm av}(\bar{t}) + \frac{1}{\sigma}e^2_{\rm av}(\bar{t})\right) \\ &= \upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \gamma\left(q\|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\|^2 - p\|e_{\rm av}(\bar{t})\|^2\right)\,,\end{aligned} \tag{79}$$

onde

$$q = \frac{\gamma a^2|H^*||K|\sigma}{2} \quad \text{e} \quad p = \frac{\gamma a^2|H^*||K|}{2\sigma}\,. \tag{80}$$

A refrência [5] mostra que um limitante inferior para o intervalo entre execuções pode ser encontrado como o tempo que a função

$$\phi(\bar{t}) = \frac{\sqrt{\gamma p}|e_{\rm av}(\bar{t})|}{\sqrt{\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \gamma q|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})|^2}}\,, \tag{81}$$

leva para sair de 0 e alcançar o valor 1. A derivada de $\phi(\bar{t})$ em (81) é dada por

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(\bar{t})}{d\bar{t}} &= \frac{\sqrt{\gamma p}e_{\rm av}(\bar{t})\dfrac{de_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}}}{|e_{\rm av}(\bar{t})|\sqrt{\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \gamma q|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})|^2}} + \\ &- \frac{\sqrt{\gamma p}|e_{\rm av}(\bar{t})|}{2(\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \gamma q|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})|^2)^{3/2}}\times \\ &\times\left(\frac{d\upsilon_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}} + \gamma q\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})\frac{d\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})}{d\bar{t}}\right)\,,\end{aligned} \tag{82}$$

e satisfaz a desigualdade

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(\bar{t})}{d\bar{t}} &\leq \frac{a^2|H^*||K|}{2\omega}\sqrt{\frac{p}{q}} + \frac{a^2|H^*||K|}{2\omega}\phi(\bar{t}) + \frac{1}{2\omega\gamma}\phi^3(\bar{t}) + \\ &+ \frac{a^2|H^*||K|}{2\omega}\sqrt{\frac{q}{p}}\phi^2(\bar{t}) + \frac{\mu}{2\omega}\phi(\bar{t}) + \\ &+ \frac{\gamma q|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})|^2}{2\omega(\upsilon_{\rm av}(\bar{t}) + \gamma q|\hat{G}_{\rm av}(\bar{t})|^2)}\left(-\mu - \frac{1}{\gamma} + 2\frac{a^2|H^*||K|}{2}\right)\phi(\bar{t})\,.\end{aligned} \tag{83}$$

Consequentemente, se $a^2|H^*||K| \leq \mu$, obtém-se

$$\omega\frac{d\phi(\bar{t})}{d\bar{t}} \leq \frac{a^2|H^*||K|}{2}\left(\sqrt{\frac{p}{q}} + 2\phi(\bar{t}) + \sqrt{\frac{q}{p}}\phi^2(\bar{t})\right)\,. \tag{84}$$

Utilizando a transformação $t = \frac{\bar{t}}{\omega}$, a desigualdade (84) e invocando o Lema da Comparação [8], um limite inferior para o tempo de interexecução é encontrado como

$$\tau^* = \int_0^1 \frac{1}{b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3}\,d\xi\,, \tag{85}$$

com $b_0 = \dfrac{a^2|H^*||K|}{2\sigma}$, $b_1 = a^2|H^*||K|$, $b_2 = \dfrac{a^2|H^*||K|\sigma}{2}$ e $b_3 = 0$.

Se $a^2|H^*||K| > \mu$ e $\gamma \leq 1/(a^2|H^*||K| - \mu)$, a desigualdade (83) é limitada superiormente por

$$\begin{aligned}\omega\frac{d\phi(\bar{t})}{d\bar{t}} &\leq \frac{a^2|H^*||K|}{2}\sqrt{\frac{p}{q}} + \left(\frac{\mu}{2} + \frac{a^2|H^*||K|}{2}\right)\phi(\bar{t}) + \\ &+ \frac{a^2|H^*||K|}{2}\sqrt{\frac{q}{p}}\phi^2(\bar{t}) + \left(\frac{a^2|H^*||K|}{2} - \frac{\mu}{2}\right)\phi^3(\bar{t})\,,\end{aligned} \tag{86}$$

e o limite inferior τ^* satisfaz a equação (85) com constantes $b_0 = \dfrac{a^2|H^*||K|}{2\sigma}$, $b_1 = \dfrac{\mu + a^2|H^*||K|}{2}$, $b_2 = \dfrac{a^2|H^*||K|\sigma}{2}$ e $b_3 = \dfrac{a^2|H^*||K| - \mu}{2}$.

Finalmente, se $a^2|H^*||K| > \mu$ e $\gamma > 1/(a^2|H^*||K| - \mu)$, obtemos

$$\omega\frac{d\phi(\bar{t})}{d\bar{t}} \leq \frac{a^2|H^*||K|}{2}\sqrt{\frac{p}{q}} + \left(a^2|H^*||K| - \frac{1}{2\gamma}\right)\phi(\bar{t}) + \\ + \frac{a^2|H^*||K|}{2}\sqrt{\frac{q}{p}}\phi^2(\bar{t}) + \frac{1}{2\gamma}\phi^3(\bar{t}), \quad (87)$$

e o limite inferior τ^* satisfaz a equação (85) com constantes $b_0 = \frac{a^2|H^*||K|}{2\sigma}$, $b_1 = a^2|H^*||K| - \frac{1}{2\gamma}$, $b_2 = \frac{a^2|H^*||K|\sigma}{2}$ e $b_3 = \frac{1}{2\gamma}$.

Portanto, o comportamento Zeno [5] é evitado o que finaliza a prova. □

5. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

A fim de destacar as ideias principais da estrategia proposta de busca extremal baseada em eventos com acionamento dinâmico, o mapa não-linear (1) tem a entrada $\theta(t) \in \mathbb{R}$, saída $y(t) \in \mathbb{R}$, Hessiana $H = -1$ e parâmetros desconhecidos $Q^* = 7$ e $\theta^* = 5$. Os sinais de *dither* têm parâmetros $a = 0.1$, $\omega = 3$ [rad/sec], e foram selecionados o parâmetro de acionamento por eventos $\sigma = 0.1$, $\mu = 0.4320$ e $\gamma = 0.0542$. O ganho de controle é $K = 30$ e a condições iniciais $\hat{\theta}(0) = 10$ e $v(0) = 0$.

Nas Figuras 2(a), 2(b) e 2(c), o estimador de Gradiente, sua versão de *sample-and-hold* e o erro $e(t)$ são apresentados, respectivamente. A busca extremal baseada em eventos com acionamento dinâmico garante a estabilização da estimativa do Gradiente levando a entra $\theta(t)$ a uma pequena vizinhança do otimizador θ^*, veja as Figuras 2(g) e 2(h). As Figuras 2(e) e 2(f) mostram o comportamento aperiódico do quão frequente o sinal de controle $U(t)$ é atualizado, veja também a Figura 2(d) para o sinal de controle. Durante 300 segundos de simulação, ocorreram 98 atualizações do sinal de controle e, consequentemente, a média do intervalo de inter-execução foi igual a 3.0612 segundos.

6. CONCLUSÃO

Neste artigo foi proposto um esquema de controle por busca extremal baseada em eventos com acionamento dinâmico. A contribuição do tratamento das dinâmicas específicas de aprendizado híbrido [14] constituídas pelo *sample-and-hold* é clara. A abordagem fornece formas funcionais explícitas da convergência exponencial caracterizando as propriedades da estabilidade do sistema em malha fechada. Os resultados das simulações demonstram as vantagens do esquema proposto.

REFERÊNCIAS

[1] K. B. Ariyur and M. Krstić, *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*. Wiley, Canada, 2003.

[2] D. P. Borgers and W. P. M. H. Heemels, On minimum inter-event times in event-triggered control. In *2013 IEEE 52nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 7370–7375, 2013.

[3] J. Feiling, S. Koga, M. Krstić and T. R. Oliveira, Extremum seeking for static maps with actuation dynamics governed by diffusion PDEs. *Automatica*, 95, 197–206, 2018.

[4] A. Ghaffari, M. Krstić and D. Nešic. Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, 48, 1759–1767, 2012.

[5] A. Girard. Dynamic triggering mechanism for event-triggered control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60, 1992–1997, 2014.

[6] W. P. M. H. Heemels, K. H. Johansson and P. Tabuada, An introduction to event-triggered and self-triggered control. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 3270–3285, 2012.

[7] J. P. Hespanha, P. Naghshtabrizi and Y. Xu, A survey of recent results in networked control systems, *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 138–162, 2007.

[8] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.

[9] M. Krstić, Extremum seeking control. In J. Baillieul and T. Samad (eds.), *Encyclopedia of Systems and Control*, volume 1, 1–5. Springer, London, 1 edition, 2014.

[10] M. Krstić and H. H. Wang, Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems, *Automatica*, 36, 595–601, 2000.

[11] M. Leblanc, Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée, *Revue Générale de l'Electricité*, XII(8), 275–277, 1922.

[12] N. Piskunov, *Differential and Integral Calculus*, MIR Publishers, Moscow, 1969.

[13] V. A. Plotnikov, Averaging of differential inclusions, *Ukrainian Mathematical Journal*, 31, 454–457, 1979.

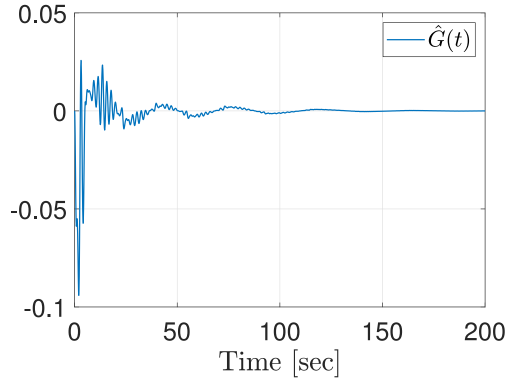
[14] J. I. Poveda and A. R. Teel, A framework for a class of hybrid extremum seeking controllers with dynamic inclusions, *Automatica*, 76, 113–126, 2017.

[15] P. Tabuada, Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52, 1680–1685, 2007.

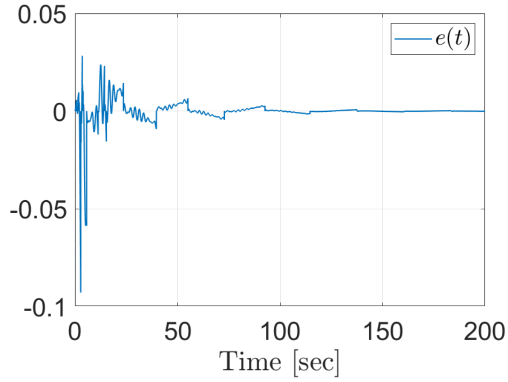
[16] P. Tabuada and X. Wang, Preliminary results on state-triggered scheduling of stabilizing control tasks, In *2006 IEEE 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 282–287, 2006.

[17] X. M. Zhang, Q. L. Han, X. Ge, D. Ding, L. Ding, D. Yue and C. Peng, Networked control systems: A survey of trends and techniques, *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 7(1), 1–17, 2020.

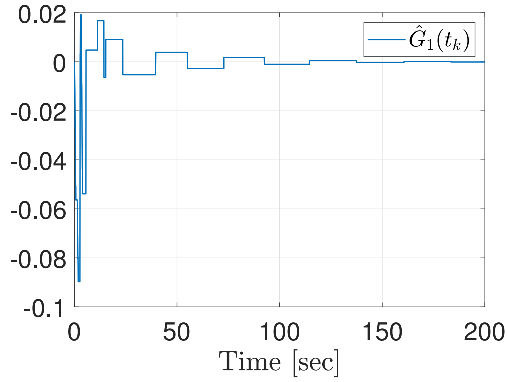
[18] F. Warner, *Foundations of differentiate manifolds and Lie group*, Scott Foresman and Company, Chicago, Illinois, 1971.



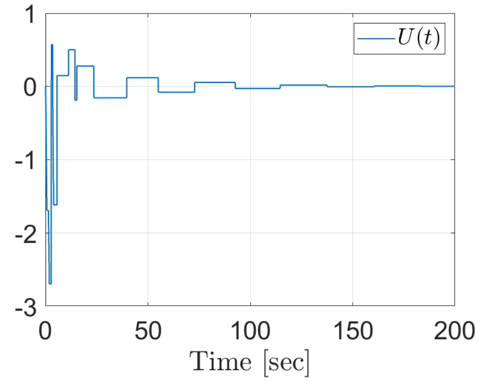
(a) Estimativa do Gradiente, $\hat{G}(t)$.



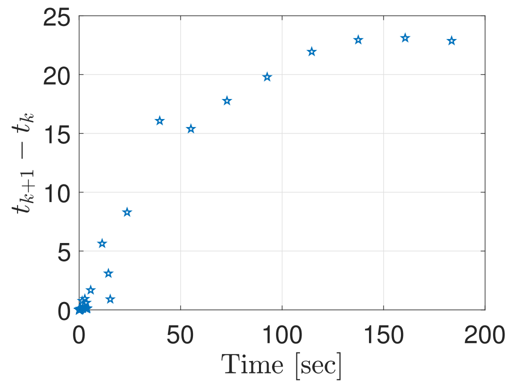
(b) Medição do erro, $e(t)$.



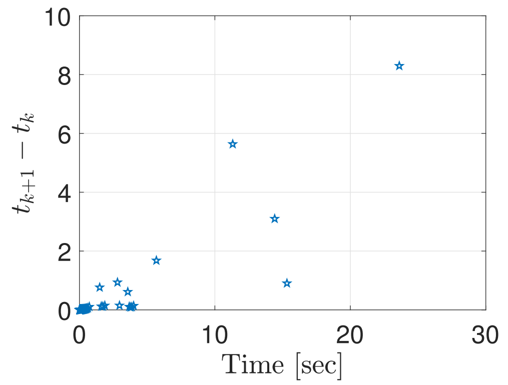
(c) Estimativa do Gradiente *Sample-and-Hold*, $\hat{G}(t_k)$.



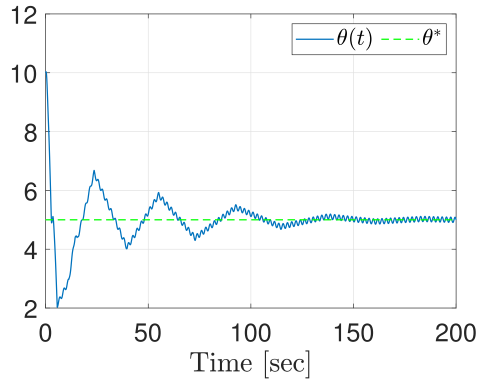
(d) Entrada de Controle, $U(t)$.



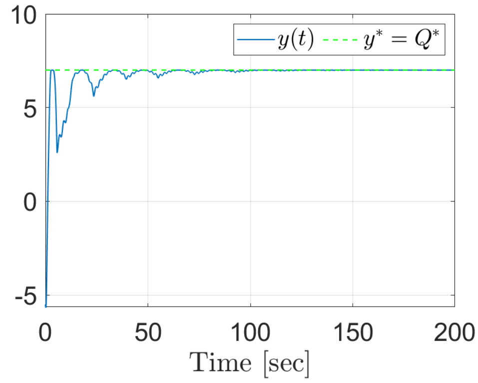
(e) Intervalos de interexecução, $t_{k+1} - t_k$.



(f) Zoom aplicado nos intervalos de interexecução, $t_{k+1} - t_k$.



(g) Entrada do mapa não-linear, $\theta(t)$.



(h) Saída do mapa não-linear, $y(t)$.

Figura 2. Sistema de Controle por Busca Extremal com Acionamento Baseado em Eventos.