

Busca extremal para a PDE de Stefan com Fronteira Móvel

Maurício Linhares Galvão * Tiago Roux Oliveira *

* Departamento de Eletrônica e Telecomunicações, Universidade do
Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro – RJ, Brasil
(e-mail: mauriciolinhaires92@gmail.com e tiagoroux@uerj.br).

Abstract:

This paper presents the design and analysis of the extremum seeking for static maps with input governed by a parabolic partial differential equation (PDE) of the diffusion type defined on a time varying spatial domain described by an ordinary differential equation (ODE). This is the first effort to pursue an extension of extremum seeking from the heat PDE to the Stefan PDE. We compensate the average-based actuation dynamics by a controller via backstepping transformation for the moving boundary, which is utilized to transform the original coupled PDE-ODE into a target system whose exponential stability is proved. The local exponential convergence to a small neighborhood of the optimal point is proven by means of backstepping methodology, Lyapunov functional and averaging in infinite dimensions.

Resumo: Este trabalho apresenta o projeto e a análise da busca extremal para mapas estáticos com entrada governada por uma equação diferencial parcial (EDP) de difusão definida em um espaço variante no tempo descrito por uma equação diferencial ordinária (EDO). Esse é o primeiro esforço para buscar uma extensão da busca extremal da EDP do calor para a EDP de Stefan. Nós compensamos a dinâmica de atuação baseado na média por um controlador através de uma transformação *backstepping* para fronteira móvel, que é utilizado para transformar o acoplamento EDP-EDO original em um sistema alvo no qual a estabilidade exponencial é provada. A convergência exponencial local para uma pequena vizinhança do ponto ótimo é provada utilizando a metodologia de *backstepping*, função de Lyapunov e o método da média em dimensões infinitas.

Keywords: Adaptive Control; Extremum Seeking; Partial Differential Equation; Averaging Theory; Backstepping in Infinite Dimensions.

Palavras-chaves: Controle adaptativo; Busca extremal; Equação diferencial parcial; Teoria da média; *Backstepping* em dimensões infinitas.

1. INTRODUÇÃO

A busca extremal é uma abordagem independente de modelo no campo do controle adaptativo que busca pontos extremos (máximos ou mínimos) de um índice de desempenho de um sistema. Esse método tem recebido grande atenção na comunidade de controle por lidar com problemas de controle quando a planta apresenta imperfeições em seu modelo ou incertezas na dinâmica (Krstić and Wang, 2000).

A busca extremal foi introduzida primeiramente em (Leblanc, 1922) para maximizar a transferência de energia para um bonde. Ao longo da história o número de publicações sobre busca extremal permaneceu baixo até que a primeira prova geral de estabilidade para sistemas dinâmicos estáveis com mapas de saídas desconhecidos foi realizada (Krstić and Wang, 2000). Desde então, importantes estudos foram desenvolvidos, como as publicações (Ariyur and Krstić, 2003), (Ghaffari et al., 2011)) e (Manzie and Krstić, 2009).

* Os autores agradecem as agências de fomento brasileiras CNPq, CAPES e FAPERJ pela ajuda financeira.

O trabalho (Oliveira et al., 2017) foi o primeiro a tratar de equações diferenciais parciais (EDPs) com o esquema da busca extremal abordando o projeto e análise de multivariáveis para mapas estáticos sujeitos a atrasos de tempo arbitrariamente longos. Os atrasos apontados pelos autores podem ser modelados como EDPs hiperbólicas de primeira ordem. Essa ideia possibilitou o desenvolvimento do estudo para outras classes de EDPs.

Por outro lado, um grande número de aplicações em diversas áreas aparecem como problemas de fronteira móvel ou mudança de fase, como (Wettlaufer, 1991) e (Petrus et al., 2012). Normalmente, esses tipos de problemas surgem em situações de condução de calor e precisam ser resolvidos em um domínio dependente do tempo com uma condição de fronteira móvel. Por essa razão, EDPs de difusão com fronteira móvel, conhecidas como “O problema de Stefan” têm sido estudados ativamente nas últimas décadas.

A dinâmica da posição da fronteira móvel no problema de Stefan é governada por uma equação diferencial ordinária (EDO) que depende do estado da EDP, gerando um acoplamento não linear da dinâmica da EDP e da

EDO, aumentando a complexidade do problema quando comparado à análise convencional para EDPs e EDOs.

Neste artigo, desenvolvemos um controlador de busca extremal para o problema de Stefan. O integrador que normalmente é empregado no esquema da busca extremal pode ser aproveitado como parte do modelo de Stefan, assim como o proposto em (Zhang et al., 2007). O objetivo do controle será encontrar a interface maximizadora s^* de algum mapa desconhecido $Q(s^*)$ visando regular a posição da interface de mudança de fase para um valor que atinja o extremo. Para tanto, projetamos um compensador para a EDP do calor com fronteira móvel e um sinal de perturbação, que é o resultado da solução do problema de geração de uma senóide na extremidade distal de uma equação de calor atuada por contorno.

Uma importante discussão é sobre a validação do modelo de Stefan. Embora o movimento senoidal usual provocado pelo algoritmo da busca extremal viole a manutenção da fase quando o extremo é alcançado ou durante a fase transiente, nós podemos manter a manutenção da fase pelo menos para o sistema médio, dessa forma, preservando a análise de convergência.

Este artigo está organizado da seguinte forma. O enunciado do problema é apresentado na Seção 2, contendo a relação do esquema de busca extremal com o problema de Stefan de uma fase. Na Seção 3, o problema relacionado ao controle é desenvolvido. A Seção 4 descreve a análise de estabilidade do sistema médio em malha fechada com convergência exponencial na norma \mathcal{H}_1 da temperatura distribuída e da fronteira móvel para o equilíbrio desejado. Simulações numéricas são fornecidas na Seção 5, seguidas de conclusões na Seção 6.

1.1 Notação e Terminologia

Denotamos as derivadas parciais de uma função $u(x, t)$ como $\partial_x u(x, t) = \partial u(x, t) / \partial x$, $\partial_t u(x, t) = \partial u(x, t) / \partial t$. Usamos convenientemente a forma compacta $u_x(x, t)$ e $u_t(x, t)$ para o primeiro e o último, respectivamente. A norma de um vetor de estado EDO de dimensão finita $\vartheta(t)$ é denotada por barras simples, $|\vartheta(t)|$. Em contrapartida, as normas de funções são indicadas por barras duplas. Denotamos a norma espacial $\mathcal{L}_2[0, D]$ do estado PDE $u(x, t)$ como $\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2([0, D])}^2 := \int_0^D u^2(x, t) dx$, onde descartamos o índice $\mathcal{L}_2([0, D])$, portanto $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}_2([0, D])}$, se não especificado de outra forma. Além disso, a norma \mathcal{H}_1 é dada por $\|u(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 = \|u(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \|u_x(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2$. Conforme definido em (Khalil, 2002), diz-se que uma função vetorial $f(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^n$ é de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ em um intervalo $[t_1, t_2]$, se $\exists k, \bar{\epsilon} : |f(t, \epsilon)| \leq k, \forall t \in [t_1, t_2]$. Na maioria dos casos, não fornecemos estimativas precisas para as constantes k e $\bar{\epsilon}$, e usamos $\mathcal{O}(\epsilon)$ para ser interpretado como uma relação de ordem de magnitude para um ϵ suficientemente pequeno.

2. DECLARAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 Problema de Stefan de uma fase

O modelo físico que descreve o problema de Stefan de uma fase em um material de um único componente de comprimento L é descrito na Figura 1. O domínio $[0, L]$

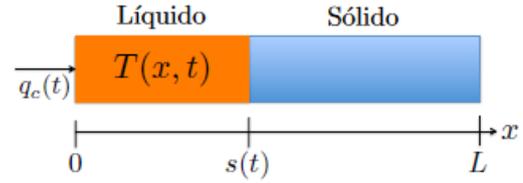


Figura 1. Esquema do problema de Stefan de uma fase (Koga et al., 2016).

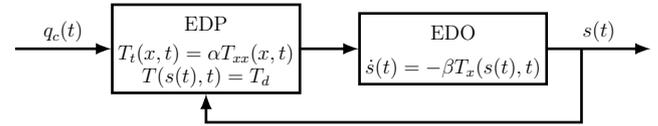


Figura 2. A cascata da dinâmica EDP e o sistema EDO.

é dividido em dois subdomínios $[0, s(t)]$ e $[s(t), L]$ que representam a fase líquida e a fase sólida, respectivamente. O sistema é controlado pelo fluxo de calor $q_c(t)$ em $x = 0$, pois estamos lidando com uma atuação de contorno de Neumann conforme mostrado abaixo:

$$T_t(x, t) = \alpha T_{xx}(x, t), \quad x \in (0, s(t)), \quad \alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (1)$$

$$-kT_x(0, t) = q_c(t) \quad (2)$$

$$T(s(t), t) = T_d \quad (3)$$

$$\dot{s}(t) = -\beta T_x(s(t), t), \quad \beta = \frac{k}{\rho \Delta H^*} \quad (4)$$

onde $T(x, t)$, T_d , $q_c(t)$, k , ρ , C_p e ΔH^* são a temperatura distribuída da fase líquida, temperatura de fusão, fluxo de calor manipulado, condutividade térmica do líquido, densidade do líquido, capacidade térmica do líquido e calor latente de fusão, respectivamente. As equações (2) e (3) são as condições de contorno do sistema e a (4) é a condição de Stefan, que descreve a dinâmica da fronteira móvel. A figura 2 mostra o diagrama de blocos da cascata EDP-EDO representada pelas equações (1)-(4)

2.2 Dinâmica de Atuação e Sinal de Saída

Consideramos a dinâmica de atuação que é descrita por uma equação de calor com $\alpha = \beta = k = 1$, $\theta(t) \in \mathbb{R}$ e o atuador propagado $\Theta(t) \in \mathbb{R}$ dado por

$$\dot{\Theta}(t) = \dot{s}(t) = -\alpha(s(t), t) \quad (5)$$

$$\partial_t \alpha(x, t) = \partial_{xx} \alpha(x, t), \quad x \in (0, s(t)) \quad (6)$$

$$\alpha(s(t), t) = 0 \quad (7)$$

$$-\partial_x \alpha(0, t) = \theta(t), \quad (8)$$

onde $\alpha : [0, s(t)] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha(x, t) = T(x, t) - T_d$ e $s(t) = \Theta(t)$ é a interface desconhecida representada como a fronteira móvel. A saída é medida pelo mapa estático desconhecido com a entrada (5)

$$y(t) = Q(\Theta(t)). \quad (9)$$

O objetivo da busca extremal é otimizar um mapa estático desconhecido $Q(\cdot)$ usando um controle de otimização em tempo real com saída desconhecida ótima y^* e o otimizador Θ^* , bem como a saída mensurável y e a entrada θ .

O mapa linear desconhecido é localmente quadrático, de forma que

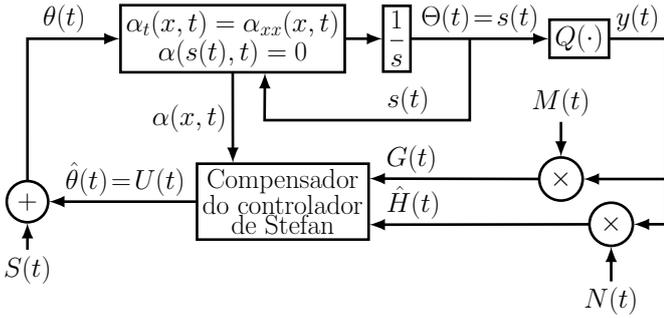


Figura 3. Malha de controle da busca extremal aplicado ao problema de Stefan de uma fase.

$$Q(\Theta) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta - \Theta^*)^2, \quad (10)$$

onde $\Theta^*, y^* \in \mathbb{R}$ e $H < 0$ é a Hessiana. Assim, a saída do mapa estático é dada por

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^2 \quad (11)$$

Adaptando o esquema proposto em (Oliveira et al., 2017) e combinando (5)-(8) com a abordagem da busca extremal, o sistema de malha fechada com dinâmica de atuação é mostrado na Fig. 3.

O sinal de demodulação $N(t)$ que é usado para estimar a Hessiana do mapa estático multiplicando-o com a saída $y(t)$ é definido em (Ghaffari et al., 2011) como

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \text{ com } N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \quad (12)$$

enquanto que o sinal $M(t)$ é usado para estimar o gradiente do mapa estático, como segue abaixo:

$$G(t) = M(t)y(t) \text{ com } M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t). \quad (13)$$

2.3 Sinal de Perturbação

O sinal de perturbação $S(t)$ é adaptado do esquema de busca extremal básico para o caso da dinâmica de atuação da EDP. O problema de geração de trajetória, tendo como referência (Krstić and Smyshlyaev, 2008) é descrito da seguinte forma:

$$S(t) := -\partial_x \beta(0, t) \quad (14)$$

$$\partial_t \beta(x, t) = \partial_{xx} \beta(x, t), \quad x \in (0, s(t)) \quad (15)$$

$$\beta(s(t), t) = 0 \quad (16)$$

$$\beta_x(s(t), t) = -a\omega \cos(\omega t), \quad (17)$$

onde $\beta : [0, s(t)] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. A solução explícita de (14) é encontrada a partir da trajetória de referência e da solução de referência postulada por uma série de potências (Dunbar et al., 2003):

$$\xi(t) = a \sin(\omega t) \quad (18)$$

$$\beta(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i(t)}{i!} [x - \xi(t)]^i. \quad (19)$$

Podemos calcular os primeiros coeficientes da série de potências substituindo as condições de fronteira (16) e (17) em (19), de forma que

$$a_0(t) = 0, \quad a_1 = -\dot{\xi}(t). \quad (20)$$

A expressão geral $a_i(t) = \dot{a}_{i-2}(t) - a_{i-1}(t)\dot{\xi}(t)$ é obtida substituindo (19) em (15). Calculamos a expressão analítica dos quatro primeiros coeficientes da série (19) para verificar como aparecem as sucessivas derivadas de $\xi(t)$

$$a_2(t) = \dot{\xi}(t)^2 \quad (21)$$

$$a_3(t) = \ddot{\xi}(t) - \dot{\xi}(t)^3 \quad (22)$$

$$a_4(t) = \ddot{\xi}(t)^2 + \dot{\xi}(t)\ddot{\xi}(t) + \dot{\xi}(t)^4. \quad (23)$$

A solução de geração de trajetória que fornece todos os termos da série de potências (19) é dada por (Hill, 1967)

$$\beta(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} [x - \xi(t)]^{2i}. \quad (24)$$

Embora (24) não seja uma expressão explícita, escolhendo valores adequados para a e ω em (18), a série converge com poucas iterações do somatório infinito, obtendo o sinal senoidal $\xi(t)$ desejado na saída do integrador.

De acordo com (14), derivando (24) em relação a x e substituindo $x = 0$, chegamos na expressão final de

$$S(t) = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)!} \frac{\partial^i}{\partial t^i} [-a \sin(\omega t)]^{2i-1}. \quad (25)$$

2.4 Erro de estimação e dinâmica do erro da EDP

Como nosso objetivo é encontrar Θ^* , que corresponde ao atuador ótimo desconhecido $\theta(t)$, introduzimos os estimadores e os erros de estimação

$$\hat{\theta}(t) = \theta(t) - S(t), \quad \hat{\Theta}(t) = \Theta(t) - a \sin(\omega t). \quad (26)$$

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \Theta^*, \quad \vartheta(t) := \hat{\Theta}(t) - \Theta^*. \quad (27)$$

Lembrando que $\Theta(t) = s(t)$. Combinando $\hat{\Theta}(t)$ em (26) e (27) obtemos a relação entre o erro de estimativa propagado $\vartheta(t)$, a entrada propagada $\Theta(t)$ e o otimizador do mapa estático Θ^*

$$\Theta(t) - \Theta^* = \vartheta(t) + a \sin(\omega t). \quad (28)$$

Definindo

$$u(x, t) = \alpha(x, t) - \beta(x, t), \quad (29)$$

$$\hat{\theta}(t) = U(t). \quad (30)$$

Levando em consideração (5)-(8) e (14)-(17) com a ajuda de (26) e (27), temos nosso sistema original:

$$\dot{\vartheta}(t) = -u_x(s(t), t) \quad (31)$$

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in (0, s(t)) \quad (32)$$

$$u(s(t), t) = 0 \quad (33)$$

$$-u_x(0, t) = U(t). \quad (34)$$

3. PROJETO DO CONTROLADOR

3.1 Compensação do Problema de Stefan

Consideramos a cascata EDP-EDO (31)-(34) e usamos a transformação *backstepping*

$$w(x, t) = u(x, t) - \bar{K} \int_x^{s(t)} (x - \sigma) u(\sigma, t) d\sigma - \bar{K}(x - s(t))\vartheta(t) \quad (35)$$

sendo $\bar{K} > 0$ um ganho arbitrário do controlador. A equação (35) transforma (31)-(34) no sistema alvo:

$$\dot{\vartheta}(t) = -\bar{K}\vartheta(t) - w_x(s(t), t) \quad (36)$$

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t) + \bar{K}\dot{s}(t)\vartheta(t), \quad x \in (0, s(t)) \quad (37)$$

$$w_x(0, t) = 0 \quad (38)$$

$$w(s(t), t) = 0. \quad (39)$$

O compensador do controlador de Stefan pode ser obtido realizando a derivada de (35) em relação a t e x , respectivamente, ao longo de (31)-(34) e substituindo $x = 0$

$$U(t) = -\bar{K} \left(\vartheta(t) + \int_0^{s(t)} u(x, t) dx \right). \quad (40)$$

3.2 Implementação da lei de controle da busca extremal

Como não temos a medição de $\vartheta(t)$, (40) não é aplicável diretamente. Assim, introduzindo um resultado de (Ghaffari et al., 2011), a versão média do gradiente e a estimativa da Hessiana são calculadas por

$$G_{av}(t) = H\vartheta_{av}(t), \quad \hat{H}_{av}(t) = H. \quad (41)$$

Aplicando a teoria da média em (40), escolhendo $\bar{K} = KH$ com $K < 0$ e substituindo os valores do gradiente médio e da estimativa da Hessiana em (41), obtemos

$$U_{av}(t) = -KG_{av}(t) - KH \int_0^{s(t)} u_{av}(x, t) dx. \quad (42)$$

Introduzimos um filtro passa-baixa no controlador com o objetivo de aplicar o teorema da média para sistemas de dimensões infinitas (Hale and Lunel, 1990), (Lehman et al., 1994) na prova de estabilidade que se segue, portanto

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ K \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_0^{s(t)} u(x, t) dx \right] \right\}, \quad (43)$$

para um $c > 0$ suficientemente grande.

4. ANÁLISE DA ESTABILIDADE

O teorema a seguir resume a estabilidade e a propriedade de convergência da dinâmica do erro (31)-(34).

Teorema 1. Assumindo que as condições de validade do modelo $T_{av}(x, t) > T_m$, $\dot{s}_{av}(t) > 0$, $x \in (0, s_{av}(t))$ e $s_0 < s_{av}(t) < s^*$ são satisfeitas pelo menos em um sistema médio, $\forall t \geq 0$, $s^* = \Theta^*$ e para as condições iniciais $(T_{av}(x, 0), s_0)$ compatíveis com a lei de controle $U(t)$ em (43). Então, para um $c > 0$ suficientemente grande, existe

algum $\bar{\omega} > 0$, tal que $\forall \omega > \bar{\omega}$, a dinâmica do erro (31)-(34) com estados $\vartheta(t)$, $u(x, t)$, tem uma única solução periódica exponencialmente estável em t do período $\Pi := 2\pi/\omega$, denotado por $\vartheta^\Pi(t)$, $u^\Pi(x, t)$, satisfazendo $\forall t > 0$

$$\left(|\vartheta^\Pi(t)|^2 + \|u^\Pi(t)\|^2 + \|u_x^\Pi(t)\|^2 \leq \mathcal{O}(1/\omega) \right). \quad (44)$$

Além disso,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}(|a| + 1/\omega) \quad (45)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(|a|^2 + 1/\omega^2) \quad (46)$$

Prova: A prova é realizada nas Seções (4.1)-(4.4).

4.1 Sistema médio em malha fechada

A versão média do sistema (31)-(34) é

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = -(u_{av})_x(s_{av}(t), t) \quad (47)$$

$$(u_{av})_t(x, t) = (u_{av})_{xx}(x, t), \quad x \in (0, s_{av}(t)) \quad (48)$$

$$u_{av}(s_{av}(t), t) = 0 \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_{av})_x(0, t) &= -c(u_{av})_x(0, t) + \\ &- cKH \left[\vartheta_{av}(t) + \int_0^{s_{av}(t)} u_{av}(x, t) dx \right] \end{aligned} \quad (50)$$

no qual o filtro passa-baixa é representado na forma de espaço de estados. Para derivar (50), nós substituímos as relações $\vartheta(t) + a \sin(\omega t) = \Theta(t) - \Theta^*$, $G(t) = M(t)y(t)$ e (12) em (43). Com a ajuda das identidades $2 \sin^2(\omega t) = 1 - \cos(2\omega t)$, $2 \sin(\omega t) \cos(2\omega t) = \sin(3\omega t) - \sin(\omega t)$, $4 \sin^3(\omega t) = 3 \sin(\omega t) - \sin(3\omega t)$ e $4 \sin^2(\omega t) \cos(2\omega t) = 2 \cos(2\omega t) - \cos(4\omega t) - 1$ e aplicando a teoria da média, chegamos a (50).

A transformação *backstepping*

$$w(x, t) = u_{av}(x, t) - KH \int_x^{s_{av}(t)} (x - \sigma) u_{av}(\sigma, t) dy - KH(x - s_{av}(t))\vartheta_{av}(t) \quad (51)$$

mapeia a dinâmica do erro média (47)-(50) no sistema alvo exponencialmente estável após assumir $c \rightarrow +\infty$ por uma questão de simplicidade, consequentemente

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = -KH\vartheta_{av}(t) - w_x(s_{av}(t), t), \quad x \in (0, s_{av}(t)) \quad (52)$$

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t) + KH\dot{s}_{av}(t)\vartheta_{av}(t) \quad (53)$$

$$w_x(0, t) = 0 \quad (54)$$

$$w(s_{av}(t), t) = 0. \quad (55)$$

4.2 Transformação inversa

Para garantir a propriedade de estabilidade equivalente entre o sistema alvo e o sistema original, a invertibilidade da transformação (51) precisa ser garantida. Suponha que a transformação inversa mapeia (52)-(55) em (47)-(50):

$$u_{av}(x, t) = w(x, t) + \int_x^{s_{av}(t)} k(x - \sigma)w(\sigma, t) d\sigma + \phi(x - s_{av}(t))\vartheta_{av}(t), \quad (56)$$

onde $k(x - y)$ e $\phi(x - s_{av}(t))$ são as funções do kernel. Realizando a derivada em relação a t e x respectivamente

ao longo da solução de (52)-(55), as funções $\phi(x)$ e $k(x-\sigma)$ devem satisfazer:

$$\phi''(x) = -KH\phi(x), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = KH \quad (57)$$

$$k(x - s_{av}(t)) = \phi(x - s_{av}(t)) \quad (58)$$

$$\phi'(x - s_{av}(t)) = KH \left(1 + \int_x^{s_{av}(t)} k(x - \sigma) d\sigma \right). \quad (59)$$

As soluções dos kernels podem ser deduzidas de (57)-(59), tal que

$$\phi(x) = KH \sqrt{\frac{1}{KH}} \sin \sqrt{KH} x \quad (60)$$

$$k(x - y) = \phi(x - \sigma). \quad (61)$$

Assim, substituindo (60) e (61) em (56), temos a seguinte transformação inversa:

$$\begin{aligned} u_{av}(x, t) = & w(x, t) + \\ & + \int_x^{s_{av}(t)} KH \sqrt{\frac{1}{KH}} \sin(\sqrt{KH}(x - \sigma)) w(\sigma, t) d\sigma + \\ & + KH \sqrt{\frac{1}{KH}} \sin(\sqrt{KH}(x - s_{av}(t))) \vartheta_{av}(t). \end{aligned} \quad (62)$$

4.3 Estabilidade Exponencial

Provamos a estabilidade exponencial do sistema de malha fechada médio baseado no sistema alvo (47)-(50) usando o método de Lyapunov. Consideramos a seguinte função de Lyapunov:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (63)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^{s_{av}(t)} w(x, t)^2 dx \quad (64)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^{s_{av}(t)} w_x(x, t)^2 dx \quad (65)$$

$$V_3 = \rho \frac{1}{2} \vartheta_{av}(t)^2. \quad (66)$$

Derivando (64) em relação a t :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & - \int_0^{s_{av}(t)} w_x(x, t)^2 dx + \\ & + KH \dot{s}_{av}(t) \vartheta_{av}(t) \int_0^{s_{av}(t)} w(x, t) dx. \end{aligned} \quad (67)$$

Derivando (65) em relação a t :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & w_x(s_{av}(t), t) w_t(x, t) + \frac{1}{2} \dot{s}_{av}(t) w_x(s_{av}(t), t)^2 \\ & - KH \dot{s}_{av}(t) \vartheta_{av}(t) w_x(s_{av}(t), t) - \int_0^{s_{av}(t)} w_{xx}(x, t)^2 dx. \end{aligned} \quad (68)$$

Usando a relação $w_t(s_{av}(t), t) = -\dot{s}_{av}(t) w_x(s_{av}(t), t)$ e substituindo por (68), nós obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & - \int_0^{s_{av}(t)} w_{xx}(x, t)^2 dx - \frac{1}{2} \dot{s}_{av}(t) w_x(s_{av}(t), t)^2 \\ & - KH \dot{s}_{av}(t) \vartheta_{av}(t) w_x(s_{av}(t), t). \end{aligned} \quad (69)$$

Derivando (66) em relação a t , nos leva a

$$\dot{V}_3 = -\rho KH \vartheta_{av}(t)^2 - \rho \vartheta_{av}(t) w_x(s_{av}(t), t). \quad (70)$$

Substituindo os termos (67), (69) e (70) na derivada temporal de (63) e usando a desigualdade de Young em $\rho \vartheta_{av}(t) w_x(s_{av}(t), t)$, $KH \dot{s}_{av}(t) \vartheta_{av}(t) \int_0^{s_{av}(t)} w(x, t) dx$ e $-KH \dot{s}_{av}(t) \vartheta_{av}(t) w_x(s_{av}(t), t)$, temos

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \int_0^{s_{av}(t)} w_{xx}(x, t)^2 dx - \int_0^{s_{av}(t)} w_x(x, t)^2 dx + \\ & - \frac{\rho KH}{2} \vartheta_{av}(t)^2 + \frac{\rho}{2KH} w_x(s_{av}(t), t)^2 + \\ & + \dot{s}_{av}(t) \left(\frac{s^*}{2} \int_0^{s_{av}(t)} w(x, t)^2 dx + (KH)^2 \vartheta_{av}(t)^2 \right). \end{aligned} \quad (71)$$

Escolhendo $\rho = \frac{KH}{4s^*}$ e aplicando as desigualdades de Poincaré e Agmon respectivamente em $\int_0^{s_{av}(t)} w_x(x, t)^2 dx$ and $w_x(s_{av}(t), t)^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \frac{1}{8s^{*2}} \int_0^{s_{av}(t)} w_x(x, t)^2 dx - \frac{1}{4s^{*2}} \int_0^{s_{av}(t)} w(x, t)^2 dx \\ & + \dot{s}_{av}(t) \left(\frac{s^*}{2} \int_0^{s_{av}(t)} w(x, t)^2 dx + (KH)^2 \vartheta_{av}(t)^2 \right) \\ & - \frac{\rho KH}{2} \vartheta_{av}(t)^2 \leq -mV + n\dot{s}_{av}(t)V, \end{aligned} \quad (72)$$

onde

$$n = \max \{1, 8s^*KH\}, \quad m = \min \{1/4s^{*2}, KH\}. \quad (73)$$

O termo $n\dot{s}_{av}(t)V$ do lado direito de (72) não nos permite concluir diretamente a estabilidade exponencial, para resolver esse problema, uma nova função de Lyapunov W é definida, de acordo com

$$W(t) = V(t)e^{-ms_{av}(t)}. \quad (74)$$

A derivada de tempo de (74) pode ser calculada usando (72)

$$\dot{W}(t) = (\dot{V}(t) - m\dot{s}_{av}(t)V(t))e^{-ms_{av}(t)} \leq -nW(t). \quad (75)$$

Levando em consideração (63), podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\|w\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \rho \vartheta_{av}(t)^2 \leq e^{ms^*} (\|w_0\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \rho \vartheta_{av}(0)^2) e^{-nt}. \quad (76)$$

Assim, podemos concluir a existência de uma constante positiva $M > 0$ usando a transformação inversa (51) combinada com as desigualdades de Young e Cauchy-Schwarz, tal que

$$\|u_{av}\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \vartheta_{av}(t)^2 \leq M (\|(u_{av})_0\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \vartheta_{av}(0)^2) e^{-nt}, \quad (77)$$

no qual completa essa parte da prova.

4.4 Convergência assintótica para o ponto extremo

O próximo passo da prova será a aplicação do teorema da média local para sistemas de dimensão infinita (Hale and Lunel, 1990). Para ω suficientemente grande, (47)-(50) tem uma única solução periódica exponencialmente estável em torno de seu equilíbrio. A convergência do atuador propagado $\Theta(t)$ é provada partindo do valor absoluto de (28)

$$|\Theta(t) - \Theta^*| = |\vartheta(t) + a \sin(\omega t)| \quad (78)$$

Escrevendo (78) em termos de solução periódica $\vartheta^{\text{II}}(t)$, aplicando a desigualdade de Young e usando o teorema da média (Hale and Lunel, 1990):

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \sqrt{2} \vartheta^{\text{II}}(t) + a \sin(\omega t) \right|. \quad (79)$$

e finalmente com (44) chegamos a (45)

Para mostrar a convergência da saída $y(t)$ seguimos os mesmos passos de $\Theta(t)$, inserindo (11) em (28):

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \sqrt{2} H \vartheta^{\text{II}}(t) + H a^2 \sin(\omega t)^2 \right|, \end{aligned} \quad (80)$$

Assim, novamente com (44), obtemos (46).

5. SIMULAÇÕES

A simulação numérica emprega o mapa quadrático descrito em (10) e os parâmetros são escolhidos conforme indicado na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros de simulação

	Símbolo	Descrição	Valor
Parâmetros do controlador	a	amplitude da perturbação	0.1
	K	ganho do controlador	-0.1
	ω	frequência da perturbação [rad/s]	10
	c	polo do filtro passa-baixa [rad/s]	10
Parâmetros do sistema	L	domínio espacial	1
	Θ^*	otimizador do mapa estático	0.8
	y^*	valor ótimo do mapa estático	4
	H	Hessiana do mapa estático	-1
	s_0	interface inicial [m]	0.1
	T_0	temperatura inicial [°C]	110
	T_d	temperatura de derretimento [°C]	100

A Figura 4 corresponde ao gráfico do perfil de temperatura para o sistema em malha fechada convergindo em um espaço tridimensional (levando em consideração o domínio L e o tempo t) para uma vizinhança de T_d .

A Figura 5 mostra a convergência da fronteira móvel para o otimizador Θ^* . O movimento senoidal de $s(t)$ violaria as condições usuais para o problema de Stefan, no qual a temperatura permaneceria acima ou abaixo da temperatura de derretimento em todo o intervalo $[0, s(t)]$, formando uma cadeia periódica de líquido e sólido. No entanto, como o problema ocorre apenas no ponto extremo e em sua vizinhança, nós poderíamos redesenhar o algoritmo para introduzir sinais de excitação e diminuir a perturbação após a vizinhança extrema ser alcançada, como estudado

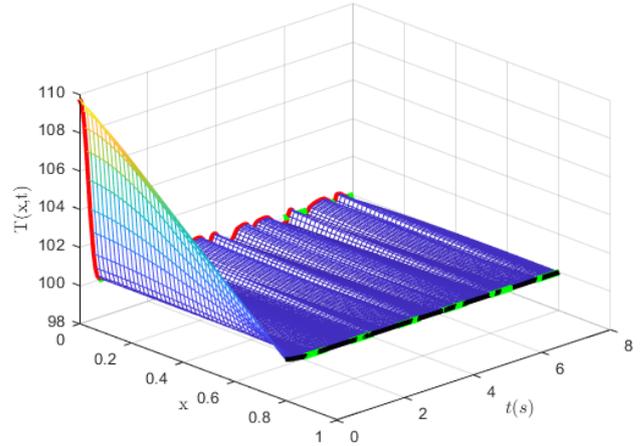


Figura 4. Convergência de $T(0,t)$ (curva vermelha) e $T(s(t),t)$ (curva preta) para T_d (curva verde) em um espaço tridimensional para o estado da EDO $T(x,t)$.

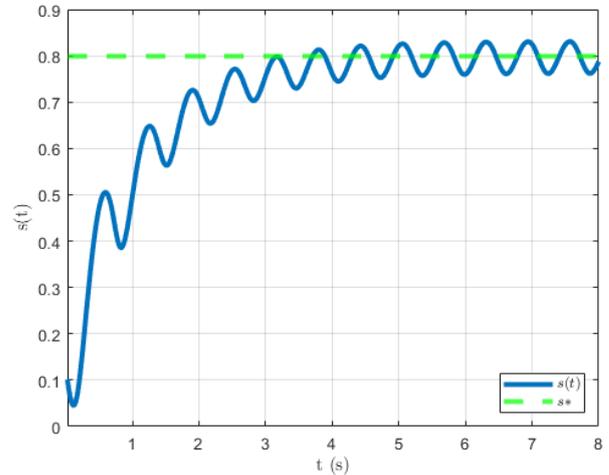


Figura 5. Convergência de $s(t)$.

em (Scheinker and Krstić, 2014), (Wang et al., 2016) e (Dürr et al., 2013).

Por fim, as Figuras 6 e 7 mostram a convergência da saída $y(t)$ para y^* e $U(t)$ para 0, respectivamente.

6. CONCLUSÕES

A metodologia proposta consegue maximizar o mapa estático buscando o ponto extremo mesmo na presença de uma EDP de Stefan com fronteira móvel. Embora a dinâmica de atuação deva ser conhecida, nenhuma informação é assumida a partir dos parâmetros do mapa. A lei de controle média para compensar a dinâmica de atuação empregou a metodologia *backstepping*. Por fim, a estabilidade exponencial local e a convergência para uma pequena vizinhança do extremo foram garantidas.

Considerando o movimento senoidal de $s(t)$, os ciclos limite podem ser completamente eliminados evitando violar a validade do princípio máximo no problema de Stefan, conforme proposto em (Wang et al., 2016), onde o esforço

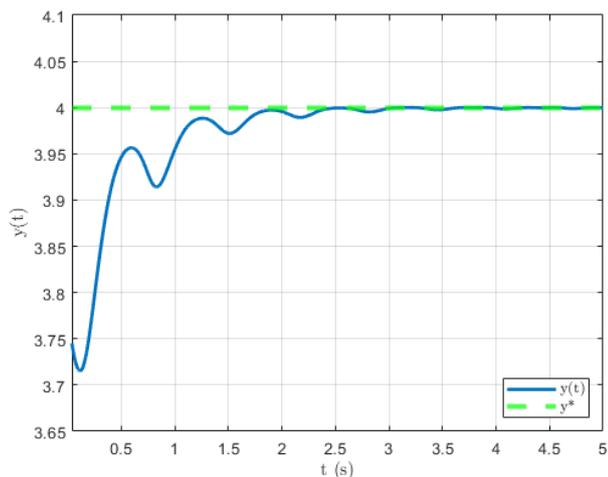


Figura 6. Convergência da saída $y(t)$ para y^* .

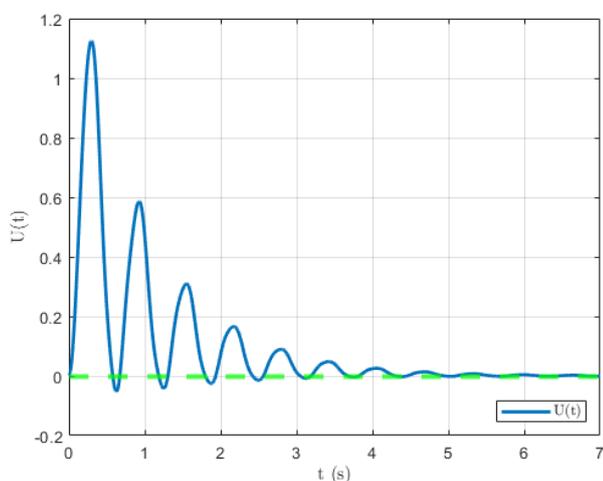


Figura 7. Convergência do sinal de controle $U(t)$ para 0.

do controlador baseados na busca extremal desaparece à medida que o sistema se aproxima do equilíbrio. Em (Scheinker and Krstić, 2014) e (Dürr et al., 2013) o mesmo objetivo foi proposto com a busca extremal baseado em colchetes de Lie. Essa é realmente uma boa ideia para futuras investigações.

REFERÊNCIAS

- Ariyur, K. and Krstić, M. (2003). Real-time optimization by extremum-seeking control. Wiley-Interscience.
- Dunbar, W.B., Petit, N., Rouchon, P., and Martin, P. (2003). Motion planning for a nonlinear Stefan problem. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9(2003), 275–296.
- Dürr, H.B., Stanković, M.S., Ebenbauer, C., and Johansson, K.H. (2013). Lie bracket approximation of extremum seeking systems. *Automatica*, 49(6), 1538–1552.
- Ghaffari, A., Krstić, M., and Nesić, D. (2011). Multivariable Newton-based extremum seeking. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 4436–4441. Orlando, USA.

- Hale, J. and Lunel, S.V. (1990). Averaging in infinite dimensions. *The Journal of integral equations and applications*, 2(4), 463–494.
- Hill, C.D. (1967). Parabolic equations in one space variable and the non-characteristic Cauchy problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 20(3), 619–633.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall.
- Koga, S., Diagne, M., Tang, S., and Krstić, M. (2016). Backstepping control of the one-phase Stefan problem. *2016 American Control Conference (ACC)*, 2548–2553. Boston, USA.
- Krstić, M. and Smyshlyaev, A. (2008). Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs. SIAM.
- Krstić, M. and Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 36(4), 595–601.
- Leblanc, M. (1922). Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée. *Revue Generale de l'Electricite*, 12(8), 275,277.
- Lehman, B., Bentsman, J., Lunel, S.V., and Verriest, E.I. (1994). Vibrational control of nonlinear time lag systems with bounded delay: averaging theory, stabilizability, and transient behavior. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5), 898–912.
- Manzie, C. and Krstić, M. (2009). Extremum seeking with stochastic perturbations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(3), 580–585.
- Oliveira, T.R., Krstić, M., and Tsubakino, D. (2017). Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(4), 1911–1926.
- Petrus, B., Bentsman, J., and Thomas, B.G. (2012). Enthalpy-based feedback control algorithms for the Stefan problem. *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 7037–7042. Maui, USA.
- Scheinker, A. and Krstić, M. (2014). Non- C^2 lie bracket averaging for nonsmooth extremum seekers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 136(1).
- Wang, L., Chen, S., and Ma, K. (2016). On stability and application of extremum seeking control without steady-state oscillation. *Automatica*, 68(1), 18–26.
- Wettlaufer, J. (1991). Heat flux at the ice-ocean interface. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 96(C4), 7215–7236.
- Zhang, C., Siranosian, A., and Krstić, M. (2007). Extremum seeking for moderately unstable systems and for autonomous vehicle target tracking without position measurements. *Automatica*, 43(10), 1832–1839.