

Controle \mathcal{H}_∞ discreto por realimentação estática de saída obtendo o melhor resultado da formulação LMI por otimização evolutiva

★

Pauliana Rufino de Almeida Lima Oliveira*
Eduardo Nunes Gonçalves**

* Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica
UFSJ/CEFET-MG Avenida Amazonas 7675, Belo Horizonte, MG,
Brasil (e-mail: paulianacefet@hotmail.com).

** Departamento de Engenharia Elétrica do CEFET-MG Avenida
Amazonas 7675, Belo Horizonte, MG, Brasil (e-mail:
eduardong@cefetmg.br)

Abstract: Linear matrix inequalities are a powerful tool in the field of analysis and synthesis of robust control systems. Robust control by static or dynamic output-feedback are more complicated to be formulated as convex optimization problems based on linear matrix inequalities. One strategy to obtain formulations for static output-feedback control synthesis is to transform a state-feedback control synthesis formulation through change of variables that requires a choice of a matrix. The choice of this matrix affects the performance of the resulting controller or even the existence of a feasible solution to the problem. We propose in this work to apply an evolutionary optimization algorithm to determine the optimal value of this matrix, and other parameters of the original formulation, to obtain the optimal \mathcal{H}_∞ robust control system. We present a case study to demonstrate the advantage of the proposed method.

Resumo: Desigualdades matriciais lineares são uma poderosa ferramenta na área de análise e síntese de sistemas de controle robusto. Controle robusto por realimentação estática ou dinâmica de saída são mais complicados de serem formulados como problemas de otimização convexos baseados em desigualdades matriciais lineares. Uma estratégia para obter formulações para síntese de controladores por realimentação estática de saída é transformar uma formulação de síntese de controle por realimentação de estados por meio de uma mudança de variáveis que requer a escolha de uma matriz. A escolha desta matriz afeta o desempenho do controlador resultante ou até mesmo a existência de uma solução factível para o problema. Nós propomos neste trabalho aplicar um algoritmo de otimização evolutiva para determinar o valor ótimo desta matriz, e de outros parâmetros da formulação original, para obter o sistema de controle robusto \mathcal{H}_∞ ótimo. Nós apresentamos um estudo de caso para demonstrar a vantagem de utilizar o método proposto.

Keywords: Robust control, \mathcal{H}_∞ control, static output-feedback control, evolutionary optimization.

Palavras-chaves: Controle robusto, controle \mathcal{H}_∞ , controle por realimentação estática de saída, otimização evolutiva.

1. INTRODUÇÃO

No projeto de sistemas de controle é importante considerar as incertezas do modelo do sistema, o que requer o uso dos métodos de análise e síntese da teoria de controle robusto. Atualmente, os controladores são implementados de forma digital, utilizando, por exemplo, microcontroladores, controladores lógicos programáveis ou controladores digitais *multi-loop*. Deste modo, é interessante realizar a síntese do controlador considerando modelos em tempo discreto. Na teoria de controle moderno, quando os sistemas são

representados no espaço de estados, o controlador por realimentação de estados é o mais interessante, uma vez que, diferentemente da realimentação de saída, permite obter quaisquer polos em malha-fechada em casos de sistemas totalmente controláveis. Infelizmente, em muitos casos não se tem todas as variáveis de estados disponíveis para realimentação e, neste caso, o controlador por realimentação de saída deve ser utilizado. Considerando todos estes fatos, a motivação deste trabalho é apresentar um método de síntese de controladores \mathcal{H}_∞ discretos robustos por realimentação estática de saída. Vale lembrar que outros problemas, tais como sintonia de controlador proporcional integral (PI) ou síntese de controlador por realimentação

* Os autores agradecem o apoio das agências de fomento FAPEMIG, CNPq e CAPES.

dinâmica de saída de qualquer ordem, também podem ser obtidos através do projeto de controle por realimentação estática de saída.

A combinação de modelos politópicos com formulações de análise e síntese baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequality*) são uma importante metodologia na área de controle robusto (Boyd et al., 1994). Com base na teoria de estabilidade de Lyapunov, é possível obter formulações baseadas em LMI para análise robusta tanto de estabilidade quanto de desempenho \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . Através da mudança de variáveis linearizante proposta em Bernussou et al. (1989), é possível transformar formulações de análise robusta baseada em LMI em formulações de síntese de controle robusto por realimentação de estados. Os problemas LMI podem ser facilmente implementados utilizando interfaces gratuitas, como a YALMIP (Lofberg, 2004), e solucionados por programas gratuitos como, por exemplo, o SDPT3 (Toh et al., 1999).

As formulações LMI baseadas no conceito de estabilidade quadrática, em que é utilizado uma variável de Lyapunov constante para todo o domínio de incerteza, conduz a resultados conservadores, especialmente quando o sistema é invariante no tempo. Considerando sistemas incertos lineares invariantes no tempo, em tempo discreto, representados por modelos politópicos, em De Oliveira et al. (1999) é apresentado uma nova formulação de análise de estabilidade robusta que inclui uma variável adicional e permite o uso de funções de Lyapunov dependente de parâmetros na síntese de controle estabilizante por realimentação de estados. Tal formulação foi posteriormente utilizada para síntese de controladores por realimentação de estados com desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , denominadas formulações estendidas (De Oliveira et al., 2002). Em Morais et al. (2013), é proposta uma nova formulação de síntese de controle robusto \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados que inclui uma variável escalar, que deve ser definida pelo projetista, que inclui a formulação estendida proposta em De Oliveira et al. (2002) como caso particular. De acordo com a escolha desta variável escalar adicional, é possível obter um melhor desempenho do que a formulação estendida apresentada em De Oliveira et al. (2002). Transformar formulações de análise robusta em formulações de síntese robusta por realimentação de saída não é tão simples como no caso de realimentação de estados. Em Agulhari et al. (2010) é desenvolvida uma formulação de síntese robusta de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída, baseada em uma formulação LMI com variável de Lyapunov dependente de parâmetros, que requer um controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros que estabiliza o sistema incerto. Por meio desta estratégia é possível obter diferentes resultados de acordo com o desempenho \mathcal{H}_∞ especificado no problema sub-ótimo \mathcal{H}_∞ para o cálculo do controlador dependente de parâmetros. Em Chang et al. (2015), são apresentadas três formulações LMI com função de Lyapunov dependente de parâmetros para síntese de controle robusto \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de saída. Na última delas é necessário fazer a busca por duas variáveis escalares que devem ser fixadas para linearizar a formulação.

A primeira contribuição deste trabalho é estender para sistemas em tempo discreto a mudança de variáveis proposta

inicialmente em Rubió-Massegú et al. (2013), posteriormente aperfeiçoada nos trabalhos de Palacios-Quinonero et al. (2014) e Gopmandal and Ghosh (2021), que permite transformar qualquer formulação de síntese de controle robusto por realimentação de estados em uma formulação de síntese de controle por realimentação estática de saída. Esta mudança requer a definição de uma variável matricial, cujas dimensões dependem do número de variáveis de estados e de saídas. A escolha desta matriz afeta o desempenho do controlador resultante e até mesmo a factibilidade do problema. Como esta matriz pode ter vários elementos, pode ser necessário um esforço computacional muito grande para obter a matriz ótima através de teste de diferentes valores. Nós optamos por aplicar esta mudança de variáveis considerando a formulação LMI para síntese de controle robusto \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados proposta em Morais et al. (2013) que possui uma variável escalar que deve ser escolhida *a priori* e que também afeta o desempenho do controlador ou a factibilidade do problema. A segunda contribuição deste trabalho é propor uma forma de otimizar simultaneamente a matriz que aparece na transformação de variáveis e o escalar da formulação LMI através de método de otimização evolutiva, semelhante ao que foi feito para o caso de sistemas em tempo contínuo (Gonçalves and Gonçalves, 2021). Para isto é proposta uma função objetivo a ser minimizada que requer a solução do problema LMI para cada solução candidata. Será apresentado um estudo de caso onde a solução gerada pelo método proposto neste trabalho é melhor que as soluções de outros métodos existentes na literatura.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o modelo no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}(\alpha)x(t) + \mathcal{B}_u(\alpha)u(t) + \mathcal{B}_w(\alpha)w(t), \\ z(t) &= \mathcal{C}_z(\alpha)x(t) + \mathcal{D}_{zu}(\alpha)u(t) + \mathcal{D}_{zw}(\alpha)w(t), \\ y(t) &= \mathcal{C}_y(\alpha)x(t), \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ o vetor de entradas exógenas, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o sinal de controle, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ o vetor de variáveis controladas associadas com o desempenho \mathcal{H}_∞ e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de saídas medidas utilizadas no cálculo da ação de controle $u(t)$. Considere que as matrizes do sistema pertencem a um polítopo, sendo a combinação convexa dos seus vértices:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(\alpha) & \mathcal{B}_w(\alpha) & \mathcal{B}_u(\alpha) \\ \mathcal{C}_z(\alpha) & \mathcal{D}_{zw}(\alpha) & \mathcal{D}_{zu}(\alpha) \\ \mathcal{C}_y(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^v \alpha_i \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_{w,i} & \mathcal{B}_{u,i} \\ \mathcal{C}_{z,i} & \mathcal{D}_{zw,i} & \mathcal{D}_{zu,i} \\ \mathcal{C}_{y,i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

sendo v o número de vértices e $\alpha \in \Omega$:

$$\Omega = \left\{ \alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_v]^T \mid \alpha_i \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^v \alpha_i = 1 \right\}. \quad (3)$$

Neste trabalho é considerado controle discreto por realimentação estática de saída,

$$u(t_k) = Ky(t_k), \quad (4)$$

sendo $t_k = kh$, $k \in \mathbb{N}$ e h o período de amostragem. A ação de controle é implementada utilizando um segurador de ordem zero (ZOH, do inglês *Zero-order holder*):

$$u(t) = u(t_k) \text{ para } t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (5)$$

O sistema em malha-fechada discreto no tempo, $T_{zw}(z, \alpha)$, é dado por:

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= A_f(\alpha)x(t_k) + B_f(\alpha)w(t_k), \\ z(t_k) &= C_f(\alpha)x(t_k) + D_f(\alpha)w(t_k). \end{aligned} \quad (6)$$

cujas matrizes podem ser calculadas a partir do modelo politópico (1) discretizado como:

$$\begin{aligned} T_{zw}(z, \alpha) &= \left[\begin{array}{c|c} \frac{A_f(\alpha)}{C_f(\alpha)} & \frac{B_f(\alpha)}{D_f(\alpha)} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A(\alpha) + B_u(\alpha)KC_y(\alpha) & B_w(\alpha) \\ \hline C_z(\alpha) + D_{zu}KC_y(\alpha) & D_{zw}(\alpha) \end{array} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

sendo as matrizes discretizadas dadas por:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{c|c|c} A(\alpha) & B_w(\alpha) & B_u(\alpha) \\ \hline C_z(\alpha) & D_{zw}(\alpha) & D_{zu}(\alpha) \\ \hline C_y(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} e^{A(\alpha)h} & \int_0^h e^{A(\alpha)\tau} B_w d\tau & \int_0^h e^{A(\alpha)\tau} B_u d\tau \\ \hline C_z(\alpha) & D_{zw}(\alpha) & D_{zu}(\alpha) \\ \hline C_y(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Existe uma dificuldade em trabalhar com a discretização de modelos politópicos uma vez que a discretização da combinação convexa dos vértices do sistema contínuo é diferente da combinação convexa dos vértices discretizados. É comum considerar o discretização de Euler de modo que a combinação convexa dos vértices discretizados é igual a discretização do modelo politópico (Agulhari et al., 2010). Este método só é adequado se o período de amostragem for pequeno o suficiente. O objetivo de projetar controladores discretos diretamente é justamente poder trabalhar com períodos de amostragens mais elevados. Neste trabalho é considerado o modelo politópico discreto como sendo a combinação convexa dos vértices discretizados na síntese do controlador discreto robusto, mas é proposto um método para avaliar o controlador resultante para confirmar a estabilidade e o desempenho robusto.

O objetivo deste trabalho é propor um método para determinar o ganho K no controle discreto por realimentação estática de saída, $u(t_k) = Ky(t_k)$, para sistemas incertos lineares invariantes no tempo representados pelo modelo politópico, Eq. (2), que minimiza o pior caso de norma \mathcal{H}_∞ no domínio de incerteza garantindo a estabilidade robusta em malha-fechada:

$$\begin{aligned} K^* &= \arg \min_K \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(z, \alpha, K)\|_\infty, \\ &\text{sujeito a } \max_{\alpha \in \Omega} \max_i |\lambda_i(A_f(\alpha))| < 1. \end{aligned} \quad (9)$$

sendo $\lambda_i(A_f(\alpha))$, $i = 1, \dots, n$, o i -ésimo autovalor de $A_f(\alpha)$. A ação de controle $u(t_k) = K^*y(t_k)$ garante que:

- o sistema dado pela Eq. (7) é assintoticamente estável para todo $\alpha \in \Omega$ quando $w(k) = 0$;
- o sistema dado pela Eq. (7) apresenta $\sum_{k=0}^{\infty} z^T z < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T w$ para todo $\alpha \in \Omega$ e qualquer $w(t_k) \neq 0$ com energia limitada, $w(t_k) \in l_2[0, \infty)$.

Através de formulações LMI, o problema (9) é representado por um problema de programação semi-definida (SDP, do inglês, *semi-definite program*) com função objetivo linear e restrições LMI. Se o problema for factível, o controlador resultante garante a estabilidade robusta e que $\max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(s, \alpha)\|_\infty \leq \gamma$, sendo γ um limitante conhecido como custo garantido \mathcal{H}_∞ .

A formulação LMI para síntese de controlador discreto robusto por realimentação de estados adotada neste trabalho para ser transformada em uma formulação LMI para síntese de controlador discreto robusto por realimentação estática de saída é apresentada no teorema a seguir.

Teorema 1 (Morais et al., 2013): se existem matrizes $P_i = P_i^T > 0$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$, e um dado escalar $|\xi| < 1$ tal que

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T & \Psi_{31}^T & \mathbf{0} \\ \Psi_{21} & P_i - X - X^T & \Psi_{32}^T & B_{w,i} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & -\mu \mathbf{I} & D_{zw,i} \\ \mathbf{0} & B_{w,i}^T & D_{zw,i}^T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0, i = 1, \dots, v, \quad (10)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \xi(A_i X + B_{u,i} Y + X^T A_i^T + Y^T B_{u,i}^T) - P_i, \\ \Psi_{21} &= X^T A_i^T + Y^T B_{u,i}^T - \xi X, \\ \Psi_{31} &= \xi(C_{z,i} X + D_{zu,i} Y), \quad \Psi_{32} = C_{z,i} X + D_{zu,i} Y, \end{aligned} \quad (11)$$

então o controlador por realimentação de estados dado por $K = YX^{-1}$ garante a estabilidade robusta e que $\|T_{zw}(z, \alpha)\|_\infty < \gamma$ vale para todo $\alpha \in \Omega$, $\gamma = \sqrt{\mu}$.

Fazendo $\xi = 0$ é obtida a mesma formulação LMI do Teorema 6 apresentado em De Oliveira et al. (2002).

Para transformar a formulação LMI (10) em uma formulação de síntese de controle robusto discreto por realimentação estática de saída, basta fazer a seguinte mudança de variáveis (Gopmandal and Ghosh, 2021):

$$X = [Q \ R] \begin{bmatrix} X_q & X_{qr} \\ \mathbf{0} & X_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^T \\ R^T \end{bmatrix}, \quad Y = Y_r R^T, \quad (12)$$

$X_q \in \mathbb{R}^{(n-n_y) \times (n-n_y)}$, $X_r \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $X_{qr} \in \mathbb{R}^{n_y \times (n-n_y)}$, $Y_r \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, $C_y Q = 0$, isto é, Q é a base ortonormal para o espaço nulo de C_y :

$$Q = \text{null}(C_y), \quad (13)$$

$C_y R = I$, sendo adotado por Rubió-Massegú et al. (2013):

$$R = C_y^\dagger + QL, \quad (14)$$

em que $C_y^\dagger = C_y^T (C_y C_y^T)^{-1}$ e $L \in \mathbb{R}^{(n-n_y) \times n}$ é uma matriz a ser definida. O controlador discreto robusto por realimentação estática de saída é dado por:

$$K = Y_r X_r^{-1}. \quad (15)$$

O valor da matriz L na Eq. (14) afeta o desempenho do controlador resultante e até mesmo a factibilidade do problema. No trabalho original (Rubio-Massegú et al., 2013) é adotado $L = \mathbf{0}$. Em um trabalho posterior é proposto uma fórmula para o cálculo de L (Palacios-Quinonero et al., 2014):

$$L = Q^\dagger X C_y^T (C_y X C_y^T)^{-1}, \quad (16)$$

sendo X a solução do problema LMI com $C_y = \mathbf{I}$, isto é, formulação para realimentação de estados. Pode-se trocar o sinal na Eq. (16), sendo interessante avaliar as duas possibilidades (Gopmandal and Ghosh, 2021).

O objetivo deste trabalho é propor uma forma de determinar simultaneamente a matriz L na Eq. (14) e o escalar ξ no problema (10) que resulte em um sistema de controle discreto por realimentação estática de saída com menor custo garantido \mathcal{H}_∞ .

Para verificar se a solução de um SDP é factível, isto é, se todas as desigualdades lineares matriciais foram atendidas,

os *solvers* retornam os resíduos das restrições. Seja σ o menor resíduo obtido. Se $\sigma > 0$ a solução obtida é factível. É possível que um *solver* retorne valor de σ negativo, mas próximo de zero, que pode ser uma solução factível. Seja S o conjunto de vértices do modelo politópico do sistema incerto e $LMI(S, L, \xi)$ a função que retorna a solução do problema LMI (10), com a mudança de variáveis dada pela Eq. (12), na forma do ganho, K , custo garantido, γ , e o resíduo mínimo das restrições, σ . Considerando a aplicação de algoritmos de otimização evolutiva para determinação da matriz ótima L^* e do escalar ótimo ξ^* , este trabalho propõe o seguinte problema de otimização:

$$\{L^*, \xi^*\} = \arg \min_{L, \xi} f(L, \xi), \quad (17)$$

sendo a função objetivo $f(L, \xi)$ determinada a partir de $[K, \gamma, \sigma] = LMI(S, L, \xi)$. Uma vez determinado L^* e ξ^* , então o controlador e custo garantido ótimos são dados por:

$$[K^*, \gamma^*, \sigma] = LMI(S, L^*, \xi^*), \quad (18)$$

Uma das contribuições desse trabalho é propor a seguinte função objetivo, tratando as duas restrições do problema pela técnica de penalidades:

$$f(L, \xi) = \begin{cases} (1 + g_1) \times 10^6 & \text{se } g_1 > 0, \\ (1 + g_2) \times 10^5 & \text{se } g_2 > 0, \\ \gamma & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (19)$$

sendo as restrições $g_1 = \xi^2 - 1$ e $g_2 = -10^{-12} - \sigma$. Por essa definição da função objetivo, se a solução é não factível, o valor da função objetivo será muito maior do que a de uma solução factível. Como temos duas restrições, penalizamos mais a sobre o parâmetro escalar uma vez que neste caso não é preciso solucionar o problema LMI. No processo de seleção de algoritmos evolutivos, quando comparadas duas soluções não factíveis, a solução mais próxima da região factível, de acordo com os valores do parâmetro ξ e de σ , será selecionada.

Para analisar os resultados obtidos, considerando o erro na discretização do modelo politópico, é proposto considerar a solução dos seguintes problemas de otimização para verificação de estabilidade robusta e desempenho robusto \mathcal{H}_∞ de um dado controlador K . Seja $\theta \in \mathbb{R}^{v-1}$ o vetor de variáveis de otimização de tal modo que $\alpha = [\theta_1 \dots \theta_{v-1} \ 1 - \sum \theta_i]^T$. A análise de estabilidade robusta considera o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \max_{\alpha \in \Omega} \max_i |\lambda_i(A_f(\alpha))| \\ \text{sujeito a: } & -\theta_i \leq 0, i = 1, \dots, v-1 \\ & -1 + \sum_i \theta_i \leq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Sendo $\lambda_i(A_f(\alpha))$ o i -ésimo autovalor da matriz de malha fechada calculada pela discretização da combinação convexa dos vértices do modelo contínuo no tempo. Se $\varphi^* \geq 1$, então o sistema não é robustamente estável. Obviamente não é possível garantir a estabilidade robusta com 100% de certeza, mas pode-se executar a otimização mais de uma vez para aumentar a probabilidade do resultado estar correto. Para análise de desempenho robusto é considerado o problema:

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \max_{\alpha \in \Omega} \|T_{zw}(z, \alpha)\|_\infty \\ \text{sujeito a: } & -\theta_i \leq 0, i = 1, \dots, v-1 \\ & -1 + \sum_i \theta_i \leq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

sendo $T_{zw}(z, \alpha)$ o sistema em malha-fechada obtido a partir da discretização da combinação convexa dos vértices do sistema contínuo. A otimização pode ser interrompida caso seja localizado um sistema instável no politopo. Para um melhor desempenho do algoritmo evolutivo para resolver estes dois problemas de otimização, pode-se utilizar a operação de reflexão para garantir que $\theta_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, v-1$, e na população inicial, além de forçar que as soluções aleatórias iniciais atendam às restrições, devem ser incluídas as soluções que correspondem aos v vértices do politopo. Para solução destes dois problemas por algoritmos evolutivos também é aplicado o método da penalidade para tratar restrições. Os três problemas de otimização não-linear restritos apresentados nessa seção são não-diferenciáveis e não-convexos justificando o uso de métodos de otimização evolutivos.

3. ESTUDO DE CASO

Para resolver o problema de otimização (17) foi utilizado o método evolução diferencial (Storn and Price, 1997), com multiplicador da mutação diferencial com distribuição aleatória uniforme no intervalo $F \in [0,5, 1,5)$, probabilidade de cruzamento $C_r = 0,1$, tamanho da população $N = \eta$ e número de gerações $N_g = 2\eta$, sendo η o número de variáveis de otimização que é igual ao número de elementos da matriz L mais um, $\eta = (n - n_y)n_y + 1$. A escolha desses parâmetros é baseada em testes e na experiência prévia com o algoritmo de otimização. Todas as formulações LMI foram implementadas usando o YALMIP (Lofberg, 2004) e solucionadas pelo *solver* SDPT3 (Toh et al., 1999). A variável σ para teste de factibilidade é obtida pela função `check` do YALMIP: `sigma=min(check(LMIs))`, sendo LMIs o conjunto de restrições LMI. Devido à dificuldade de discretização de modelos politópicos, os projetos são comparados com base nos possíveis valores máximos de norma \mathcal{H}_∞ no domínio de incerteza, ε^* , problema (21), calculados também pelo método evolução diferencial.

3.1 Exemplo: coluna de destilação binária

Considere o modelo incerto no espaço de estados de uma coluna de destilação binária com variação de pressão apresentado em Davison (1990). Neste estudo de caso são considerados dois parâmetros incertos, $p_1 \in [0,0112; 0,0168]$ e $p_2 \in [0,0148; 0,0222]$, e três variáveis de estados adicionais associadas às integrais dos erros das saídas em relação ao ponto de operação, que são incluídas nas variáveis medidas. As variáveis de desempenho são definidas para obter um compromisso entre a minimização das integrais dos erros e do esforço de controle:

$$\begin{aligned} C_z &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 11} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 11} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, D_{zw} = \mathbf{0}_{6 \times 1}, D_{zu} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \rho \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \\ C_y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Tabela 1. Comparação entre os custos garantidos \mathcal{H}_∞ das formulações LMI.

Formulações	Parâmetros	σ	γ^*	ε^*
Teorema 1, Morais et al. (2013), $L = \mathbf{0}$	$\xi = -0,43$	$9,50 \times 10^{-10}$	24,4780	8,1809
Teorema 1, Morais et al. (2013), $L = L^*$	$\xi^* = 0,6518$	$2,74 \times 10^{-11}$	6,0196	6,0135
Lema 8, Chang et al. (2015)	-	$-1,95 \times 10^{-8}$	24,9847	9,4616
Lema 9, Chang et al. (2015)	$\nu = 7,11$	$-5,27 \times 10^{-7}$	5,6274	42,5084
Teorema 4, Chang et al. (2015)	$\beta^* = 0,0029, \rho^* = -1,1598$	$-2,27 \times 10^{-9}$	38,0923	6,2333
Teorema 3, Agulhari et al. (2010)	$\gamma = 6,477$	-123,9509	$1,0077 \times 10^4$	38,5151

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 0,0043 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0095 & -0,0138 & 0,0046 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0095 & -0,0141 & 0,0063 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0095 & -0,0158 & 0,011 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0095 & -0,0312 & 0,015 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0202 & -0,0352 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0202 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,022 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0422 & 0,0280 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0202 & -0,0482 & 0,037 & 0 & 0,0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0202 & -0,0572 & 0,042 & 0,0005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0202 & -0,0483 & 0,0005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0255 & -p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,01 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,000005 & -0,00004 & 0,0025 \\ 0,000002 & -0,00002 & 0,005 \\ 0,000001 & -0,00001 & 0,005 \\ 0 & 0 & 0,005 \\ 0 & 0 & 0,005 \\ -0,000005 & 0,00001 & 0,005 \\ -0,00001 & 0,00003 & 0,005 \\ -0,00004 & 0,000005 & 0,0025 \\ -0,00002 & 0,000002 & 0,0025 \\ 0,00046 & 0,00046 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

As variáveis do problema são: $|u_1| \leq 2,5$, temperatura do vapor do trocador de calor, posicionado na base da coluna de destilação, $|u_2| \leq 2,5$, temperatura do líquido refrigerante do condensador no topo da coluna, $|u_3| \leq 0,3$, vazão de refluxo no topo da coluna, $|w_1| \leq 1$, variação da concentração da entrada de alimentação, $y_1 = x_{10}$, composição do componente mais volátil no trocador de calor (produto da base), $y_2 = x_1$, composição do componente mais volátil no condensador (produto do topo ou destilado), $y_3 = x_{11}$, pressão, e x_2 até x_9 , composições dos componentes mais voláteis nos pratos 1 (mais alto) a 8 (mais baixo), respectivamente. Todas as variáveis representam variações em torno do ponto de operação. O sistema é discretizado adotando $h = 30s$. Foi adotado

$\rho = 2$ para tentar limitar as variáveis de entrada dentro dos limites especificados.

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos para diferentes formulações LMI que geraram sistemas robustamente estáveis mesmo a partir de soluções não factíveis. Na Tabela 1, os parâmetros são os escalares que devem ser fixados *a priori* para linearizar a formulação LMI de síntese, σ é o valor relacionado com a factibilidade da solução do problema LMI, sendo que $\sigma < 0$ significa solução não factível, γ^* é o custo garantido \mathcal{H}_∞ retornado pela formulação LMI de síntese, que só é confiável quando $\sigma > 0$, ε^* é o valor máximo de norma \mathcal{H}_∞ obtido por otimização, resolvendo o problema (21). Para as formulações com soluções não factíveis ($\sigma < 0$), buscou-se as soluções com maiores valores de σ . Como destacado em negrito na Tabela 1, o método proposto para otimização da matriz L e do parâmetro ξ no Teorema 1 apresentado em Morais et al. (2013), com a mudança de variáveis, apresentou o menor resultado de ε^* . Sem a otimização de L , a única solução factível foi obtida para $L = \mathbf{0}$ cujo valor de ε^* é 45,3% maior do que o obtido pela matriz L otimizada. Todas as outras formulações apresentaram soluções com $\sigma < 0$ e valores de γ^* ou muito acima de ε^* ou até mesmo abaixo. O Teorema 4 apresentado em Chang et al. (2015), apesar de não obter uma solução factível, na análise do controlador resultante foi obtido ε^* apenas 3,7% maior do que o melhor obtido, mas vale informar que os dois parâmetros foram obtidos usando o mesmo método proposto, baseado em otimização, para a determinação de L e ξ , retirando a restrição $g_1 \leq 0$ da função objetivo (19). Também pode ser observado o menor conservadorismo da formulação de síntese com os valores ótimos de L^* e ξ^* . O melhor controlador obtido pelo método proposto é dado por:

$$K = \begin{bmatrix} 216,9609 & -1.292,1 & -63,3178 \\ -252,5762 & 1.098,8 & -66,7074 \\ -22,5094 & -61,2016 & 0,6427 \\ -9,6019 & 2,7475 & 41,1298 \\ 9,4913 & -2,8335 & -35,1783 \\ 1,1239 & -0,3649 & -0,3278 \end{bmatrix}.$$

Considere uma perturbação tipo pulso unitário começando no instante 30 e terminando no instante 90. As respostas dos controladores obtidos pelo método proposto e pelo Teorema 4 em Chang et al. (2015) são apresentadas na Fig. 1. Apesar dos custos garantidos \mathcal{H}_∞ próximos, o controlador obtido pelo método proposto teve desempenho melhor. Além disso, os sinais de entrada ficaram limitados em $|u_1(t)| \leq 2,10$, $|u_2(t)| \leq 2,09$ e $|u_3(t)| \leq 0,26$, respeitando os limites especificados.

Nota 1: para este estudo de caso, a escolha $L = \mathbf{0}$ resultou em solução factível ao passo que L dado pela Eq. (16), tanto com sinal positivo ou negativo, resultaram em soluções não factíveis com sistema não robustamente

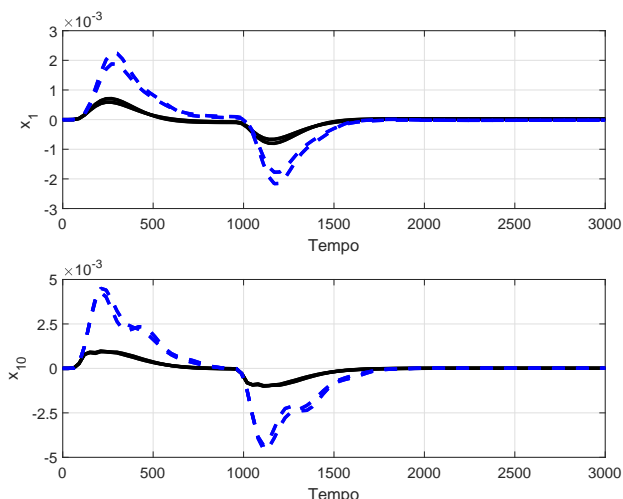


Figura 1. Transitórios das composições no topo e na base para os 4 vértices, proposto, linha preta contínua, e Teorema 4, Chang et al. (2015), azul tracejado.

estável. Este fato não é uma situação geral, mas reforça a importância do método proposto neste trabalho de determinação da matriz L .

4. CONCLUSÃO

Foi proposto neste trabalho uma forma de determinação ótima da variável matricial que é incluída quando se utiliza um método de transformar qualquer formulação LMI de síntese de controle robusto por realimentação de estados em uma formulação LMI de síntese de controle robusto por realimentação estática de saída. Como verificado no estudo de caso apresentado, este método pode gerar controladores com melhor desempenho do que outras técnicas existentes. Existem na literatura três possibilidades de cálculo desta variável matricial adicional, cujo número de termos depende dos números de variáveis de estados e de saídas medidas, mas que não garantem uma solução ótima ou até mesmo uma solução factível. Com o método proposto de cálculo baseado em otimização evolutiva, é possível obter o valor ótimo desta variável matricial que resulta no sistema de controle com melhor desempenho. Além disso, pelo método proposto é incluído na otimização as variáveis escalares, que aparecem em algumas formulações de síntese, que devem ser fixadas *a priori*. O alto custo computacional, considerando que cada solução candidata envolve a solução de um problema LMI, é compensado pelo melhor desempenho do sistema de controle que pode significar menor custo de produção, melhor qualidade do produto final, menos perdas no controle de qualidade etc.

REFERÊNCIAS

Agulhari, C.M., Oliveira, R.C., and Peres, P.L. (2010). Robust \mathcal{H}_∞ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains. In *Proceedings of the 2010 american control conference*, 4677–4682. IEEE, Baltimore, MD, USA. doi:10.1109/ACC.2010.5531079.

Bernussou, J., Peres, P., and Geromel, J. (1989). A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13(1), 65–72. doi:10.1016/0167-6911(89)90022-4.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, PA. doi:10.1137/1.9781611970777.

Chang, X.H., Park, J.H., and Zhou, J. (2015). Robust static output feedback \mathcal{H}_∞ control design for linear systems with polytopic uncertainties. *Systems & Control Letters*, 85, 23–32. doi:10.1016/j.sysconle.2015.08.007.

Davison, E.J. (1990). Benchmark problems for control system design. *Report of the IFAC Theory Committee*.

De Oliveira, M.C., Bernussou, J., and Geromel, J.C. (1999). A new discrete-time robust stability condition. *Systems & control letters*, 37(4), 261–265. doi:10.1016/S0167-6911(99)00035-3.

De Oliveira, M.C., Geromel, J.C., and Bernussou, J. (2002). Extended \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International journal of control*, 75(9), 666–679. doi:10.1080/00207170210140212.

Gonçalves, L.S. and Gonçalves, E.N. (2021). Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de saída combinando otimização evolutiva e formulações LMI. In *Anais do XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI 2021*, 16–21. Sociedade Brasileira de Automática. doi:10.20906/sbai2021/215459.

Gopmandal, F. and Ghosh, A. (2021). A hybrid search based synthesis of static output feedback controllers for uncertain systems with application to multivariable pid control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(12), 6069–6090. doi:10.1002/rnc.5581.

Lofberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*, 284–289. IEEE. doi:10.1109/CACSD.2004.1393890.

Morais, C.F., Braga, M.F., Oliveira, R.C., and Peres, P.L. (2013). Robust state feedback control for discrete-time linear systems via lmis with a scalar parameter. In *2013 American Control Conference*, 3870–3875. IEEE, Washington, DC, USA. doi:10.1109/ACC.2013.6580430.

Palacios-Quinonero, F., Rubió-Massegú, J., Rossella, J., and Karimib, H. (2014). Feasibility issues in static output-feedback controller design with application to structural vibration control. *Journal of the Franklin Institute*, 351(1), 139–155. doi:10.1016/j.jfranklin.2013.08.011.

Rubió-Massegú, J., Rossell, J., Karimi, H., and Palacios-Quinonero, F. (2013). Static output-feedback control under information structure constraints. *Automatica*, 49(1), 313–316. doi:10.1016/j.automatica.2012.10.012.

Storn, R. and Price, K. (1997). Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4), 341–359. doi:10.1023/A:1008202821328.

Toh, K.C., Todd, M.J., and Tütüncü, R.H. (1999). SDPT3 — a MATLAB software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization methods and software*, 11(1-4), 545–581. doi:10.1080/10556789908805762.