

# Controle Distribuído para Sistemas Não Lineares Interconectados Sujeitos a Retardos Variantes no Tempo nas Interconexões<sup>\*</sup>

Paulo S. P. Pessim<sup>\*</sup> Pedro H. S. Coutinho<sup>\*</sup> Iury Bessa<sup>\*,\*\*</sup>  
Márcia L. C. Peixoto<sup>\*</sup> Márcio J. Lacerda<sup>\*\*\*</sup>  
Reinaldo M. Palhares<sup>\*\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil

(e-mails: {ppessim, phcoutinho, marciapeixoto}@ufmg.br)

<sup>\*\*</sup> Departamento de Eletricidade, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, Brasil (e-mail: iurybessa@ufam.edu.br)

<sup>\*\*\*</sup> Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de São João del-Rei, Minas Gerais, Brasil, (e-mail: lacerda@ufsj.edu.br)

<sup>\*\*\*\*</sup> Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil (e-mail: rpalhares@ufmg.br)

---

**Abstract:** This paper addresses the problem of distributed control design for nonlinear interconnected systems with time-varying delays in the interconnections. A new sufficient condition for the stabilization of interconnected systems based on the Lyapunov theory and considering that the nonlinear interconnections are sector bounded in the polytopic domain is presented. Numerical simulations illustrate the efficiency of the proposed approach in guaranteeing the asymptotic stability of the overall interconnected system.

**Resumo:** Este artigo aborda o problema de controle distribuído para sistemas não lineares interconectados sujeitos a retardo variante no tempo entre as interconexões. Apresenta-se uma nova condição suficiente para a estabilização do sistema interconectado em malha fechada baseado na teoria de Lyapunov e considerando que as interconexões não lineares são limitadas por setor contido em um domínio politópico. Simulações numéricas ilustram a eficiência do método proposto em garantir a estabilidade assintótica do sistema interconectado global.

*Keywords:* Distributed control; Interconnected nonlinear systems; Time-varying delays.

*Palavras-chaves:* Controle distribuído; Sistemas não lineares interconectados; Atraso variante no tempo.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas de grande escala são caracterizados pela interconexão de diversos subsistemas que podem estar espacialmente distantes uns dos outros (Chanfreut et al., 2021). Esta classe de sistemas pode representar sistemas como microrredes, redes de transporte, e sistemas de distribuição de energia e água (Huong et al., 2021).

As estratégias de controle empregadas em sistemas interconectados são usualmente divididas em três categorias: controle centralizado, descentralizado e distribuído. Na estrutura de controle centralizado, apenas um controlador tem acesso às informações de todos os subsistemas, sendo então o responsável pela tomada de decisões sobre o funcionamento do sistema global. Por outro lado, a estrutura de controle descentralizado é constituída por um conjunto de controladores locais que possuem acesso apenas às informações do seu respectivo subsistema, ou seja, não

existe a troca de informações entre esses controladores. Por fim, o controle distribuído também considera um conjunto de controladores locais, mas neste caso existe a troca de informações entre os controladores (Ge et al., 2017).

Em geral, a implementação de estruturas de controle centralizado requer elevados recursos computacionais e de comunicação (Chanfreut et al., 2021). Apesar da redução de recursos necessários e complexidade do projeto no caso de controle descentralizado, a ausência de comunicação entre os nós pode levar a perdas de desempenho no sistema global devido às características de atuação local. Neste sentido, estratégias de controle distribuído oferecem uma alternativa de compromisso entre o desempenho e os recursos necessários para sua implementação. Além disso, como este tipo de estratégia de controle limita a comunicação dos subsistemas à vizinhança, ela promove maior modularidade e escalabilidade em comparação com o controle centralizado, e maior robustez em comparação com o controle descentralizado. (Ge et al., 2017). Exemplos de aplicações de controle distribuído incluem a estabilização de um pelotão de veículos com dinâmica não linear (Dun-

---

<sup>\*</sup> Esse trabalho foi financiado pelo CNPq (307933/2018-0; 164692/2020-7; 141252/2021-9; 315538/2021-0), CAPES (Código de financiamento 001) e CAPES/FAPEAM (88887.199399/2018-00).

bar e Caveney, 2012), controle baseado em eventos de subsistemas não lineares incertos interconectados, com base em aprendizado por reforço online (Narayanan e Jagannathan, 2018), e a estabilização de um sistema de potência multi-máquinas considerando distúrbios aditivos limitados e interconexões não lineares, por meio de um projeto de controle preditivo distribuído baseado em modelo acionado por eventos (Zhou et al., 2022).

Frequentemente, processos industriais que dependem da transmissão de informações podem induzir, de maneira intrínseca, efeitos de retardo no tempo em sua dinâmica (De Souza et al., 2022). A existência do retardo, caso não seja tratada corretamente, pode causar em perdas de desempenho, oscilações indesejadas e, em casos extremos, ocasionar um comportamento instável (Peixoto et al., 2020, 2022). No contexto de sistemas interconectados, a interconexão física entre os subsistemas muitas vezes representa fenômenos como transferência de matéria e energia, cujos efeitos podem ser representados por retardos de tempo induzidos (Yan et al., 2012). Apesar de ser necessário considerar os efeitos de retardo nas interconexões, há poucos trabalhos que tratam desta questão, especialmente para controle distribuído, sendo mais usual o projeto de controladores descentralizados para sistemas interconectados sujeitos a retardo nas interconexões (ver Choi e Yoo (2016); Wu et al. (2020); Tlili (2021) e suas referências). No caso distribuído, Bijami e Farsangi (2018) abordaram o projeto de controladores com memória para sistemas de grande escala com subsistemas lineares a tempo discreto sujeitos a retardo no tempo, tanto nos estados dos subsistemas, quanto nas interconexões entre eles. Nota-se ainda que abordagens considerando subsistemas não lineares são ainda mais escassas na literatura.

Uma maneira adequada de tratar problemas de análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas não lineares é considerar modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS)/quasi-LPV (Coutinho et al., 2019, 2022) para representação politópica de dinâmicas não lineares. No contexto de sistemas interconectados, em Hsiao (2018), um esquema de controle *fuzzy* descentralizado é proposto considerando a presença de múltiplos retardos na descrição do sistema. Em Zhong e Zhu (2018), o controlador distribuído com dados amostrados é projetado para subsistemas representados por modelos *fuzzy* TS. Apesar das vantagens de se utilizar modelos *fuzzy* TS/quasi-LPV, as descrições politópicas se tornam excessivamente complexas em sistemas de larga escala devido ao número elevado de vértices. A modelagem *fuzzy* TS com consequente não linear (N-TS) é proposta para evitar esse problema (Dong et al., 2011; Coutinho et al., 2020), de modo que não linearidades de setor são consideradas diretamente na dinâmica do modelo, em vez de representá-las em termos de vértices do politopo. A ideia de modelos N-TS foi empregada por Araújo et al. (2021) e Araújo et al. (2022) para representar sistemas com interconexões não lineares, reduzindo a complexidade da descrição politópica do sistema global.

Diante do exposto, este trabalho trata do projeto de controladores distribuídos para sistemas não lineares interconectados sujeitos a retardos variantes no tempo nas interconexões. A dinâmica de cada subsistema não linear é descrita por um modelo politópico. Além disso, assumindo que as interconexões não lineares são limitadas por setor,

uma descrição similar à empregada por Araújo et al. (2021) e Araújo et al. (2022) é utilizada. Com isso, condições suficientes são fornecidas para realizar o projeto do controlador distribuído que garante a estabilidade assintótica do equilíbrio do sistema em malha fechada. Claramente esta linha de ação é consequência de pesquisa já iniciada em Araújo et al. (2021) e Araújo et al. (2022).

*Notação:*  $\mathbb{N}_{\leq m} = \{1, \dots, m\}$ ;  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$  denota o domínio booleano;  $\text{diag}(A, B)$  denota uma matriz bloco diagonal cujos elementos são  $A, B$  e  $\bigoplus_{i=1}^n A_i = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ ;  $\text{He}(X) \triangleq X + X^\top$ . Dados vetores  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ , define-se  $(x_1, \dots, x_N) = [x_1^\top, \dots, x_N^\top]^\top \in \mathbb{R}^n$ , onde  $n = \sum_{i=1}^N n_i$ . Denota-se  $x_t : [-\tau_1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  como o segmento  $x_i(s) = x(t+s)$ ,  $s \in [-\tau_1, 0]$ . O espaço de funções absolutamente contínuas  $\varphi : [-\tau_1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  com derivada quadrado-integrável é denotado por  $\mathcal{C}_{\tau_1}^n$ .

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema de controle distribuído  $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ , em que  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_N\}$  é o conjunto de subsistemas não lineares e  $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_N\}$  o conjunto de controladores locais. As interconexões entre os subsistemas são representadas por um grafo não-direcionado  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , sendo  $\mathcal{V}$  o conjunto de vértices e  $\mathcal{E} = \{e_{ij} = (i, j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$  o conjunto de arestas que indicam a conexão entre os subsistemas  $\mathcal{P}_i$  e  $\mathcal{P}_j$ . O conjunto de subsistemas conectados a um subsistema  $i$  é  $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : (j, i) \in \mathcal{E}\}$ . Além disso, assume-se que o conjunto de controladores locais  $\mathcal{C}$  também está interconectado conforme o grafo  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ . A matriz de adjacência do grafo  $\mathcal{G}$  é  $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ , sendo

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \text{ ou } e_{ij} \notin \mathcal{E} \\ 1, & \text{se } e_{ij} \in \mathcal{E}, \end{cases}$$

e a matriz de graus é  $\mathcal{D} = \bigoplus_{i=1}^N d_i$ , com  $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ .

### 2.1 Dinâmica dos subsistemas

Cada subsistema dinâmico não linear é descrito por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i: \dot{x}_i(t) &= A_i(z_i(x_i(t)))x_i(t) + B_i(z_i(x_i(t)))u_i(t) \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} g_{ij}(x_i(t), x_j(t-\tau(t))) \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  é o estado,  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  a entrada de controle,  $z_i = (z_{i1}, \dots, z_{ip_i}) \in \mathbb{R}^{p_i}$  o vetor de funções de escalonamento contínuas e dependentes dos estados  $z_{ik} : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{p_i}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}_{\leq p_i}$ ,

$$g_{ij}(x_i, x_j) = F_{ij}x_j + G_{ij}(z_i(x_i))\phi_{ij}(x_i, x_j) \quad (2)$$

é a função que modela a interconexão entre os subsistemas  $\mathcal{P}_j$  e  $\mathcal{P}_i$  com termos lineares  $F_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$  e não lineares  $\phi_{ij} : \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\phi_{ij}}}$ , e  $\tau(t)$  é o retardo variante no tempo induzido na interconexão entre  $\mathcal{P}_j$  e  $\mathcal{P}_i$ .

**Hipótese 1.** As interconexões entre todos os subsistemas estão sujeitas ao mesmo retardo variante no tempo  $\tau(t)$  que é diferenciável e satisfaz a

$$\tau_0 \leq \tau(t) \leq \tau_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Com base na Hipótese 1, a condição inicial para o subsistema  $\mathcal{P}_i$  em (1) é denotada por

$$x_i(s) = \varphi_i(s), \quad \forall s \in [-\tau_1, 0], \quad (4)$$

sendo  $\varphi_i \in \mathcal{C}_{\tau_1}^{n_i}$  o conjunto de condições iniciais.

O  $i$ -ésimo controlador local é dado por

$$\mathcal{C}_i: u_i(t) = K_i(z_i(x_i(t)))x_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} L_{ij}x_j(t), \quad (5)$$

sendo  $K_i: \mathbb{R}^{p_i} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$  ganhos dependentes do parâmetro que correspondem ao termo descentralizado da lei de controle e  $L_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}$  são ganhos constantes em relação aos estados dos subsistemas adjacentes. Note que (5) não está sujeito a retardos  $\tau(t)$ , pois estes são induzidos somente nas interconexões físicas entre os subsistemas.

Definindo

$$\phi_i(x) = (\phi_{ik_1}(x_i, x_{k_1}), \dots, \phi_{ik_{d_i}}(x_i, x_{k_{d_i}})) \quad (6)$$

para  $k_\ell \in \mathcal{N}_i, \forall \ell \in \mathbb{N}_{\leq d_i}$ , o sistema  $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$  pode ser então representado como <sup>1</sup>:

$$\dot{x}(t) = A(z(t))x(t) + G(z(t))\phi(\chi(t - \tau(t))) + Hx(t - \tau(t)) + B(z(t))u(t) \quad (7)$$

$$u(t) = K(z(t))x(t) + Zx(t) \quad (8)$$

$$x(s) = \varphi(s), \quad \forall s \in [-\tau_1, 0], \quad (9)$$

em que  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^n, u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^m, z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^p, \phi(\chi) = (\phi_1(\chi_1), \dots, \phi_N(\chi_N)) \in \mathbb{R}^{n_\phi}, n_\phi = \sum_{i=1}^N d_i, \chi = (\chi_1, \dots, \chi_N) \in \mathbb{R}^{Nn}, \chi_i(t - \tau(t)) \triangleq (\underline{x}_i(t - \tau(t)), x_i(t), \bar{x}_i(t - \tau(t))) \in \mathbb{R}^n, \underline{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}) \in \mathbb{R}^{n_i}, \bar{x}_i = (x_{i+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{\bar{n}_i}, \bar{n}_i \triangleq n - \sum_{k=i}^N n_k, \bar{n} \triangleq n - \sum_{k=1}^i n_k, \varphi \in \mathcal{C}_{\tau_1}^n$  é o conjunto de condições iniciais,  $A(z) = \bigoplus_{i=1}^N A_i(z_i), B(z) = \bigoplus_{i=1}^N B_i(z_i), K(z) = \bigoplus_{i=1}^N K_i(z_i),$  e  $G(z) = \bigoplus_{i=1}^N G_i(z_i),$  com

$$G_i(z_i) = [G_{ik_1}(z_i) \dots G_{ik_{d_i}}(z_i)],$$

para  $k_\ell \in \mathcal{N}_i, \ell \in \mathbb{N}_{\leq d_i},$  sendo os elementos de  $H = [H_{ij}]$  e  $Z = [Z_{ij}]$ , para todo  $i, j \in \mathcal{V},$  definidos de maneira semelhante à matriz de adjacência  $\mathcal{A}$

$$H_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } a_{ij} = 0, \\ F_{ij}, & \text{se } a_{ij} = 1, \end{cases} \quad Z_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } a_{ij} = 0, \\ L_{ij}, & \text{se } a_{ij} = 1. \end{cases} \quad (10)$$

**Nota 2.** O vetor  $\chi_i(\cdot) = (\underline{x}_i(\cdot), x_i(t), \bar{x}_i(\cdot))$  representa interconexões não lineares do  $i$ -ésimo subsistema que dependem dos estados atrasados dos subsistemas adjacentes.

Ao substituir (8) em (7), obtém-se a dinâmica em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = A_{cl}(z(t))x(t) + Hx(t - \tau(t)) + G(z(t))\phi(\chi(t - \tau(t))), \quad (11)$$

sendo  $A_{cl}(z) \triangleq A(z) + B(z)K(z) + B(z)Z$  e o conjunto de condições iniciais é o mesmo que o definido em (9).

## 2.2 Representação politópica do sistema interconectado

Dados politopos convexos  $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, i \in \mathcal{V},$  contendo a origem  $x_i = 0$  de  $\mathbb{R}^{n_i},$  há escalares  $z_{ik}^0 = \inf_{x_i \in \mathcal{D}_i} z_{ik}$  e  $z_{ik}^1 = \sup_{x_i \in \mathcal{D}_i} z_{ik}$  tais que  $z_{ik}^0 \leq z_{ik} \leq z_{ik}^1, k \in \mathbb{N}_{\leq p_i}.$  Considere  $w_0^{ik}(z_{ik}) = (z_{ik}^1 - z_{ik}) / (z_{ik}^1 - z_{ik}^0)$  e  $w_1^{ik}(z_{ik}) = 1 - w_0^{ik}(z_{ik}),$  funções de ponderação que são definidas de modo que cada função de escalonamento  $z_{ik}$  seja dada (de maneira equivalente) pela combinação convexa:

<sup>1</sup> Para simplificar a notação, a dependência dos estados das funções de escalonamento  $z_i(x_i(t))$  é omitida e, e daqui em diante, denota-se simplesmente por  $z_i(t).$

$z_{ik} = w_0^{ik}(z_{ik})z_{ik}^0 + w_1^{ik}(z_{ik})z_{ik}^1.$  Definindo-se os parâmetros dependes do estado (Nguyen et al., 2019) da forma:

$$\alpha_{\mathbf{i}_i}(z_i) = \prod_{k=1}^{p_i} w_k^{ik}(z_{ik}), \quad (12)$$

é possível verificar que

$$\sum_{\mathbf{i}_i \in \mathbb{B}^{p_i}} \alpha_{\mathbf{i}_i}(z_i) = 1 \text{ e } \alpha_{\mathbf{i}_i}(z_i) \geq 0, \forall \mathbf{i}_i \in \mathbb{B}^{p_i}, \forall z_i \in \mathcal{D}_i. \quad (13)$$

Aplicando-se o mesmo procedimento para todos os subsistemas, é possível representar as matrizes dependentes do estado no sistema global (7)–(8) como:

$$A(z) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^p} \alpha_{\mathbf{i}}(z)A_{\mathbf{i}}, \quad B(z) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^p} \alpha_{\mathbf{i}}(z)B_{\mathbf{i}}, \quad (14)$$

$$G(z) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^p} \alpha_{\mathbf{i}}(z)G_{\mathbf{i}}, \quad K(z) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^p} \alpha_{\mathbf{i}}(z)K_{\mathbf{i}},$$

para todo  $x \in \mathcal{D},$  em que  $\mathbf{i} = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N)$  é um multi-índice em  $\mathbb{B}^p,$  sendo  $\mathbb{B}^p = \mathbb{B}^{p_1} \times \dots \times \mathbb{B}^{p_N}, \alpha_{\mathbf{i}}(x) = \alpha_{\mathbf{i}_1}(x_1) \dots \alpha_{\mathbf{i}_N}(x_N),$  e  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_N.$

## 2.3 Condição de setor das interconexões não lineares

Como em Araújo et al. (2022), assume-se que as não linearidades  $\phi_i(x)$  satisfazem à hipótese a seguir.

**Hipótese 3.** Cada não linearidade  $\phi_i: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{d_i}, i \in \mathcal{V},$  pertence ao setor  $[0, \Omega_i].$

O Lema abaixo segue da Hipótese 3 e será utilizado para obter condições de projeto do controlador distribuído.

**Lema 4.** (Araújo et al. (2022)). Se  $\phi_i: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{d_i}$  pertence ao setor  $[0, \Omega_i],$  então a condição a seguir é verdadeira

$$S_i(x, \Lambda_i) \triangleq \phi_i^\top(x) \Lambda_i^{-1} (\phi_i(x) - \Omega_i x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{D},$$

para qualquer matriz diagonal  $\Lambda_i > 0 \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i}.$

## 2.4 Declaração do problema

Considere o sistema de controle distribuído  $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$  constituído pelos subsistemas em  $\mathcal{P},$  com interconexões sujeitas a retardo no tempo, e pelos controladores  $\mathcal{C}.$  Cada subsistema  $\mathcal{P}_i$  é descrito por (1) e cada controlador local  $\mathcal{C}_i$  é descrito por (5). Assumindo-se que as Hipóteses 1 e 3 são satisfeitas, projete os ganhos dos controladores locais tais que a origem do sistema em malha fechada (11) seja assintoticamente estável.

## 3. RESULTADOS PRINCIPAIS

Considere

$$v_{ij} = [0_{n_i, 8\bar{n}_i + (j-1)n_i} \quad I_{n_i} \quad 0_{n_i, (8-j)n_i + 8\bar{n}_i + n_\phi}] \in \mathbb{R}^{n_i \times n_\xi},$$

$$J_i = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} - v_{i3} \\ v_{i3} - v_{i5} \end{bmatrix}, \quad G_i(\tau) = \begin{bmatrix} v_{i2} \\ \tau v_{i6} \\ (\tau - \tau_0)v_{i7} + (\tau_1 - \tau)v_{i8} \end{bmatrix},$$

$$Z_i = \begin{bmatrix} v_{i2} - v_{i3} \\ v_{i2} + v_{i3} - 2v_{i6} \end{bmatrix}, \quad W_i = \begin{bmatrix} v_{i3} - v_{i4} \\ v_{i3} + v_{i4} - 2v_{i7} \\ v_{i4} - v_{i5} \\ v_{i4} + v_{i5} - 2v_{i8} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{Z}} & 0_{Nn, n_\phi} \\ 0_{n_\phi, 8n} & I_{n_\phi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(Nn+n_\phi) \times (8n+n_\phi)},$$

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 \\ \vdots \\ \tilde{Z}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn \times 8n}, \quad \tilde{Z}_i = \begin{bmatrix} \wp_i^1 \\ \vdots \\ \wp_i^N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn_i \times 8n},$$

$$\wp_i^j = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0_{n_i, 8n_i+n_i} & I_{n_i} & 0_{n_i, 8\bar{n}_i+6n_i} \end{bmatrix} & \text{se } j = i, \\ \begin{bmatrix} 0_{n_j, 8n_j+3n_j} & I_{n_j} & 0_{n_j, 8\bar{n}_j+4n_j} \end{bmatrix} & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

sendo  $n_\xi = 8n + n_\phi$ .

O teorema a seguir fornece uma condição suficiente para resolver o problema de controle apresentado na Seção 2.4.

**Teorema 5.** Considere o sistema interconectado e em malha fechada com a lei controle distribuído  $(\mathcal{C}, \mathcal{N})$  em (11). Considere que as Hipóteses 1 e 3 são satisfeitas para  $\tau_0$  e  $\tau_1$ , tal que  $\tau_0 < \tau_1$ , e matrizes  $\Omega_i \in \mathbb{R}^{d_i \times n}$ . Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $\tilde{P}_i \in \mathbb{R}^{3n_i}$ ,  $\tilde{Q}_{1i}, \tilde{Q}_{2i}, \tilde{R}_{1i}, \tilde{R}_{2i} \in \mathbb{R}^{n_i}$ , e matrizes  $X_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $\Lambda_i \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i}$ ,  $\tilde{L}_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}$ ,  $\tilde{L}_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}$ ,  $\tilde{Y}_{1i} \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i}$ ,  $\tilde{Y}_{2i} \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i}$  e  $\tilde{K}_i(z_i) \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$ , tais que

$$\Upsilon(z, \tau_k) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}(z, \tau_k) & \mathcal{W}^\top \tilde{\mathcal{Y}}_{k+1} \\ \star & -\tilde{\mathcal{R}}_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

para todo  $k \in \mathbb{B}$ , sendo

$$\tilde{\Theta}(z, \tau) = \sum_{i \in \mathcal{V}} \left( \tilde{\Phi}_i(\tau) \right) + Z^\top \tilde{\Xi} Z + \text{He}(\tilde{\mathcal{Y}}),$$

$$\tilde{\Phi}_i(\tau) = \text{He}(G_i^\top(\tau) \tilde{P}_i J_i) + \tilde{\Sigma}_i - W_i^\top \tilde{\Psi}_i(\tau) W_i + v_{i1}^\top \left( \tau_0^2 \tilde{R}_{1i} + \tau_{10}^2 \tilde{R}_{2i} \right) v_{i1} - Z_i^\top \tilde{\mathcal{R}}_{1i} Z_i,$$

$$\tilde{\Psi}_i(\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{R}}_{2i} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{R}}_{2i} \end{bmatrix} + \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_{10}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{R}}_{2i} & \tilde{Y}_{2i} \\ \tilde{Y}_{2i}^\top & 0 \end{bmatrix} + \frac{\tau - \tau_0}{\tau_{10}} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{Y}_{1i} \\ \tilde{Y}_{1i}^\top & \tilde{\mathcal{R}}_{2i} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Sigma}_i = v_{i2}^\top \tilde{Q}_{1i} v_{i2} + v_{i3}^\top (\tilde{Q}_{2i} - \tilde{Q}_{1i}) v_{i3} - v_{i5}^\top \tilde{Q}_{2i} v_{i5},$$

$$\tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} 0_{Nn, Nn} & \star \\ \Omega & -2\Lambda \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma} + \tilde{\Delta} & \tilde{\Pi} \\ 0_{n_\phi, 8n} & 0_{n_\phi, n_\phi} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 = \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\mathcal{R}}_{2i}, \quad X = \bigoplus_{i=1}^N X_i, \quad \tilde{\Omega} = \bigoplus_{i=1}^N \Omega_i X,$$

$$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^N \Lambda_i, \quad \tilde{\mathcal{Y}}_k = \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\mathcal{Y}}_{ki}, \quad \tilde{\Delta} = [\tilde{\Delta}_{ij}],$$

$$\tilde{\Gamma} = \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\Gamma}_i, \quad \tilde{\Pi} = \bigoplus_{i=1}^N \tilde{\Pi}_i, \quad \tilde{\Delta}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } a_{ij} = 0, \\ \tilde{\Delta}_{ij} & \text{se } a_{ij} = 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{W} = [W_1^\top \dots W_N^\top]^\top, \quad \tilde{\mathcal{Y}}_{ki} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{ki}^\top & 0 \end{bmatrix}^\top, & k = 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & \tilde{Y}_{ki} \end{bmatrix}^\top, & k = 2 \end{cases}$$

$$\tilde{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{A}}_i \\ \tilde{\mathbb{A}}_i \\ 0_{n_i, 8n_i} \\ \tilde{\mathbb{A}}_i \\ 0_{4n_i, 8n_i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Delta}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{D}}_{ij} \\ \tilde{\mathbb{D}}_{ij} \\ 0_{n_i, 8n_j} \\ \tilde{\mathbb{D}}_{ij} \\ 0_{4n_i, 8n_j} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Pi}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{G}}_i \\ \tilde{\mathbb{G}}_i \\ 0_{n_i, d_i} \\ \tilde{\mathbb{G}}_i \\ 0_{4n_i, d_i} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbb{A}}_i = [-X_i \quad A_i(z_i) X_i + B_i(z_i) \tilde{K}_i(z_i) \quad 0_{n_i, 6n_i}],$$

$$\tilde{\mathbb{D}}_{ij} = [0_{n_i, n_j} \quad B_i(z_i) \tilde{L}_{ij} \quad 0_{n_i, n_j} \quad A_{ij} X_j \quad 0_{n_i, 4n_j}],$$

$$\tilde{\mathbb{G}}_i = G_i(z_i) \Lambda_i,$$

$\tilde{R}_{1i} = \text{diag}(\tilde{R}_{1i}, 3\tilde{R}_{1i})$ ,  $\tilde{R}_{2i} = \text{diag}(\tilde{R}_{2i}, 3\tilde{R}_{2i})$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}_N$ ,  $\forall j \in \mathcal{N}_i$ , então a origem do sistema em malha fechada com a lei de controle distribuído em (11) é assintoticamente

estável para qualquer retardo variante no tempo  $\tau_0 \leq \tau(t) \leq \tau_1$ . Neste caso, os ganhos do controlador distribuído são dados por:  $K_i(z_i) = \tilde{K}_i(z_i) X_i^{-1}$  e  $L_{ij} = \tilde{L}_{ij} X_j^{-1}$ .

**Demonstração.** A demonstração é apresentada no Apêndice 6. ■

**Nota 6.** Como as condições do Teorema 5 estão escritas em um formato não linear devido à dependência dos parâmetros, as relaxações apresentadas em Coutinho et al. (2020); Araújo et al. (2022) são empregadas para obter um conjunto finito de condições a ser resolvido.

## 4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

### 4.1 Exemplo 1: pêndulos invertidos interconectados

Considere uma rede de 5 pêndulos invertidos interconectados por molas com retardo variante no tempo nas interconexões. A dinâmica do  $i$ -ésimo pêndulo é descrita por (Araújo et al., 2021):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1}(t) &= x_{i2}(t) \\ \dot{x}_{i2}(t) &= \frac{g}{l_i} \text{sen}(x_{i1}(t)) + \frac{1}{m_i l_i^2} u_i(t) \\ &\quad - \frac{ka^2}{m_i l_i^2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_{i1}(t) - x_{j1}(t - \tau(t))) \\ &\quad - \frac{ka^2 \gamma^2}{m_i l_i^2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_{i1}(t) - x_{j1}(t - \tau(t)))^3, \end{aligned}$$

sendo que  $x_{i1}(t)$  é o ângulo da haste com relação a posição vertical,  $x_{i2}(t)$  é a velocidade angular, e  $u_i(t)$  é o torque aplicado na base do  $i$ -ésimo pêndulo. Além disso,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  é a aceleração da gravidade,  $k = 80 \text{ N/m}$  e  $\gamma = 0,8 \text{ m}^{-1}$  são, respectivamente, os coeficientes elásticos linear e não linear da mola,  $a = 0,5 \text{ m}$  é a altura da conexão nas hastes dos pêndulos. Os valores de  $m_i$  e  $l_i$  são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros de cada subsistema da rede de pêndulos invertidos.

| Subsistema      | $m_i$ (kg) | $l_i$ (m) | $x_{i10}$ (rad) |
|-----------------|------------|-----------|-----------------|
| $\mathcal{P}_1$ | 0,35       | 1,2       | 0,2543          |
| $\mathcal{P}_2$ | 0,30       | 1,3       | -0,0537         |
| $\mathcal{P}_3$ | 0,40       | 1,1       | -0,2094         |
| $\mathcal{P}_4$ | 0,25       | 0,9       | 0,1245          |
| $\mathcal{P}_5$ | 0,45       | 1,2       | -0,1123         |

O grafo que representa as interconexões entre os pêndulos é apresentado na Figura 1.

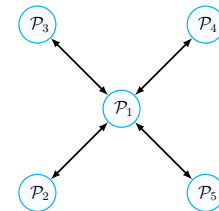


Figura 1. Grafo da rede de pêndulos interconectados.

Definindo-se  $z_i(x) = \text{sen}(x_{i1})/x_{i1}$ ,  $i \in \mathcal{V}$ , como funções de escalonamento e assumindo-se que as posições angulares satisfazem às restrições  $|x_{i1}| \leq \bar{\theta}$ , com  $\bar{\theta} = \pi/4$ , pode-se obter a representação politópica para cada subsistema

considerando que  $\sin(\bar{\theta})/\bar{\theta} \leq z_i(x) \leq 1$ . Além disso, as interconexões não lineares pertencem ao setor

$$\phi_{ij}(x_i, x_j) = (x_{i1} - x_{j1})^3 \in \text{co}\{0, \Omega_i x\},$$

sendo que  $\Omega_i$  é dado por  $\Omega_i = [\Omega_{i1} \ \Omega_{i2} \ \dots \ \Omega_{iN}]$ , no qual

$$\Omega_{ij} = [\Omega_{ijk_1}^\top \ \dots \ \Omega_{ijk_\ell}^\top]^\top \in \mathbb{R}^{d_{ii} \times n_j},$$

e  $\Omega_{ijk_\ell} = [4\bar{\theta}^2 \ 0]$ , se  $j = i$ , ou  $\Omega_{ijk_\ell} = -\Omega_{iik_\ell}$ , se  $j \neq i$ ,  $\forall j \in \mathcal{N}_i$ ,  $k_\ell \in \mathbb{N}_{\leq d_i}$ , e  $\Omega_{ij} = 0$ ,  $\forall j \notin \mathcal{N}_i$ . Considerando o limitante inferior  $\tau_0 = 0,05$ , então o valor máximo para o limitante superior  $\tau_1$ , tal que as condições do Teorema 5 são factíveis, é dado por  $\tau_1 = 0,435$ . A Figura 2 mostra que todas as trajetórias do sistema em malha fechada, para o retardo variante no tempo  $\tau(t) = (\tau_1 + \tau_0)/2 + (\tau_1 - \tau_0)\text{sen}(20\pi t + \pi/2)/2$ , com os limitantes obtidos, convergem para a origem.

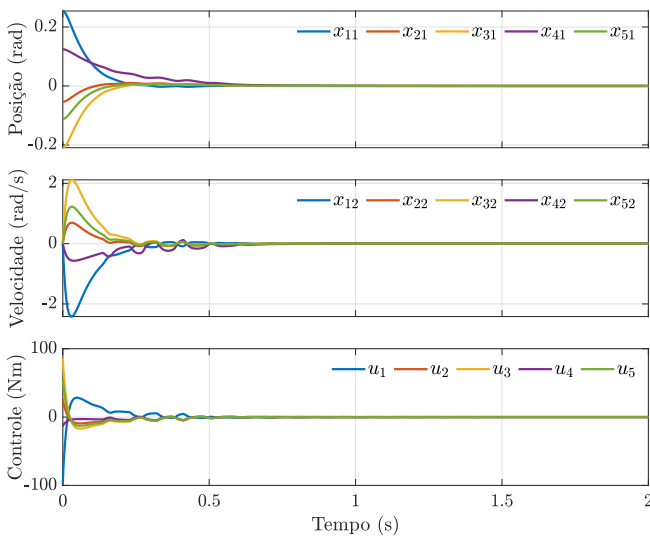


Figura 2. Trajetórias do sistema de pêndulos invertidos em malha fechada com as respectivas entradas de controle distribuído. Condições iniciais apresentadas na Tabela 1.

#### 4.2 Exemplo 2: rede de geradores interconectados

Considere o problema de estabilização de uma rede de energia elétrica composta apenas por geradores, onde o principal objetivo é promover o sincronismo entre os mesmos. A rede é composta por 7 geradores interconectados de acordo com o grafo apresentado na Figura 3.

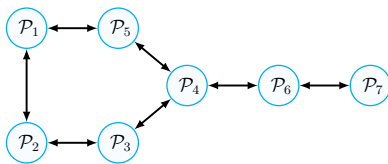


Figura 3. Grafo da rede de geradores interconectados.

Considerando o retardo nas interconexões, a equação dinâmica de cada gerador é descrita como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1}(t) &= x_{i2}(t), \\ \dot{x}_{i2}(t) &= -\frac{D_i}{M_i}x_{i2}(t) - \frac{1}{M_i}x_{i3}(t) \\ &\quad - \frac{1}{M_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} Y_{ij} \text{sen}(x_{i1}(t) - x_{j1}(t - \tau(t))), \\ \dot{x}_{i3}(t) &= -\frac{1}{T_i}x_{i3}(t) + \frac{1}{T_i}x_{i4}(t), \\ \dot{x}_{i4}(t) &= \frac{1}{K_i}x_{i2}(t) - \frac{R_i}{K_i}x_{i4}(t) + \frac{1}{K_i}u_i(t), \end{aligned}$$

onde  $x_{i1}(t)$  é o desvio de ângulo de fase,  $x_{i2}(t)$  é a velocidade angular,  $x_{i3}(t)$  é a diferença da entrada de potência mecânica e  $x_{i4}(t)$  é a diferença de posição da válvula de acionamento da turbina. Cada  $u_i(t)$  corresponde à entrada de controle para o governador do  $i$ -ésimo gerador, e  $Y_{ij}$  é a admitância entre o  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo gerador. As interconexões não lineares pertencem ao setor

$$\phi_{ij}(x_i, x_j) = Y_{ij} \text{sen}(x_{i1} - x_{j1}) \in \text{co}\{0, \Omega_i x\},$$

em que cada  $\Omega_i$  é construído de maneira similar ao apresentado no Exemplo 1 considerando  $\Omega_{ijk_\ell} = [Y_{ij} \ 0 \ 0 \ 0]$  se  $j = i$ , ou  $\Omega_{ijk_\ell} = -\Omega_{iik_\ell}$ , se  $j \neq i$ , para  $j \in \mathcal{N}_i$ , e  $\Omega_{ijk_\ell} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$  se  $j \notin \mathcal{N}_i$ ,  $k_\ell \in \mathbb{N}_{\leq d_i}$ . Os valores dos parâmetros do sistema são os mesmos considerados em Araújo et al. (2019).

Foram realizados testes variando o limitante inferior do atraso  $\tau_0$  com o intuito de obter o valor máximo para  $\tau_1$  no qual as condições do Teorema 5 são factíveis. O resultado obtido é apresentado na Tabela 2, onde pode-se notar que o aumento do limitante inferior resulta em uma diminuição no intervalo de variação do retardo.

Tabela 2. Máximo valor de  $\tau_1$  para diferentes valores de  $\tau_0$  - Exemplo 2.

|                 | Máximo $\tau_1$ | $\Delta_\tau$ |
|-----------------|-----------------|---------------|
| $\tau_0 = 0,05$ | 1,113           | 1,063         |
| $\tau_0 = 0,10$ | 1,128           | 1,028         |
| $\tau_0 = 0,50$ | 1,185           | 0,685         |
| $\tau_0 = 1,00$ | 1,363           | 0,363         |
| $\tau_0 = 2,00$ | 2,132           | 0,132         |
| $\tau_0 = 3,00$ | 3,053           | 0,053         |

Para o caso de maior variação, ou seja,  $\Delta_\tau = 1,063$ , apresenta-se na Figura 4 as trajetórias do sistema de geradores em malha fechada. A equação do retardo variante no tempo é a mesma considerada no Exemplo 1.

**Nota 7.** Comparações não foram realizadas nas simulações numéricas, pois no melhor do conhecimento dos autores, não foram encontradas outras abordagens na literatura que tratam do problema de controle distribuído para sistemas interconectados com subsistemas não lineares sujeitos a atraso nas interconexões.

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma abordagem de controle distribuído para sistemas não lineares interconectados sujeitos a retardos variantes no tempo nas interconexões. Uma nova condição suficiente foi proposta para projetar o controlador distribuído a partir de uma descrição adequada da dinâmica do sistema global por um modelo político local. Simulações numéricas ilustraram a eficácia do método proposto em garantir a estabilidade assintótica do equilíbrio do sistema global em malha fechada. Em trabalhos futuros, a abordagem pode ser estendida para considerar atraso na dinâmica de cada subsistema.

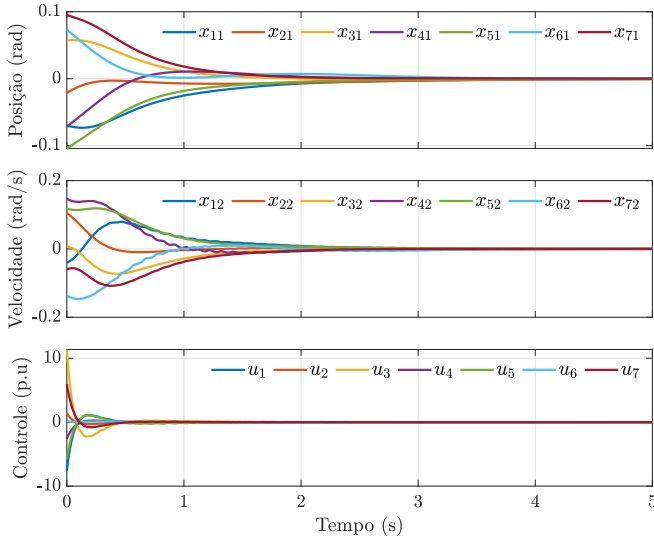


Figura 4. Trajetórias do sistema de geradores em malha fechada com as respectivas entradas de controle distribuído.

## 6. APÊNDICE: DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Considere um funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato da forma:

$$V(x_t, \dot{x}_t) = \sum_{i=1}^N V_{1i}(x_{it}) + V_{2i}(x_{it}) + V_{3i}(\dot{x}_{it}), \quad (16)$$

em que  $V_{1i}(x_{it}) = \eta_i^\top(t) P_i \eta_i(t)$ ,

$$V_{2i}(x_{it}) = \int_{t-\tau_0}^t x_i^\top(s) Q_{1i} x_i(s) ds + \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_0} x_i^\top(s) Q_{2i} x_i(s) ds,$$

$$V_{3i}(\dot{x}_{it}) = \tau_0 \int_{-\tau_0}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_i^\top(s) R_{1i} \dot{x}_i(s) ds d\theta + \tau_{10} \int_{-\tau_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}_i^\top(s) R_{2i} \dot{x}_i(s) ds d\theta,$$

sendo  $\eta_i(t) = (x_i(t), \tau_0 \psi_i(\tau_0, 0), \tau_{10} \psi_i(\tau_{10}, \tau_0))$  e  $\psi_i(a, b) \triangleq \frac{1}{a-b} \int_{t-a}^{t-b} x_i(s) ds$ . Define-se o vetor de estado aumentado

$$\xi(t) = (\zeta_1(t), \dots, \zeta_N(t), \phi(\chi(t - \tau(t)))) \in \mathbb{R}^{n_\xi}, \quad (17)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \zeta_i(t) &= (\dot{x}_i(t), x_i(t), \sigma_{\tau_i}(t), \varsigma_{\tau_i}(t)), \\ \sigma_{\tau_i}(t) &= (x_i(t - \tau_0), x_i(t - \tau(t)), x_i(t - \tau_1)), \\ \varsigma_{\tau_i}(t) &= (\psi_i(\tau_0, 0), \psi_i(\tau_0, \tau(t)), \psi_i(\tau(t), \tau_1)). \end{aligned}$$

Considerando (17), a derivada temporal do funcional é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x_{it}) &= \xi^\top(t) [\text{He}(G_i^\top(\tau) P_i J_i) + \Sigma_i] \xi(t) \\ &+ \xi^\top(t) v_{i1}^\top (\tau_0^2 R_{1i} + \tau_{10}^2 R_{2i}) v_{i1} \xi(t) \\ &- \tau_0 \int_{t-\tau_0}^t \dot{x}_i^\top(s) R_{1i} \dot{x}_i(s) ds - \tau_{10} \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_0} \dot{x}_i^\top(s) R_{2i} \dot{x}_i(s) ds, \quad (18) \end{aligned}$$

em que  $\Sigma_i = v_{i2}^\top Q_{1i} v_{i2} + v_{i3}^\top (Q_{2i} - Q_{1i}) v_{i3} - v_{i5}^\top Q_{1i} v_{i5}$ .

De acordo com a desigualdade de Wirtinger (Seuret e Gouaisbaut, 2013), tem-se que

$$-\tau_0 \int_{t-\tau_0}^t \dot{x}_i^\top(s) R_{31} \dot{x}_i(s) ds \leq -\xi^\top(t) Z_i^\top \mathcal{R}_{1i} Z_i \xi(t), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & -\tau_{10} \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_0} \dot{x}_i(s) R_{2i} x_i(s) ds \leq \\ & -\xi^\top(t) W_i^\top \begin{bmatrix} \frac{\tau_{10}}{\tau(t)-\tau_0} \mathcal{R}_{2i} & 0 \\ 0 & \frac{\tau_{10}}{\tau_1-\tau(t)} \mathcal{R}_{2i} \end{bmatrix} W_i \xi(t), \quad (20) \end{aligned}$$

sendo  $\mathcal{R}_{1i} = \text{diag}(R_{1i}, 3R_{1i})$ , e  $\mathcal{R}_{2i} = \text{diag}(R_{2i}, 3R_{2i})$ . Além disso, ao aplicar o Lema da reciprocidade convexa dependente do retardo (Seuret e Gouaisbaut, 2018) em (20) considerando  $\varrho(t) = (\tau(t) - \tau_0)/\tau_{10}$  e  $W_{i1} = \mathcal{R}_{i2} - Y_{i1} \mathcal{R}_{i2}^{-1} Y_{i1}^\top$ ,  $W_{i2} = \mathcal{R}_{i2} - Y_{i2}^\top \mathcal{R}_{i2}^{-1} Y_{i2}$ , tem-se que

$$\begin{aligned} & -\tau_{10} \int_{t-\tau_1}^{t-\tau_0} \dot{x}_i(s) R_{2i} x_i(s) ds \leq \\ & -\xi^\top(t) [W_i^\top (\Psi_i(\tau(t)) - \Psi_{0i}(\tau(t))) W_i] \xi(t), \quad (21) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \Psi_i(\tau) &= \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{2i} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{2i} \end{bmatrix} + \frac{\tau_1-\tau}{\tau_{10}} \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{2i} & Y_{2i} \\ Y_{2i}^\top & 0 \end{bmatrix} + \frac{\tau-\tau_0}{\tau_{10}} \begin{bmatrix} 0 & Y_{1i} \\ Y_{1i}^\top & \mathcal{R}_{2i} \end{bmatrix}, \\ \Psi_{0i}(\tau) &= \begin{bmatrix} \frac{\tau_1-\tau}{\tau_{10}} Y_{1i} \mathcal{R}_{2i}^{-1} Y_{1i}^\top & 0 \\ 0 & \frac{\tau-\tau_0}{\tau_{10}} Y_{2i}^\top \mathcal{R}_{2i}^{-1} Y_{2i} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Levando em consideração (18), (19) e (21), tem-se que a derivada do funcional é limitada superiormente por

$$\dot{V}(x_t, \dot{x}_t) \leq \xi^\top(t) \left[ \sum_{i \in \mathcal{V}} (\Phi_i(\tau(t)) + W_i^\top \Psi_{0i}(\tau(t)) W_i) \right] \xi(t),$$

em que

$$\begin{aligned} \Phi_i(\tau) &= \text{He}(G_i^\top(\tau) P_i J_i) + \Sigma_i - W_i^\top \Psi_i(\tau) W_i \\ &+ v_{i1}^\top (\tau_0^2 R_{1i} + \tau_{10}^2 R_{2i}) v_{i1} - Z_i^\top \mathcal{R}_{1i} Z_i. \end{aligned}$$

Considerando a propriedade de não linearidades de setor apresentada no Lema 4, têm-se por argumentos de *S-procedure* que

$$\dot{V}(x_t, \dot{x}_t) - 2 \sum_{i \in \mathcal{V}} \mathcal{S}_i(\chi_i(t - \tau(t)), \Lambda_i) < 0, \quad (22)$$

sendo possível escrever

$$-2 \sum_{i \in \mathcal{V}} \mathcal{S}_i(\chi_i(t - \tau(t)), \Lambda_i) = \xi^\top(t) (\mathbb{Z}^\top \Xi \mathbb{Z}) \xi$$

com

$$\Xi = \begin{bmatrix} 0_{Nn, Nn} & \star \\ \Omega_\Lambda & -2\Lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad \Omega_\Lambda = \bigoplus_{i=1}^N \Lambda_i^{-1} \Omega_i.$$

Logo, pode-se concluir que (22) é satisfeita se  $\xi^\top(t) \mathcal{Q}(\tau(t)) \xi(t) < 0$ , sendo

$$\mathcal{Q}(\tau) = \sum_{i \in \mathcal{V}} (\Phi_i(\tau) + W_i^\top \Psi_{0i}(\tau) W_i) + \mathbb{Z}^\top \Xi \mathbb{Z}.$$

Além disso, segue da equação do sistema em malha fechada (11) que  $\mathbb{Y} \xi(t) = 0$ , com

$$\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} \Gamma + \Delta & \Pi \\ 0_{n_\phi, 8n} & 0_{n_\phi, n_\phi} \end{bmatrix}, \Delta = [\bar{\Delta}_{ij}], \Gamma = \bigoplus_{i=1}^N \Gamma_i,$$

$$\Pi = \bigoplus_{i=1}^N \Pi_i, \bar{\Delta}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } a_{ij} = 0, \\ \Delta_{ij} & \text{se } a_{ij} = 1, \end{cases}$$

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_i \\ \mathbb{A}_i \\ 0_{n_i, 8n_i} \\ \mathbb{A}_i \\ 0_{4n_i, 8n_i} \end{bmatrix}, \Delta_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbb{D}_{ij} \\ \mathbb{D}_{ij} \\ 0_{n_i, 8n_j} \\ \mathbb{D}_{ij} \\ 0_{4n_i, 8n_j} \end{bmatrix}, \Pi_i = \begin{bmatrix} \mathbb{G}_i \\ \mathbb{G}_i \\ 0_{n_i, d_i} \\ \mathbb{G}_i \\ 0_{4n_i, d_i} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{A}_i = [-X_i^{-\top} \ X_i^{-\top} (A_i(z_i) + B_i(z_i)K_i(z_i)) \ 0_{n_i, 6n_i}],$$

$$\mathbb{D}_{ij} = [0_{n_i, n_j} \ X_j^{-\top} B_i(z_i)L_{ij} \ 0_{n_i, n_j} \ X_j^{-\top} A_{ij} \ 0_{n_i, 4n_j}],$$

$$\mathbb{G}_i = X_i^{-\top} G_i(z_i).$$

Pelo Lema de Finsler,  $\mathcal{Q}(\tau(t)) < 0$  é equivalente a

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} (\Phi_i(\tau) + W_i^\top \Psi_{0i}(\tau) W_i) + \mathbb{Z}^\top \Xi \mathbb{Z} + \text{He}(\mathbb{Y}) < 0. \quad (23)$$

Aplicando complemento de Schur  $N$  vezes e considerando a relação afim em  $\tau$ , a condição (23) é satisfeita se

$$\begin{bmatrix} \Theta(z, \tau_0) & W^\top \mathcal{Y}_1 \\ \star & -\mathcal{R}_2 \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} \Theta(z, \tau_1) & W^\top \mathcal{Y}_2 \\ \star & -\mathcal{R}_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

em que  $\mathcal{Y}_{1i} = [Y_{1i}^\top \ 0]^\top$ ,  $\mathcal{Y}_{2i} = [0 \ Y_{2i}]^\top$ ,

$$\mathcal{R}_2 = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{R}_{2i}, \mathcal{Y}_1 = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{Y}_{1i}, \mathcal{Y}_2 = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{Y}_{2i},$$

$$\Theta(z, \tau) = \sum_{i \in \mathcal{V}} (\Phi_i(\tau)) + \mathbb{Z}^\top \Xi \mathbb{Z} + \text{He}(\mathbb{Y}).$$

Por fim, multiplicando (24) por  $U^\top$  à esquerda e  $U$  à direita, sendo  $U = \text{diag}(T, \Lambda, U)$ ,  $T = \bigoplus_{i=1}^N (I_8 \otimes X_i)$ ,  $U = \bigoplus_{i=1}^N (I_{2N} \otimes X_i)$ , obtêm-se o conjunto de condições apresentado em (15). Isso conclui a demonstração.  $\square$

## REFERÊNCIAS

Araújo, R.F., Torres, L.A.B., e Palhares, R.M. (2019). Controle descentralizado de sistemas interconectados por não-linearidades setoriais sujeitos a saturação nos atuadores. In *14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Ouro Preto.

Araújo, R.F., Torres, L.A.B., e Palhares, R.M. (2022). Plug-and-play distributed control of large-scale nonlinear systems. *IEEE Trans. Cybern.* doi:10.1109/TCYB.2021.3113518.

Araújo, R.F., Torres, L.A.B., e Palhares, R.M. (2021). Distributed control of networked nonlinear systems via interconnected Takagi–Sugeno fuzzy systems with nonlinear consequent. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. Syst.*, 51(8), 4858–4867.

Bijami, E. e Farsangi, M.M. (2018). A distributed control framework and delay-dependent stability analysis for large-scale networked control systems with non-ideal communication network. *Trans. Inst. Meas. Control.*, 41(3), 768–779.

Chanfreut, P., Maestre, J.M., e Camacho, E.F. (2021). A survey on clustering methods for distributed and networked control systems. *Annu. Rev. Control*, 52, 75–90.

Choi, Y.H. e Yoo, S.J. (2016). Minimal-approximation-based decentralized backstepping control of intercon-

ted time-delay systems. *IEEE Trans. Cybern.*, 46(12), 3401–3413.

Coutinho, P.H.S., Araújo, R.F., Nguyen, A.T., e Palhares, R.M. (2020). A multiple-parameterization approach for local stabilization of constrained Takagi–Sugeno fuzzy systems with nonlinear consequents. *Inf. Sci.*, 506, 295–307.

Coutinho, P.H.S., Lauber, J., Bernal, M., e Palhares, R.M. (2019). Efficient LMI conditions for enhanced stabilization of discrete-time Takagi–Sugeno models via delayed nonquadratic Lyapunov functions. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 27(9), 1833–1843.

Coutinho, P.H.S., Peixoto, M.L.C., Bessa, I., e Palhares, R.M. (2022). Dynamic event-triggered gain-scheduling control of discrete-time quasi-LPV systems. *Automatica*, 141, 110292.

De Souza, L.T.F., Peixoto, M.L.C., e Palhares, R.M. (2022). New gain-scheduling control conditions for time-varying delayed LPV systems. *J. Frankl. Inst.*, 359(2), 719–742.

Dong, J., Wang, Y., e Yang, G.H. (2011).  $H_\infty$  and mixed  $H_2/H_\infty$  control of discrete-time T–S fuzzy systems with local nonlinear models. *Fuzzy Sets Syst.*, 164(1), 1–24.

Dunbar, W.B. e Caveney, D.S. (2012). Distributed receding horizon control of vehicle platoons: Stability and string stability. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 57(3), 620–633.

Ge, X., Yang, F., e Han, Q.L. (2017). Distributed networked control systems: A brief overview. *Inf. Sci.*, 380, 117–131.

Hsiao, F.H. (2018). Robust  $H_\infty$  fuzzy control design for dithered nonlinear large-scale systems with multiple time delays. *Optim. Control Appl. Methods*, 40(2), 203–225.

Huong, D.C., Huynh, V.T., e Trinh, H. (2021). Distributed functional interval observers for nonlinear interconnected systems with time-delays and additive disturbances. *IEEE Systems Journal*, 15(1), 411–422.

Narayanan, V. e Jagannathan, S. (2018). Event-triggered distributed control of nonlinear interconnected systems using online reinforcement learning with exploration. *IEEE Trans. Cybern.*, 48(9), 2510–2519.

Nguyen, A.T., Taniguchi, T., Eciolaza, L., Campos, V., Palhares, R.M., e Sugeno, M. (2019). Fuzzy control systems: Past, present and future. *IEEE Comput. Intell. Mag.*, 14(1), 56–68.

Peixoto, M.L.C., Coutinho, P.H.S., Lacerda, M.J., e Palhares, R.M. (2022). Guaranteed region of attraction estimation for time-delayed fuzzy systems via static output-feedback control. *Automatica*, 143, 110438. 10.1016/j.automatica.2022.110438.

Peixoto, M.L.C., Braga, M.F., e Palhares, R.M. (2020). Gain-scheduled control for discrete-time nonlinear parameter-varying systems with time-varying delays. *IET Control. Theory Appl.*, 14(19), 3217–3229.

Seuret, A. e Gouaisbaut, F. (2013). Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems. *Automatica*, 49(9), 2860–2866.

Seuret, A. e Gouaisbaut, F. (2018). Stability of linear systems with time-varying delays using Bessel–Legendre inequalities. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 63(1), 225–232.

- Tlili, A.S. (2021).  $H_\infty$  optimization-based stabilization for nonlinear disturbed time delay systems. *J. Control. Autom. Electr. Syst.*, 32(1), 96–108.
- Wu, Q., Zhao, B., e Liu, D. (2020). Adaptive dynamic programming-based decentralised control for large-scale nonlinear systems subject to mismatched interconnections with unknown time-delay. *Int. J. Syst. Sci.*, 51(15), 2883–2898.
- Yan, X.G., Spurgeon, S., e Edwards, C. (2012). Global decentralised static output feedback sliding-mode control for interconnected time-delay systems. *IET Control Theory Appl.*, 6(2), 192.
- Zhong, Z. e Zhu, Y. (2018). Fuzzy-model-based distributed sampled-data control and its application to a DC microgrid. In *ACC'2018*, 4379–4384.
- Zhou, Y., Li, D., Xi, Y., e Gao, F. (2022). Event-triggered distributed robust model predictive control for a class of nonlinear interconnected systems. *Automatica*, 136, 110039.