

Fusão de Estimativas Resiliente a Erros Grosseiros para a Estimação de Estados Híbrida em Sistemas Elétricos de Potência

Larah Brüning Ascari* Antonio Simões Costa**

Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica, Universidade Federal de Santa-Catarina, SC

* (e-mail: lahrah.ascari@posgrad.ufsc.br)

** (e-mail: simoes.costa@ufsc.br)

Abstract: Recently, fusion architectures have presented great notoriety in the context of hybrid power system state estimation. By employing a two-stage model, those architectures allow the inclusion of new data sources such as synchronized phasor measurements, without requiring the exclusion of well-established estimators. According to the conventional fusion paradigm, in case gross measurements pass unnoticed through first stage estimators, final fusion results will inevitably be also contaminated, as there is no second layer of defense against spurious data. This paper presents an alternative formulation based on the Maximum Correntropy Criterion (MCC) to constitute a novel fusion framework. In the absence of gross errors, the fusion via MCC approach is completely equivalent to the classical one. In addition to that, however, the proposed strategy equips the fusion module with an extra functionality as an active layer of protection against inconsistent data, whenever gross errors are not properly filtered by the first-stage estimators. The proposed approach is evaluated through several experiments conducted on the 14-bus *IEEE* test system.

Resumo: Em anos recentes, arquiteturas de fusão de estimativas têm se destacado no contexto da estimação híbrida de estados em sistemas de potência. Estas arquiteturas permitem incluir novas classes de dados, e em especial medidas provenientes de Unidades de Medição Fasorial Sincronizada (PMUs), fortalecendo o processo de estimação, sem demandar a exclusão de estimadores convencionais. Considerando o paradigma clássico da fusão de estimativas, o processamento de erros grosseiros está limitado à atuação dos estimadores do primeiro estágio da arquitetura de fusão. Na hipótese de que medidas espúrias passem despercebidas pelos estimadores individuais, as estimativas contaminadas produzidas no estágio inicial irão afetar o estágio seguinte no qual ocorre a fusão de estimativas, caso não exista uma segunda linha de defesa contra os dados espúrios. Nessa perspectiva, o presente artigo apresenta uma formulação alternativa, fundamentada no critério de máxima correntropia (CMC), para constituir um novo módulo de fusão de estimativas. Na ausência de erros grosseiros, a metodologia de fusão baseada no CMC apresenta total equivalência com a fusão clássica. Entretanto, a estratégia proposta atribui uma função extra ao módulo de fusão, que passa a representar uma camada ativa de proteção contra dados espúrios nos casos em que erros grosseiros não foram devidamente filtrados pelos estimadores do primeiro estágio da arquitetura. O desempenho da arquitetura proposta é avaliado mediante experimentos conduzidos no sistema-teste de 14 barras do *IEEE*.

Keywords: Hybrid power system state estimation; Estimates fusion; Bad data processing; Maximum correntropy criterion.

Palavras-chaves: Estimação híbrida de estados em sistemas elétricos de potência; Fusão de estimativas; Processamento de erros grosseiros; Critério de máxima correntropia.

1. INTRODUÇÃO

As medidas elétricas que subsidiam os processos de estimação de estados em sistemas de potência (EESP) são convencionalmente coletadas por meio do sistema de supervisão SCADA (do Inglês *Supervisory Control and Data*

* Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Aquisition). Entretanto, Unidades de Medição Fasorial Sincronizada (PMUs) constituem uma tecnologia em ascensão que disponibiliza uma nova classe de medições, cuja elevada qualidade desperta interesse às aplicações em estimação de estados (Phadke and Thorp, 2008). Prevendo a coexistência de ambos os sistemas de aquisição de dados, diversas categorias de arquiteturas híbridas de estimação têm sido propostas para permitir a incorporação de medidas fasoriais sem a exclusão da infraestrutura do sistema SCADA. Dentre a variedade de estimadores híbridos, as ar-

quitaturas de fusão de estimativas têm apresentado grande destaque pois exibem ampla flexibilidade para inclusão de novas classes de medidas sem demandar alterações em estimadores convencionais bem consolidados (Simões Costa et al., 2013; Ascari et al., 2019). Nestas arquiteturas, o processo de estimação ocorre em duas etapas. No primeiro estágio, estimadores individuais customizados, de acordo com as características de cada classe de dados, realizam o processamento de medidas e produzem diferentes conjuntos de estimativas. Em uma segunda etapa, as estimativas individuais são combinadas através de um *módulo de fusão*, segundo um critério de otimização pré-estabelecido, tradicionalmente baseado nos princípios de mínima variância (Simões Costa et al., 2013; Zhu, 2003). Este processo é capaz de aproveitar características específicas de cada conjunto de estimativas individuais e, por sua vez, produz estimativas finais aprimoradas com qualidade superior às estimativas de entrada (Simões Costa et al., 2013).

Seja qual for a estratégia de estimação adotada, os algoritmos devem ser capazes de fornecer estimativas aderentes ao real estado operativo da rede, mesmo em condições adversas, como na presença de medições contaminadas por erros de elevadas magnitudes. Caso não sejam processadas corretamente, medidas elétricas grosseiras podem comprometer a estimação de estados de tal forma que as estimativas produzidas não estejam de acordo com o real estado operativo da rede. Para enfrentar este problema, algoritmos de estimação convencionais, normalmente baseados no critério de mínimos quadrados ponderados (MQP), apresentam etapas adicionais específicas para detecção, identificação e tratamento de erros grosseiros (Abur and Exposito, 2004). Estimadores de estados fundamentados no critério de máxima correntropia (CMC) surgem como alternativa à estimação convencional baseada nos MQP, pois apresentam maneiras mais sofisticadas para tratar os efeitos deletérios associados aos erros grosseiros (Miranda et al., 2009; Ascari et al., 2019; Massignan et al., 2020; Meneghetti et al., 2020; Freitas et al., 2020). Estes métodos mostram-se atraentes para aplicação à EESP, já que exibem propriedades superiores de resiliência a erros grosseiros, e conseqüentemente dispensam custosas etapas de pós-processamento necessárias em estimadores convencionais para eliminação de possíveis efeitos danosos causados por medidas espúrias.

Quando consideramos o paradigma clássico de fusão de estimativas, o processamento de dados discrepantes está limitado à atuação dos estimadores do primeiro estágio da arquitetura de fusão. Na hipótese de que medidas espúrias passem despercebidas pelos estimadores individuais, as estimativas contaminadas produzidas no primeiro estágio irão inevitavelmente afetar o resultado final da fusão, caso não exista uma segunda linha de defesa contra os dados espúrios. Para lidar com este problema em arquiteturas de fusão, alguns métodos podem ser encontrados na literatura. Em (Ascari et al., 2019) uma formulação baseada no CMC é utilizada no estágio inicial de estimação. Dessa maneira, a estratégia cria resistência a erros grosseiros, porém apenas antes que as estimativas individuais atinjam o estágio de fusão propriamente dito, ou seja, sem introduzir uma camada extra de proteção. Outra proposta pode ser encontrada em (Do Coutto Filho et al., 2014). Esta estratégia aproveita a suposta independência estatís-

tica entre duas classes de estimativas do primeiro estágio para derivar testes estatísticos que cruzam informações de forma a averiguar a persistência de possíveis erros grosseiros. Os resultados confirmam um grande potencial de eliminação destes erros antes da execução do módulo de fusão das estimativas. Contudo, isso é atingido por meio da adição de etapas intermediárias (entre os estimadores do primeiro estágio e o módulo de fusão). Além disso, esta metodologia é adequada para aplicações que consideram apenas duas classes de sensores no primeiro estágio, não abrangendo portanto soluções para arquiteturas de fusão de estimativas de uma maneira mais ampla.

Com o intuito de promover maior robustez contra dados discrepantes no contexto das arquiteturas de fusão de estimativas, o presente artigo apresenta uma formulação alternativa fundamentada na função correntropia para constituir um novo módulo de fusão. Na ausência de erros grosseiros, a metodologia de fusão baseada no CMC apresenta total equivalência à formulação clássica. Para além disso, entretanto, a partir da formulação proposta o módulo de fusão passa a representar uma camada ativa de proteção contra dados espúrios nos casos em que erros grosseiros não foram devidamente filtrados pelos estimadores do primeiro estágio da arquitetura.

Dando seguimento a este artigo, a Seção 2 introduz os conceitos básicos relacionados à clássica EESP. Em seqüência, a Seção 3 apresenta o arcabouço teórico que fundamenta a estimação de estados a partir de novos conceitos da teoria da informação. Na Seção 4, a clássica arquitetura de fusão de estimativas é revisada. A estratégia proposta de fusão de múltiplas estimativas via CMC é apresentada na Seção 5. A Seção 6 apresenta propostas para aplicação da fusão baseada no CMC à EESP. Os resultados da aplicação a um sistema-teste são discutidos na Seção 7.

2. ESTIMAÇÃO DE ESTADOS CLÁSSICA

Considerando um sistema elétrico com N barras e m medidas, o número de estados a serem estimados será $n = 2N - 1$. O modelo de medição é dado por

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta} \quad (1)$$

onde \mathbf{z} é o vetor $m \times 1$ de medidas, $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ é o vetor das funções não lineares que relacionam as quantidades medidas aos estados \mathbf{x} , e $\boldsymbol{\eta}$ é o vetor $m \times 1$ de erros aleatórios de medição. Sob condições usuais, supõe-se que o vetor de erros de medição tem distribuição normal, média zero e que estes erros são não-correlacionados, o que implica em que sua matriz de covariância \mathbf{R} seja diagonal, sendo que o i -ésimo elemento diagonal corresponde à variância σ_i^2 da i -ésima medida.

Dado o modelo de medição, a solução convencional para a EESP pode ser obtida a partir do seguinte problema de mínimos quadrados ponderados (MQP) (Schweppe and Wildes, 1970; Monticelli, 1999):

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}} J_{MQP}(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] \quad (2)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}$ é o vetor $m \times 1$ de estados estimados.

A solução clássica do Problema (2) é obtida por meio do método da Equação Normal de Gauss, que dá origem ao seguinte sistema linear a ser resolvido a cada iteração para obtenção do vetor de incrementos do vetor de estados, $\Delta\mathbf{x}$:

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{z} \quad (3)$$

onde \mathbf{H} é a matriz Jacobiana $m \times n$ das funções não lineares $\mathbf{h}(\cdot)$ que deve ser computada a cada iteração k para um dado $\hat{\mathbf{x}}^k$, e $\Delta \mathbf{z}$ é o vetor $m \times 1$ de medidas incrementais dado por $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^k)$.

Nos processos de estimação de estados, algumas matrizes apresentam grande relevância. Este é o caso da matriz ganho, definida como a matriz $n \times n$ de coeficientes no lado esquerdo da equação (3):

$$\mathbf{G} \triangleq \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \quad (4)$$

Um outro conceito relevante no contexto da EESP está relacionado à matriz de covariância dos erros de estimação \mathbf{P} que pode ser calculada ao final do processo através da seguinte expressão (Schweppe and Wildes, 1970):

$$\mathbf{P} = \mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1}. \quad (5)$$

Apesar de ser amplamente utilizada, a formulação da EESP fundamentada no critério de MQP revela-se consideravelmente sensível à ocorrência de erros grosseiros. Dessa forma, após obter as estimativas $\hat{\mathbf{x}}$, torna-se necessário a execução de etapas acessórias para detecção, identificação e tratamento de medidas discrepantes (Schweppe and Wildes, 1970; Abur and Exposito, 2004).

3. TEORIA DA INFORMAÇÃO APLICADA À EESP

Ao longo dos anos, diversas contribuições têm investigado métodos alternativos ao método clássico de MQP que permitam dispensar etapas adicionais dedicadas exclusivamente ao processamento de erros grosseiros. Esses trabalhos buscam desenvolver critérios de otimização com base em funções não-quadráticas que possibilitem a supressão desses erros ao longo do processo de estimação propriamente dito (Merrill and Schweppe, 1971; Mili et al., 1996; Pires et al., 1999; Miranda et al., 2009). Dentre essas abordagens, métodos desenvolvidos com base em novos princípios do campo da Teoria da Informação (Santamaria et al., 2006; Liu et al., 2007) apresentam grande destaque no contexto recente da estimação em sistemas de potência (Miranda et al., 2009; Ascari et al., 2019; Freitas et al., 2020; Meneghetti et al., 2020; Massignan et al., 2020). Esse métodos utilizam um novo critério de otimização que associa os conceitos de correntropia (Liu et al., 2007) e janelas de Parzen (Parzen, 1962) para atingir características superiores de resiliência contra erros grosseiros.

O conceito de *correntropia* pode ser percebido como uma medida da similaridade entre duas variáveis aleatórias dentro de uma determinada janela de observação, definida por uma função *kernel* Gaussiana. A variância desse *kernel* σ_w^2 estabelece a largura da *janela de Parzen* (ou janela de observação) dentro da qual a semelhança entre as variáveis é avaliada (Liu et al., 2007). Considerando N amostras escalares das variáveis aleatórias X e Y , uma estimativa \hat{V} para a função correntropia pode ser expressa como:

$$\hat{V}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \kappa(x_i - y_i, \sigma_w) \quad (6)$$

onde o *kernel* Gaussiano é definido por:

$$\kappa(x_i - y_i, \sigma_w) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w}} e^{-\frac{(x_i - y_i)^2}{2\sigma_w^2}} \quad (7)$$

A largura da janela de observação σ_w estabelece um importante instrumento para processamento de medidas espúrias no contexto da estimação de estados. Através de ajustes apropriados para este parâmetro, é possível conceber mecanismos que permitem a rejeição automática de erros grosseiros.

Em contraste com a abordagem convencional, que visa a minimização dos resíduos, a correntropia busca extrair a máxima semelhança entre as amostras disponíveis. Isto é realizado através da aplicação do chamado *Critério de Máxima Correntropia* (CMC). Quando janelas de observação suficientemente amplas são consideradas, o CMC leva a soluções equivalentes àquelas que seriam obtidas por meio do procedimento clássico de MQP. Por outro lado, o ajuste adequado para a janela de observação permite que o CMC obtenha soluções mais aprimoradas.

4. ARQUITETURAS DE FUSÃO DE ESTIMATIVAS

O principal objetivo das arquiteturas de fusão é combinar apropriadamente informações coletadas a partir de diferentes fontes de dados (sensores). Este propósito pode ser alcançado através da aplicação de métodos de otimização que buscam aproveitar as características individuais de cada classe de medições como forma de obter soluções finais aprimoradas.

A fusão de estimativas (Zhu, 2003), ilustrada na Figura 1, é uma das formas de fusão previamente proposta para aplicações em EESP (Simões Costa et al., 2013; Do Coutto Filho et al., 2014; Ascari et al., 2019). No primeiro estágio da arquitetura, cada conjunto de observações coletadas por ℓ distintas classes de sensores S_i , $i = 1, 2, \dots, \ell$, abastecem informações para os correspondentes estimadores de estados, que produzem ℓ conjuntos de estimativas $\hat{\mathbf{x}}_i$. Em um segundo estágio, o *módulo de fusão* combina as estimativas adquiridas no primeiro nível e então produz as estimativas ótimas finais, $\hat{\mathbf{x}}^*$.

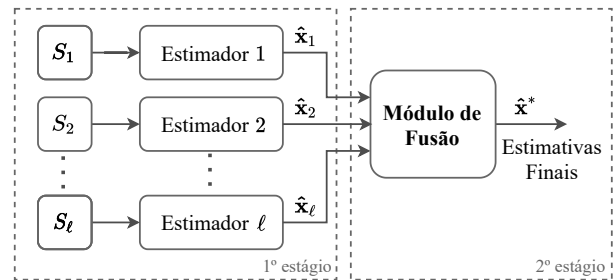


Figura 1. Fusão de múltiplas estimativas

4.1 Fusão de Estimativas via Minimização da Variância

Convencionalmente, o critério de otimização empregado no módulo de fusão baseia-se na *minimização da variância do erro de estimação*, $\hat{\mathbf{x}}^* - \mathbf{x}$. Nessa perspectiva, a estimativa final ótima $\hat{\mathbf{x}}^*$ é obtida através de uma particular combinação das estimativas do primeiro estágio:

$$\hat{\mathbf{x}}^* = \Psi_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \Psi_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \dots + \Psi_\ell \hat{\mathbf{x}}_\ell = \Psi^T \hat{\mathbf{x}} \quad (8)$$

onde $\Psi \triangleq [\Psi_1, \dots, \Psi_\ell]^T$ e $\hat{\mathbf{x}} \triangleq [\hat{\mathbf{x}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{x}}_\ell^T]^T$. Além disso, as matrizes de ponderação Ψ_1, \dots, Ψ_ℓ , são determinadas

pela solução do seguinte problema de otimização que visa a minimização da variância dos erros de estimação:

$$\begin{aligned} \min_{\Psi} & E[(\Psi^T \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\Psi^T \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T] \\ \text{s. a} & \sum_{i=1}^{\ell} \Psi_i = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (9)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensões $n \times n$. Assumindo que não há correlação entre os erros de estimação das diferentes classes de sensores, o Problema (9) apresenta solução única Ψ , que leva a solução de mínima variância (Zhu, 2003). Em termos das matrizes de ganho, as matrizes ótimas de ponderação podem ser escritas como (Simões Costa et al., 2013):

$$\Psi_i = (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \dots + \mathbf{G}_\ell)^{-1} \times \mathbf{G}_i \quad (10)$$

Utilizando-se (8) e (10), a estimativa ótima final é dada por:

$$\left(\sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{G}_j \right) \hat{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{G}_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad (11)$$

5. FUSÃO DE ESTIMATIVAS COM BASE NO CRITÉRIO DE MÁXIMA CORRENTROPIA

Buscando uma alternativa para a metodologia clássica de fusão de estimativas (conforme Seção 4.1), propõe-se o desenvolvimento de uma nova formulação matemática para o módulo de fusão fundamentada no critério de máxima correntropia (vide Seção 3). Esta nova abordagem tem como propósito introduzir na arquitetura de estimação híbrida uma frente adicional de defesa contra erros grosseiros.

A nova arquitetura de fusão segue os mesmos moldes da estratégia apresentada pela Figura 1, porém agora com módulo de fusão baseado no CMC. O objetivo da fusão efetuada via CMC é determinar o vetor ótimo de estimativas $\hat{\mathbf{x}}^*$ que maximize a similaridade entre ele próprio e os outros ℓ vetores de estimativas do primeiro estágio. Para isso, define-se a seguinte função correntropia apropriada ao presente contexto:

$$\mathcal{V} \triangleq \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \kappa_{\mathbf{G}_j}(\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_j, \sigma_w) \quad (12)$$

onde $\kappa_{\mathbf{G}_j}(\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_j, \sigma_w)$ é o *kernel* Gaussiano, com largura σ_w , ajustado considerando as matrizes de Ganho \mathbf{G}_j correspondentes às estimativas $\hat{\mathbf{x}}_j$. Mais especificamente, o *kernel* é definido por:

$$\kappa_{\mathbf{G}_j}(\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_j, \sigma_w) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{\|\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_j\|_{\mathbf{G}_j}^2}{2\sigma_w^2}} \quad (13)$$

onde

$$\|\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_j\|_{\mathbf{G}_j}^2 \triangleq (\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_j)^T \mathbf{G}_j (\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_j), \quad (14)$$

Após algumas simplificações, o problema de *Fusão de Estimativas via CMC* passa a ser expresso por:

$$\max_{\hat{\mathbf{x}}^*} \mathcal{V} = \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} e^{-\frac{\|\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_j\|_{\mathbf{G}_j}^2}{2\sigma_w^2}} \quad (15)$$

A estimativa $\hat{\mathbf{x}}^*$ que maximiza a correntropia pode ser determinada pela solução do Problema (15) mediante o estabelecimento das condições de otimalidade e da aplicação de métodos computacionais de solução, como por exemplo

o método de Newton. Após manipulações algébricas, as referidas condições de otimalidade assumem a forma:

$$\left(\sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{G}_j e^{-\frac{\|\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_j\|_{\mathbf{G}_j}^2}{2\sigma_w^2}} \right) \hat{\mathbf{x}}^* = \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{G}_j e^{-\frac{\|\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_j\|_{\mathbf{G}_j}^2}{2\sigma_w^2}} \hat{\mathbf{x}}_j \quad (16)$$

5.1 Consistência com a Fusão Clássica de Estimativas

A formulação clássica para fusão de estimativas, revisada na Seção 4.1, baseia-se na combinação das estimativas por meio do uso de matrizes de ponderação. Para fins de comparação, é instrutivo definir matrizes similares no contexto da fusão via CMC. De maneira semelhante ao problema clássico, a Equação (16) pode ser escrita como

$$\hat{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{\Psi}_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad (17)$$

onde $\tilde{\Psi}_i$ são as matrizes de ponderação definidas para fusão via CMC, diretamente obtidas de (16):

$$\tilde{\Psi}_i = \left(\sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{G}_j e^{-\frac{\|\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_j\|_{\mathbf{G}_j}^2}{2\sigma_w^2}} \right)^{-1} \mathbf{G}_i e^{-\frac{\|\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_i\|_{\mathbf{G}_i}^2}{2\sigma_w^2}}, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (18)$$

A partir da expressão (18), pode-se concluir que a soma das matrizes de ponderação $\tilde{\Psi}_i$ sempre resultam na matriz identidade \mathbf{I} de dimensões $n \times n$, ou seja $\sum_{i=1}^{\ell} \tilde{\Psi}_i = \mathbf{I}$. Isto significa que a restrição definida classicamente para Problema de fusão (9) é naturalmente atendida no contexto da fusão via CMC, sem a necessidade de inclusão explícita da restrição de igualdade no Problema (15).

Outra característica notável da fusão via CMC pode ser observada quando amplas janelas de observação são consideradas, isto é, valores elevados porém finitos de σ_w . Nesse cenário, em que a capacidade de detecção de erros grosseiros via CMC é desabilitada, observa-se que todos os termos exponenciais de (18) tendem à unidade. Como consequência, o lado direito de (18) se reduz à (10), e portanto $\tilde{\Psi}_i = \Psi_i$. Em outras palavras, nas condições descritas, a solução da fusão baseada no CMC reduz-se à solução que seria obtida através da formulação convencional. Conclui-se que a fórmula de fusão que busca a mínima variância pode ser vista como um caso particular da fusão via CMC quando a janela de observação é suficientemente ampla.

Na prática, o tamanho da janela de observação σ_w deve ser controlado como forma de constituir uma ferramenta para a depuração de possíveis incongruências dentre as estimativas de entrada.

5.2 Ajustes das Janelas de Observação

A função-objetivo do Problema (15) que descreve a fusão via CMC é essencialmente composta pela soma de termos exponenciais similares, que podem ser denotados individualmente em sua forma genérica por \mathcal{V}_i :

$$\mathcal{V}_i = e^{-\frac{(\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_i)^T \mathbf{G}_i (\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_i)}{2\sigma_w^2}}. \quad (19)$$

Na ausência de erros grosseiros e na suposição de erros aleatórios com distribuição Gaussiana, o valor de $\hat{\mathbf{x}}^*$ deve ser próximo ao vetor verdadeiro \mathbf{x}_i . Portanto, $(\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}^*)$

é uma boa aproximação para o vetor de erros de estimação. Considerando que o vetor $\hat{\mathbf{x}}^*$ é composto por n variáveis aleatórias independentes, conclui-se, que o termo no numerador do expoente de (19), definido por $J_i \triangleq (\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_i)^T \mathbf{G}_i (\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_i)$, deve seguir a distribuição do qui-quadrado (χ^2) com o número de graus de liberdade gl igual ao número de variáveis de estado do sistema (n) (Ross, 2006).

A partir da definição de uma probabilidade de falso alarme α e considerando o número de graus de liberdade gl , pode-se determinar um limiar K para testes de hipóteses quanto à presença de erros grosseiros em J_i . Este limiar é dado pelo percentil $\chi_{gl,1-\alpha}^2$ da distribuição do qui-quadrado: $K = \chi_{gl,1-\alpha}^2$. Neste trabalho, K é adotado como valor de referência para definir as larguras inicial e mínima da janela de observação. Conseqüentemente, a variância do *kernel* Gaussiano σ_w^2 é definida como um múltiplo de K :

$$\sigma_w^2 = \beta K \quad \Rightarrow \quad \sigma_w = \sqrt{\beta K} \quad (20)$$

onde β é um parâmetro positivo utilizado para calibrar o tamanho da janela de observação de acordo com o caso de interesse. A escolha de σ_w em função do parâmetro K é atraente pelo fato de que a janela de Parzen, sendo definida por (20), apresenta uma característica de adaptação automática com relação à dimensão da rede, dado que K varia de acordo com o número de variáveis de estado.

No presente trabalho utilizam-se dois tamanhos básicos para σ_w . Um deles é o valor máximo de inicialização da janela e o segundo corresponde à mínima largura de observação. A janela inicial deve ser larga o suficiente de modo a englobar todas as estimativas, sem assumir a ocorrência de dados discrepantes. Isto permite reproduzir a solução que seria obtida pelo método clássico de fusão. Para assegurar esta condição, β inicial é escolhido como $\beta^0 = 10$. Portanto, a variância da janela de observação inicial será dez vezes maior do que o máximo valor K esperado para distribuição do qui-quadrado do termo J_i de (19). De (20), a janela inicial de observação σ_w^0 é então estabelecida como:

$$\sigma_w^0 = \sqrt{10K}. \quad (21)$$

Avaliando um cenário limite, no qual a soma ponderada dos resíduos de estimação está muito próxima do limite máximo esperado, isto é $J_i \approx K$, conclui-se a partir de (19) e (20) que \mathcal{V}_i será dada por

$$\mathcal{V}_i^{limite} = e^{-\frac{J_i}{2\sigma_w^2}} \approx e^{-\frac{K}{2\beta K}} = e^{-\frac{1}{2\beta}}. \quad (22)$$

Na ausência de efeitos de erros grosseiros sobre as estimativas de primeiro estágio, espera-se que J_i seja menor ou igual a K , o que implica em que \mathcal{V}_i deve ser maior ou igual a $e^{-\frac{1}{2\beta}}$. Dessa forma, e para $\beta^0 = 10$, pode-se estabelecer um valor mínimo Z esperado para \mathcal{V}_i :

$$Z = e^{-\frac{1}{2\beta}} = e^{-\frac{1}{2 \cdot 10}} = 0.951. \quad (23)$$

A partir de (22) e (23), deriva-se um teste de hipóteses aplicável a cada termo \mathcal{V}_i : se $\mathcal{V}_i \geq Z$, infere-se a inexistência de estimativas espúrias. Do contrário, se $\mathcal{V}_i < Z$, infere-se a existência de discrepâncias entre as estimativas do primeiro estágio.

Na hipótese do teste de detecção anteriormente descrito indicar discrepâncias, a janela de observação deve ser reduzida. A escolha da mínima janela de observação deve

levar em conta que seu valor seja pequeno o suficiente para permitir a eliminação de efeitos causados por erros grosseiros. Por outro lado, a janela não deve ser demasiadamente estreita para evitar que estimativas sãs sejam também interpretadas como deletérias. Neste trabalho, β é escolhido de forma que a variância da janela de observação mínima tenha tamanho igual ao valor máximo esperado K para a soma ponderada dos erros de estimação J_i , isto é $\beta_{min} = 1$. Conseqüentemente, conclui-se de (20) que a janela mínima de observação σ_w^{min} é dada por:

$$\sigma_w^{min} = \sqrt{K}. \quad (24)$$

Estimativas que estiverem fora da janela de observação mínima devem sofrer atenuações mais acentuadas. Em conseqüência, seus efeitos são naturalmente reduzidos no processo final de fusão.

6. APLICAÇÃO DA FUSÃO VIA CMC À EESP

Quando se trata de arquiteturas híbridas de estimação, tais como arquiteturas de fusão de estimativas, as classes de medições SCADA e PMU são candidatas naturais para estas aplicações (Simões Costa et al., 2013; Ascari et al., 2019). No contexto da fusão baseada no CMC, a arquitetura contemplando ambas as classes de estimativas é portanto considerada. Resultados preliminares, obtidos a partir de diversas simulações computacionais com sistemas de pequeno e médio porte, indicam entretanto que utilizar apenas duas classes de estimativas independentes equivale a lidar com pares críticos de medidas no contexto da estimação convencional (Gomez-Exposito et al., 2011; Monticelli, 1999). Ou seja, a estratégia fornece bons índices de detecção, porém há limitações no processo de identificação de qual das classes de estimativas está corrompida. Isto aponta para a necessidade de inclusão de novas informações que permitam identificar corretamente a classe de estimativas incongruentes. Com essa perspectiva, vislumbra-se que a adição de outras estimativas ao processo de fusão, e o conseqüente aumento do nível de redundância, gera condições suficientes para e permitir a correta identificação da classe de estimativas corrompida pelo erro grosseiro.

Como a formulação da fusão via CMC, apresentada na Seção 5, permite conjugar múltiplas estimativas, outras aplicações podem ser conjecturadas além da evidente utilização dos vetores de estimativas SCADA e PMU. Uma das possibilidades é utilizar também estimativas recentes, obtidas pela arquitetura de fusão proposta em instantes anteriores, como uma categoria adicional de estimativas de entrada para o módulo de fusão da estimação presente. Mais especificamente, são utilizados neste artigo os resultados da fusão obtidos no instante de execução da estimação de estados imediatamente anterior ao presente, como uma terceira classe de estimativas disponível ao processo de fusão atual. Esta escolha decorre do fato de que estimativas obtidas previamente passaram pelos mesmos procedimentos de depuração que produzem as estimativas atuais, de modo que podem ser consideradas suficientemente confiáveis para compor uma valiosa fonte de informação.

A Figura 2 ilustra a arquitetura de fusão que considera três conjuntos de estimativas disponíveis para o módulo de fusão: além das estimativas provenientes dos estimadores

7. RESULTADOS

SCADA e PMU ($\hat{\mathbf{x}}_s, \hat{\mathbf{x}}_p$), o módulo de fusão conta agora com a adição de uma terceira classe $\hat{\mathbf{x}}_a$ – que denota a estimativa *anterior*. Esta nova categoria de informações refere-se ao conjunto de estimativas finais ótimas obtidas da arquitetura de fusão que precede a execução do estimador quando $\hat{\mathbf{x}}_s$ e $\hat{\mathbf{x}}_p$ tornam-se disponíveis para processamento.

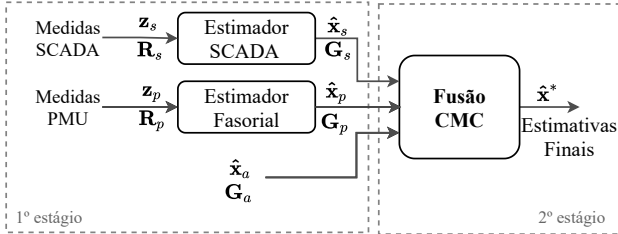


Figura 2. Fusão de estimativas para três classes de dados

Seguindo a formulação estabelecida em (15), o problema de otimização para a fusão baseada no CMC considerando três classes de estimativas ($\ell = 3$) toma a seguinte forma:

$$\max_{\hat{\mathbf{x}}^*} \mathcal{V} = \frac{1}{3} \left(e^{-\frac{\|\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_s\|_{\mathbf{G}_s}^2}{2\sigma_w^2}} + e^{-\frac{\|\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_p\|_{\mathbf{G}_p}^2}{2\sigma_w^2}} + e^{-\frac{\|\hat{\mathbf{x}}^* - \hat{\mathbf{x}}_a\|_{\mathbf{G}_a}^2}{2\sigma_w^2}} \right) \quad (25)$$

A solução ótima $\hat{\mathbf{x}}^*$ para o problema (25) pode ser obtida através da aplicação de um método iterativo de solução, como por exemplo o método de Newton. A cada iteração k , o vetor incremental $n \times 1$ de estimativas ótimas $\Delta \hat{\mathbf{x}}^*$ deve ser obtido pela solução do seguinte sistema linear:

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}^*}^2(\mathcal{V}) \Delta \hat{\mathbf{x}}^* = -\nabla_{\hat{\mathbf{x}}^*}(\mathcal{V}) \quad (26)$$

onde $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}^*}(\mathcal{V})$ e $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}^*}^2(\mathcal{V})$ são, respectivamente, o vetor gradiente de dimensões $n \times 1$ e a matriz hessiana $n \times n$ da função correntropia \mathcal{V} em função da variável de otimização $\hat{\mathbf{x}}^*$, ambos calculados a cada iteração k .

6.1 Matrizes de Ganho para a fusão de Estimativas

Quando consideramos estimativas obtidas diretamente dos estimadores SCADA e PMU, as respectivas matrizes ganho (\mathbf{G}_s e \mathbf{G}_p) são naturalmente disponibilizadas ao final do primeiro estágio. Uma questão ainda a ser discutida diz respeito à matriz ganho \mathbf{G}_a a ser usada no processo de fusão ilustrado na Figura 2. Sua definição deve ser capaz de retratar apropriadamente as incertezas associadas às estimativas anteriores. Como $\hat{\mathbf{x}}_a$ refere-se a um ponto de operação distinto, embora recente, é plausível que as correspondentes variâncias representem um nível de incerteza maior do que as associadas às estimativas correntes $\hat{\mathbf{x}}_s$ e $\hat{\mathbf{x}}_p$. Nessa perspectiva, seja \mathbf{P}_a a matriz de covariância dos erros de estimação associada à solução prévia. A partir da relação (5), propõe-se a seguinte aproximação para a matriz ganho associada às estimativas anteriores:

$$\mathbf{G}_a = (k_a \cdot \mathbf{P}_a)^{-1} = \frac{1}{k_a} \cdot \mathbf{P}_a^{-1} \quad (27)$$

onde $k_a > 1$ é um “fator de esquecimento” positivo, ajustado com o objetivo de escalonar o grau de incerteza associado às estimativas anteriores $\hat{\mathbf{x}}_a$. Neste trabalho utiliza-se fator de esquecimento $k_a = 4$. Isto significa que a importância associada às estimativas anteriores é escalonada para 25% de sua importância relativa original caso as três estimativas fossem simultâneas.

Para avaliar a viabilidade e desempenho da fusão de estimativas via CMC quando aplicada à EESP, diversos estudos são conduzidos considerando o sistema-teste de 14 barras do *IEEE*. A arquitetura utilizada corresponde àquela apresentada na Figura 2. Os estimadores SCADA e PMU do primeiro estágio são implementados através de algoritmos convencionais de MQP, e equipados com estágios para pós-processamento de erros grosseiros. As estimativas anteriores $\hat{\mathbf{x}}_a$ são obtidas através de uma execução prévia do estimador de fusão, a partir de uma simulação livre de erros grosseiros, considerando variações de carga de 1% entre o ponto de operação anterior e aquele que irá fornecer as novas estimativas.

A rede elétrica é suposta observável com respeito aos planos individuais de medição SCADA e fasorial. Com o objetivo de refletir condições de simulação mais realísticas, o índice de redundância associado ao plano SCADA ($\rho_s = 2,44$) é suposto maior do que aquele associado às PMUs ($\rho_p = 1,37$). As medidas são simuladas a partir de estudos de fluxo de potência convergidos e pela superposição de erros com distribuição Gaussiana e média zero. São supostos níveis de exatidão de 1,0% e 0,5% para as medidas SCADA e PMU, respectivamente.

A qualidade das estimativas é avaliada através da métrica de tensão proposta em (KEMA, 2006):

$$M_{\vec{V}} = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left| \vec{V}_{est}^j - \vec{V}_{real}^j \right|^2 \right)^{1/2} \quad (28)$$

onde \vec{V}_{real}^j e \vec{V}_{est}^j são, respectivamente, os valores reais e estimados do fasor tensão associado à j -ésima barra da rede, e N é o número de barras do sistema.

No que segue, as abreviaturas F_{CMC} e F_{MV} referem-se: à arquitetura de fusão proposta via CMC, e à fusão convencional de mínima variância, respectivamente. As notações $\hat{\mathbf{x}}_s$, $\hat{\mathbf{x}}_p$, $\hat{\mathbf{x}}_a$, são utilizadas para denominar as estimativas SCADA, PMU e anteriores, respectivamente. Nos casos pertinentes em que são apresentados os resultados para a fusão F_{MV} , o módulo de fusão clássica utiliza os mesmos dados de entrada do módulo de fusão via CMC.

7.1 Consistência com a fusão clássica

Supondo a inexistência de erros grosseiros, primeiramente busca-se investigar a consistência entre a fusão proposta e a metodologia de fusão convencional, conforme a discussão teórica descrita com detalhes na Subseção 5.1.

Uma análise da compatibilidade entre ambas as metodologias de fusão pode ser feita através de gráficos dos erros de estimação gerados a partir dos resultados. A Figura 3 apresenta as médias dos erros absolutos de estimação de cem simulações conduzidas no sistema-teste de 14 barras para cada conjunto individual de estimativas ($\hat{\mathbf{x}}_s$, $\hat{\mathbf{x}}_p$ e $\hat{\mathbf{x}}_a$) e também para os métodos de fusão F_{CMC} e F_{MV} .

Nestas condições, em que não há simulação de erros grosseiros, é possível observar que os resultados da fusão via CMC (representados em preto) são idênticos aos erros de estimação relacionados à fusão convencional (em amarelo). Além disso, ambos os conjuntos de resultados apresentam

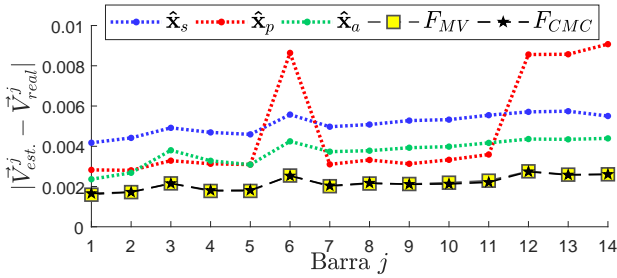


Figura 3. Médias dos valores absolutos dos erros entre os fasores de tensão estimados e verdadeiros considerando cenários livres de erros grosseiros.

precisão significativamente melhor do que as estimativas individuais do primeiro estágio. Esta última constatação está de acordo com resultados reportados em (Simões Costa et al., 2013), e pode ser explicada pela capacidade superior que os métodos de fusão possuem em fornecer combinações ótimas das estimativas considerando as características individuais de cada conjunto de informações.

As métricas de tensão apresentadas na Tabela 1 também podem ser utilizadas para demonstrar a consistência entre F_{CMC} e F_{MV} . Observa-se novamente a compatibilidade

Tabela 1. Valores médios das métricas de tensão considerando 100 simulações conduzidas sob cenários livres de erros grosseiros

\hat{x}_s	\hat{x}_p	\hat{x}_a	F_{MV}	F_{CMC}
0,00529	0,00575	0,00389	0,00230	0,00229

entre os resultados da fusão via CMC e da fusão convencional, já que a diferença nos valores das métricas de ambas estratégias é da ordem de 10^{-5} .

7.2 Exemplo de Processamento de Erro Grosseiro

Inicialmente, para ilustrar de forma detalhada o processamento de erros grosseiros desempenhado pela fusão via CMC, um exemplo de erro grosseiro em uma das medidas do sistema de 14 barras é selecionado.

O erro grosseiro simulado possui magnitude de 30 desvios-padrão e afeta a medida PMU da magnitude do fasor tensão \vec{V}_2 . Neste caso, o erro grosseiro não é detectado pelo estimador PMU do primeiro estágio e, como consequência, acaba por contaminar significativamente muitos dos elementos de \hat{x}_p .

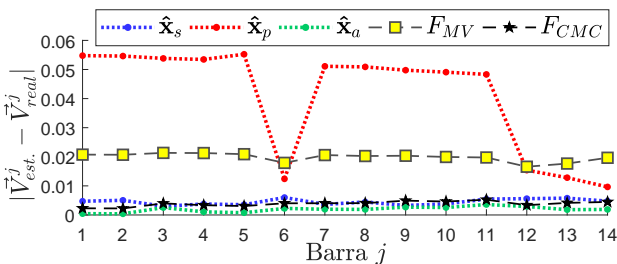


Figura 4. Erros absolutos dos fasores de tensão - exemplo de cenário considerando erro grosseiro em uma das medidas fasoriais.

A Figura 4 apresenta os erros fasoriais para as cinco estimativas considerando o cenário descrito acima. A medida espúria causa erros absolutos na ordem de 0,05 pu em

diversos elementos do conjunto de estimativas fasoriais \hat{x}_p (em vermelho). Como consequência, as estimativas obtidas pela fusão convencional F_{MV} (em amarelo) também são afetadas, e exibem erros na ordem de 0,02 pu. Em contraste, a estratégia de fusão F_{CMC} (em preto) é capaz de detectar e suprimir adequadamente os efeitos deletérios causados pelo erro grosseiro.

O processo de detecção decorre de ações realizadas após verificação dos valores das componentes de correntropia considerando a janela de observação inicial ($\sigma_w^0 = \sqrt{10K}$), onde $K = 40,11$ é o limiar do χ^2 obtido considerando uma probabilidade de falso alarme $\alpha = 5\%$ e número de graus de liberdade correspondente à rede de 14 barras. Nesta condição, o valor da componente de correntropia \mathcal{V}_p , relativa às estimativas PMU, é calculado em 0,8602. Este valor, estando significativamente abaixo do limiar de detecção $Z = 0,951$, conduz a uma redução da janela de Parzen para $\sigma_w^{min} = \sqrt{K} = 6,33$. Para $\sigma_w = \sigma_w^{min}$, o valor atualizado da componente de correntropia relacionada às estimativas PMU calculado para a estimativa ótima é $\mathcal{V}_p = 0,05$, enquanto as componentes \mathcal{V}_s e \mathcal{V}_a apresentam valores próximos ao máximo. O valor de \mathcal{V}_p próximo de zero demonstra a supressão das estimativas PMU na solução. Isto garante que a fusão via CMC reduza de maneira efetiva os efeitos deletérios associados a \hat{x}_p , e portanto apresente estimativas finais muito mais precisas, como é observado na Figura 4 pelos marcadores em preto.

7.3 Simulações Extensivas considerando Erros Grosseiros

Para avaliar mais a fundo o comportamento da metodologia de fusão proposta na presença de erros grosseiros, duzentas simulações são executadas no sistema de 14 barras. Cada uma das execuções inclui uma medida espúria com erro de magnitude 30σ localizada aleatoriamente na rede. Metade das simulações consideram erros grosseiros nas medidas PMU, e a outra metade em medidas SCADA.

Dentre o total de casos, em 62 simulações os erros grosseiros passaram pelo primeiro estágio de estimação sem serem detectados. Estes erros podem causar danos às estimativas do primeiro estágio, o que provavelmente irá afetar também os resultados do processo de fusão, caso não seja feito o tratamento apropriado. No entanto, em 100% destes casos o estimador F_{CMC} obteve sucesso na detecção e correta supressão das discrepâncias que atingem o estágio de fusão para o sistema de 14 barras.

A Tabela 2 apresenta os valores médios das métricas de tensão obtidas a partir das simulações descritas acima. Diferentemente da Seção 7.1, observa-se que, na presença de estimativas contaminadas por erros grosseiros, não há mais compatibilidade entre as métricas de F_{MV} e F_{CMC} . Os resultados da fusão convencional claramente sofrem os efeitos de erros de maior magnitude, já que o módulo de fusão baseado na mínima variância não prevê meios de suprimir os erros grosseiros que chegam ao segundo estágio da arquitetura. Da Tabela 2, pode-se ainda verificar que a estratégia de fusão via CMC fornece estimativas de maior qualidade quando comparadas aos outros resultados.

Para destacar ainda mais a importância em equipar o módulo de fusão com recursos que promovem a supressão de dados discrepantes, os histogramas apresentados na

Tabela 2. Valores médios das métricas de tensão considerando as 62 simulações nas quais o EG não foi detectado no primeiro estágio

\hat{x}_s	\hat{x}_p	\hat{x}_a	F_{MV}	F_{CMC}
0,00949	0,02619	0,00384	0,01208	0,00357

Figura 5 são construídos. Estes histogramas referem-se aos resultados de F_{MV} e F_{CMC} obtidos das 62 simulações nas quais os EGs atingem o módulo de fusão. A partir do histograma na parte superior da figura, é possível observar que a fusão convencional é severamente afetada pelos dados discrepantes, o que leva a erros absolutos que excedem 0,04 pu. Por outro lado, as magnitudes dos erros resultantes de F_{CMC} (parte (b) da figura) não são maiores do que 0,012 pu. Isso ressalta a característica superior de robustez da estratégia proposta na presença de erros grosseiros não detectados anteriormente.

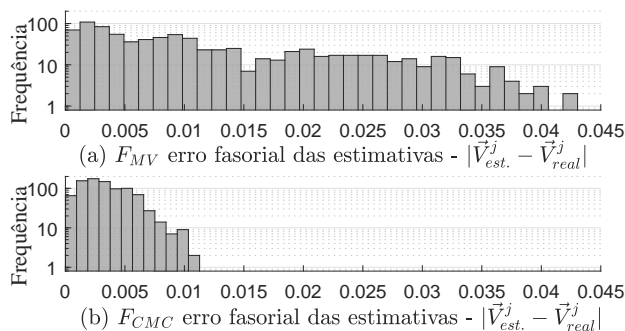


Figura 5. Histogramas dos erros fasoriais de tensão considerando cenários com erros grosseiros: (a) Fusão de mínima variância, F_{MV} ; (b) Fusão via CMC, F_{CMC} .

8. CONCLUSÕES

Este artigo apresenta uma nova formulação fundamentada no CMC para o módulo de fusão de estimativas a ser empregado no contexto de arquiteturas híbridas de estimação de estados em sistemas de potência. Em condições livres de erros grosseiros, o método de fusão via CMC compartilha das mesmas atribuições da fusão clássica baseada na mínima variância. Em adição a esta compatibilidade, mostra-se, através de desenvolvimentos teóricos e experimentos computacionais, que a formulação desenvolvida desperta um novo paradigma no que diz respeito à concepção do módulo de fusão. Tradicionalmente, algoritmos de fusão comportam-se de maneira indiferente à possibilidade de que as estimativas de entrada estejam contaminadas por erros grosseiros não detectados nos estágios anteriores da arquitetura de estimação. A adoção do novo critério de otimização confere ao módulo de fusão uma funcionalidade extra, em adição ao seu papel fundamental de promover a combinação ótima das estimativas do primeiro estágio. Sob a perspectiva da formulação via CMC, este módulo passa a funcionar também como uma camada ativa de resistência contra dados discrepantes.

REFERÊNCIAS

Abur, A. and Exposito, A.G. (2004). *Power system state estimation: theory and implementation*. CRC Press.

Ascari, L.B., Simões Costa, A., and Miranda, V. (2019). Correntropy-based fusion strategy for incorporating

PMU measurements into power system state estimation. In *2019 IEEE Milan PowerTech*.

Do Coutto Filho, M.B., Stacchini de Souza, J.C., and Ribeiro Guimaraens, M.A. (2014). Enhanced bad data processing by phasor-aided state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*.

Freitas, V., Simões Costa, A., and Miranda, V. (2020). Orthogonal method for solving maximum correntropy-based power system state estimation. *IET Generation, Transmission & Distribution*.

Gomez-Exposito, A., Abur, A., Rousseaux, P., de la Villa Jaen, A., and Gomez-Quiles, C. (2011). On the use of PMUs in power system state estimation. *Proceedings of the 17th PSCC*.

KEMA (2006). *Metrics for Determining the Impact of Phasor Measurements on Power System State Estimation*. Eastern Interconnection Phasor Project.

Liu, W., Pokharel, P.P., and Principe, J.C. (2007). Correntropy: Properties and applications in non-gaussian signal processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*.

Massignan, J.A.D., London, J.B.A., and Miranda, V. (2020). Tracking power system state evolution with maximum-correntropy-based extended kalman filter. *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*.

Meneghetti, R., Simões Costa, A., Miranda, V., and Ascari, L.B. (2020). Information theoretic generalized state estimation in power systems. *Electric Power Systems Research*.

Merrill, H.M. and Schweppe, F.C. (1971). Bad data suppression in power system static state estimation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*.

Mili, L., Cheniae, M.G., Vichare, N.S., and Rousseeuw, P.J. (1996). Robust state estimation based on projection statistics [of power systems]. *IEEE Transactions on Power Systems*.

Miranda, V., Santos, A., and Pereira, J. (2009). State estimation based on correntropy: A proof of concept. *IEEE Transactions on Power Systems*.

Monticelli, A. (1999). *State estimation in electric power systems: a generalized approach*, volume 507. Springer.

Parzen, E. (1962). On the estimation of a probability density function and the mode. In *Annals Math. Statistics*.

Phadke, A.G. and Thorp, J.S. (2008). *Synchronized phasor measurements and their applications*. Springer.

Pires, R.C., Simões Costa, A., and Mili, L. (1999). Iteratively reweighted least-squares state estimation through givens rotations. *IEEE Transactions on Power Systems*.

Ross, S. (2006). *A first course in probability*. Pearson, seventh edition.

Santamaria, I., Pokharel, P.P., and Principe, J.C. (2006). Generalized correlation function: definition, properties, and application to blind equalization. *IEEE Transactions on Signal Processing*.

Schweppe, F.C. and Wildes, J. (1970). Power system static-state estimation, part I: Exact model. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*.

Simões Costa, A., Albuquerque, A., and Bez, D. (2013). An estimation fusion method for including phasor measurements into power system real-time modeling. *IEEE Transactions on Power Systems*.

Zhu, Y. (2003). *Multisensor Decision And Estimation Fusion*. Springer US.