

Condições relaxadas para sincronização baseada em eventos de sistemas Lur'e com saturação^{*}

C. Lisboa^{*} J. V. Flores^{*} L. G. Moreira^{**} J. M. Gomes da Silva Jr.^{*}

^{*} Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE),
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre,
Rio Grande do Sul, Brasil (email: {cristyan.lisboa, jeferson.flores,
jmgomes}@ufrgs.br).

^{**} Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
Sul-rio-grandense (IFSul), Charqueadas, Rio Grande do Sul, Brasil
(e-mail: lucianomoreira@ifsul.edu.br).

Abstract: This work proposes new stability conditions for the master-slave synchronization of nonlinear discrete-time Lur'e systems subject to input saturation via event-triggered control techniques. From the Lyapunov Theory arguments, Finsler's Lemma and properties of the closed-loop system nonlinearity, sufficient conditions are derived to ensure the regional asymptotic stabilization of the origin of the synchronization error, i.e., to guarantee that the slave trajectories converge to those of the master. Following an emulation-based design, the objective is to determine an appropriate event generator for the closed-loop system. In order to systematically compute the event-triggering mechanism parameters, an optimization problem aiming to reduce the number of events with respect to a time-triggered implementation is proposed. A numerical example is performed to show the effectiveness of the proposed methodology.

Resumo: Este trabalho propõe novas condições de estabilidade para a sincronização mestre-escravo de sistemas não lineares Lur'e de tempo discreto sujeitos à saturação de entrada via técnicas de controle baseado em eventos. A partir dos argumentos da Teoria de Lyapunov, do Lema de Finsler e de propriedades da não linearidade do sistema de malha fechada, condições suficientes são derivadas para assegurar a estabilização assintótica regional da origem do erro de sincronização, ou seja, para garantir que as trajetórias do escravo converjam para as do mestre. Seguindo um projeto baseado em emulação, o objetivo é determinar um gerador de eventos apropriado para o sistema em malha fechada. A fim de computar sistematicamente os parâmetros do mecanismo de geração de eventos, um problema de otimização é proposto visando reduzir o número de eventos em relação a uma implementação *time-triggered*. Um exemplo numérico é realizado para mostrar a eficácia da metodologia proposta.

Keywords: Master-slave synchronization; Event-triggered control; Lur'e systems.

Palavras-chaves: Sincronização mestre-escravo; Controle baseado em eventos; Sistemas Lur'e.

1. INTRODUÇÃO

Com a disseminação de tecnologias digitais a partir da segunda metade do século XX, sistemas de controle em rede difundiram-se amplamente na indústria em virtude das vantagens que oferecem quando comparados com o controle tradicional, principalmente no que se refere à facilidade de instalação, flexibilidade e custo reduzido (Hespanha et al., 2007). Entretanto, as limitações encontradas em redes de comunicação digital, como restrições na largura de banda e consumo de energia em redes sem fio, tornaram-se um desafio importante a ser considerado no projeto da lei de controle. Entre as estratégias que se destacam, uma

delas é o chamado controle baseado em eventos (*Event-Triggered Control* - ETC) que permite estabelecer um compromisso entre o uso eficiente dos recursos da rede e a performance do sistema em malha fechada. Em essência, a ideia do ETC consiste em monitorar variáveis de interesse do sistema, seja de forma contínua ou periódica, e atualizar o sinal de controle apenas quando uma condição de disparo for satisfeita (Heemels et al., 2011). Neste contexto, uma abordagem frequentemente empregada trata do projeto baseado em emulação, no qual um controlador estabilizante é dado *a priori* e o objetivo é determinar os parâmetros do gerador de eventos que garanta a estabilidade do sistema em malha fechada.

Motivado pelo grande interesse da indústria e da academia, o problema de sincronização mestre-escravo de sistemas dinâmicos vem ganhando relevância ao longo dos últimos anos, especialmente no contexto de sistemas não lineares. Uma das principais razões é seu vínculo com diversas

^{*} O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Bolsa 130637/2022-0, PQ 305031/2021-0, PQ 307449/2019-0.

aplicações práticas, por exemplo, comunicação segura (Zhu et al., 2020) e redes neurais (Hao et al., 2020). Em resumo, a ideia fundamental da sincronização consiste em assegurar que as trajetórias de um sistema escravo sigam aquelas do mestre e que estas permaneçam em sincronia. Ao formular o problema a partir da diferença entre as trajetórias dos sistemas, ou seja, baseado no erro de sincronização, o trabalho seminal de Pecora e Carroll (1990) despertou o interesse da comunidade de controle pela sincronização. Desde então, diversas contribuições vêm sendo realizadas para assegurar a sincronização mestre-escravo, por exemplo, controle adaptativo (Hao et al., 2020), *time-triggered* (Zani et al., 2018), entre outros.

Recentemente, técnicas de ETC também foram aplicadas ao problema de sincronização: Wang et al. (2021) utilizam um controlador dinâmico baseado em eventos para sincronização de uma rede neural de tempo contínuo; já o trabalho de (Ding et al., 2021) estuda o problema de sincronização de redes dinâmicas complexas de tempo discreto sujeitas ao atraso de comunicação com ETC. Uma vez que a saturação do sinal de controle é um problema recorrente em diversas aplicações reais (Tarbouriech et al., 2011), a sincronização ETC com entradas saturantes também é de grande interesse prático. Xu et al. (2021), por exemplo, propõem um mecanismo de geração de eventos (*Event-Triggering Mechanism* - ETM) adaptativo para assegurar a sincronização mestre-escravo assintótica no contexto particular de redes neurais com atraso e sujeitas à saturação de entrada. Em Lisbôa et al. (2021), a partir de um projeto baseado em emulação, um esquema de ETC foi proposto para sincronizar assintoticamente um sistema não linear de tempo discreto tipo Lur'e sujeito à saturação de entrada.

As condições de estabilidade apresentadas em (Lisbôa et al., 2021) foram obtidas a partir de uma função candidata de Lyapunov quadrática e dependente do erro de sincronização. Visando obter condições de estabilidade menos conservadoras, neste artigo propõe-se o uso do Lema de Finsler, de variáveis de relaxação e também de uma condição de setor generalizada para a abordagem de emulação. Os desafios técnicos no presente trabalho estão relacionados à natureza não linear do sistema em malha fechada e também no estabelecimento de uma metodologia sistemática para determinar adequadamente o ETM. A partir da aplicação do Lema de Finsler e de inequações satisfeitas por não linearidades de setor, condições suficientes são derivadas para assegurar a estabilização assintótica regional da origem do erro de sincronização. Por fim, um problema de otimização é proposto para determinar sistematicamente os parâmetros do ETM com o objetivo de reduzir o número de eventos em relação a uma implementação periódica tradicional (*time-triggered*, ou seja, com atualização do sinal de controle para todo $k \in \mathbb{N}$). Simulações numéricas ilustram a aplicação do método proposto.

Notação: \mathbb{N} , \mathbb{R}^n e $\mathbb{R}^{n \times m}$ denotam, respectivamente, o conjunto dos números naturais, vetores n -dimensionais e o espaço de matrizes reais $n \times m$. $v_{(i)}$ indica a i -ésima componente do vetor v . Seja A uma dada matriz, então A^\top é sua transposta e $A_{(j)}$ representa a sua j -ésima linha. Para A quadrada, $\text{tr}(A)$ denota seu traço e $A > 0$ significa

que A é positiva definida. \star corresponde a blocos simétricos dentro de uma matriz. I é uma matriz identidade e 0 é uma matriz nula de dimensões apropriadas. $\text{diag}\{X, Y\}$ denota a matriz bloco-diagonal composta pelas matrizes X e Y . O conjunto $\mathcal{E}(P) = \{\zeta \in \mathbb{R}^n : \zeta^\top P \zeta \leq 1\}$ é o elipsóide definido a partir da matriz $P = P^\top > 0$.

2. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Esta seção apresenta formalmente o problema de sincronização mestre-escravo via ETC.

2.1 Problema de sincronização

Considere os sistemas mestre (\mathcal{M}) e escravo (\mathcal{S}) descritos a partir das seguintes equações:

$$\mathcal{M} : x_M[k+1] = Ax_M[k] + B\sigma(Cx_M[k]) \quad (1)$$

$$\mathcal{S} : x_S[k+1] = Ax_S[k] + B\sigma(Cx_S[k]) + Eu[k] \quad (2)$$

onde $x_M[k]$, $x_S[k]$ e $u[k] \in \mathbb{R}^n$ são os vetores de estados do mestre, do escravo e a entrada de controle, respectivamente; as matrizes A , B , C e E são reais, constantes, de dimensões apropriadas e determinam a dinâmica dos sistemas mestre e escravo; $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função não linear vetorial, estática, descentralizada e sem memória restrita em inclinação, i.e., $\sigma_{(j)}(g) = \sigma_j(g_{(j)})$, $j \in [1, m]$ com $\sigma_j(g_{(j)}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo a j -ésima componente de $\sigma(\cdot)$.

Neste trabalho considera-se que as seguintes propriedades são verificadas para cada componente de $\sigma(\cdot)$:

- (P1) Pertence ao primeiro e terceiro quadrante, i.e., $\sigma_j(g_{(j)})g_{(j)} \geq 0$, $\forall g_{(j)} \in \mathbb{R}$ e $\sigma_j(0) = 0$, $j \in [1, m]$.
- (P2) Satisfaz a relação $0 \leq \frac{\sigma_j(g_{(j)}) - \sigma_j(\hat{g}_{(j)})}{g_{(j)} - \hat{g}_{(j)}} \leq \theta_{(j)}$, $\forall g_{(j)}, \hat{g}_{(j)}, g_{(j)} \neq \hat{g}_{(j)} \in \mathbb{R}$, $j \in [1, m]$.

A verificação de P1-P2 implica que $\sigma(\cdot)$ é uma não linearidade que pertence globalmente ao setor $[0, \Theta]$, onde $\Theta = \text{diag}\{\theta_{(1)}, \dots, \theta_{(m)}\}$. Além disto, (P2) implica que a não linearidade é crescente e limitada em inclinação.

O problema de sincronização consiste em assegurar que os estados do sistema escravo sigam aqueles do mestre e que estes permaneçam em sincronia. Neste sentido, o mestre pode ser interpretado como um gerador de referências, já que ele deve gerar as trajetórias para o sistema escravo seguir. Efetuando-se uma troca de coordenadas com base na diferença entre os estados de ambos os sistemas, ou seja, o erro de sincronização $e[k] = x_M[k] - x_S[k]$, é possível considerar o problema como sendo a estabilização da origem da dinâmica de $e[k]$. A partir de (1)-(2) esta dinâmica é dada por:

$$e[k+1] = Ae[k] + B\rho(Ce[k], Cx_S[k]) - Eu[k] \quad (3)$$

onde $\rho(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função não linear vetorial, estática, descentralizada e sem memória definida como:

$$\rho(Ce[k], Cx_S[k]) = \sigma(Ce[k] + Cx_S[k]) - \sigma(Cx_S[k]). \quad (4)$$

Em razão dos limites de controle, o sinal injetado na entrada está sujeito à saturação, ou seja,

$$u[k] = \text{sat}(v[k], u_0) \quad (5)$$

sendo o termo $\text{sat}(v[k], u_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função saturação vetorial simétrica descentralizada definida como:

$$\text{sat}(v_{(r)}[k], u_{0(r)}) \triangleq \text{sign}(v_{(r)}[k]) \min(|v_{(r)}[k]|, u_{0(r)}), \quad (6)$$

onde $r \in [1, n]$ e $u_{0(r)}$ denota os limites simétricos de amplitude do sinal de controle. Para resolver o problema de estabilização propõe-se o seguinte compensador:

$$v[k] = Ke[k], \quad (7)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz de ganhos e $v[k]$ é a saída do controlador. Usando uma função descentralizada do tipo zona-morta definida como:

$$\psi(v[k], u_0) \triangleq v[k] - \text{sat}(v[k], u_0), \quad (8)$$

então (5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u[k] = \text{sat}(Ke[k], u_0) = Ke[k] - \psi(Ke[k], u_0) \quad (9)$$

dando origem à seguinte dinâmica do erro:

$$e[k+1] = (A - EK)e[k] + B\rho(Ce[k], Cx_S[k]) + E\psi(Ke[k], u_0). \quad (10)$$

2.2 Estratégia baseada em eventos

Na implementação da estratégia baseada em eventos, o sinal de controle é atualizado apenas nos instantes $\{k_i\} \subset \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$ calculados pelo ETM. Então, entre dois instantes de eventos consecutivos $k_i \leq k < k_{i+1}$, segue que

$$v[k] = v[k_i] = Ke[k_i] \quad \forall k \in [k_i, k_{i+1}). \quad (11)$$

A partir da formulação de (Lisbôa et al., 2021), adota-se a seguinte regra para determinar os eventos:

$$k_0 = 0, \quad k_{i+1} = \min\{k > k_i : f(\delta[k], e[k]) \geq 0\}, \quad (12)$$

onde $\delta[k]$ representa o desvio do erro de sincronização no último evento $e[k_i]$ e no instante atual $e[k]$, ou seja,

$$\delta[k] = e[k_i] - e[k] \quad (13)$$

e

$$f(\delta[k], e[k]) = \delta^\top[k]Q_\delta\delta[k] - e^\top[k]Q_e e[k] \quad (14)$$

é a chamada função de disparo. Neste caso, Q_δ e Q_e são matrizes constantes simétricas positivas definidas de dimensões apropriadas que atuam como fatores de ponderação em (12), permitindo que ocorram desvios distintos para cada componente do erro de sincronização (Moreira et al., 2019). Dessa forma, a estratégia ETC permite que a trajetória do erro de sincronização em um dado instante $k \neq k_i$ afaste-se apenas uma certa quantidade de seu valor em $k = k_i$, de modo que a estabilidade assintótica ainda possa ser garantida e o número de eventos seja inferior a atualização *time-triggered*.

Substituindo (13) em (11), o sinal de controle pode ser escrito como

$$v[k] = v[k_i] = Ke[k] + K\delta[k] \quad \forall k \in [k_i, k_{i+1}) \quad (15)$$

modificando, por conseguinte, o vetor de entrada (9) para

$$u[k] = Ke[k] + K\delta[k] - \psi(Ke[k] + K\delta[k], u_0), \quad (16)$$

o que resulta na seguinte dinâmica do erro de sincronização baseado em eventos para todo $k \in [k_i, k_{i+1})$:

$$e[k+1] = (A - EK)e[k] + B\rho(Ce[k], Cx_S[k]) + E\psi(Ke[k] + K\delta[k], u_0) - EK\delta[k]. \quad (17)$$

A Figura 1 demonstra um diagrama de blocos do esquema de sincronização mestre-escravo baseado em eventos. Para todo instante de tempo discreto $k \in \mathbb{N}$, o ETM monitora o erro de sincronização, calcula o valor da função f e avalia o critério de disparo. Caso esta condição seja verificada, então um evento é gerado e o sinal de controle é atualizado. Caso contrário, ele é mantido constante e igual ao seu

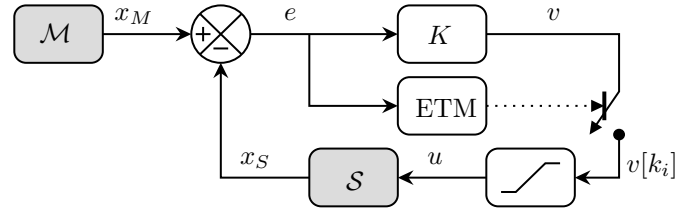


Figura 1. Estratégia de controle baseada em eventos.

valor no último instante em que ocorreu um evento. Por fim, salienta-se que em sistemas de tempo discreto, o comportamento de Zenão é automaticamente eliminado, pois eles já apresentam um tempo mínimo entre eventos de pelo menos uma amostra (Heemels et al., 2011).

2.3 Definição do problema

A partir da dinâmica do erro em (17), o objetivo consiste em projetar os parâmetros do gerador de eventos (12) assegurando a sincronização das trajetórias do sistema mestre-escravo (1)-(2) e, ao mesmo tempo, reduzindo as atualizações do sinal de controle. Entretanto, devido à saturação da entrada, a estabilização global da origem do erro de sincronização pode não ser obtida no caso geral, isto é, para todos os erros iniciais $e[0] \in \mathbb{R}^n$ (Tarbouriech et al., 2011). Assim, assume-se a existência de uma região de erros de sincronização iniciais admissíveis, denotada por \mathcal{E}_0 , para os quais deseja-se garantir sincronização mestre-escravo. Com base nestes elementos, define-se o problema a ser abordado neste trabalho como:

Problema 1: Dada uma matriz de ganhos K que estabiliza o sistema (10) e um conjunto \mathcal{E}_0 desejado, projetar os parâmetros Q_δ e Q_e da função de disparo (14) de modo a garantir a estabilização assintótica regional de (17) para todos os erros iniciais pertencentes à região \mathcal{E}_0 e também reduzir o número de eventos com relação à atualização *time-triggered* do sinal de controle.

3. RESULTADO PRINCIPAL

3.1 Ferramentas instrumentais

As condições de sincronização serão derivadas a partir da aplicação do Lema de Finsler resumido abaixo.

Lema 1. (de Oliveira and Skelton, 2001). Seja $x \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{S}^n$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ com $\text{posto}(\mathcal{B}) < n$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $x^\top Qx < 0, \quad \forall \mathcal{B}x = 0, \quad x \neq 0$
- (ii) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times p} : Q + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^\top \mathcal{X}^\top < 0$

onde \mathcal{X} é uma variável adicional.

O lema a seguir estabelece uma relação baseada em setor para a não linearidade $\rho(\cdot, \cdot)$.

Lema 2. (Zani et al., 2018). Se $\sigma(g)$ satisfaz as propriedades P1-P2, então a função não linear $\rho(g_1, g_0) = \sigma(g_1 + g_0) - \sigma(g_0)$ é tal que a relação

$$\rho^\top(g_1, g_0)J[\rho(g_1, g_0) - \Theta g_1] \leq 0, \quad \forall g_1, g_0 \in \mathbb{R}^m$$

é verificada globalmente para qualquer matriz diagonal $J > 0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ com $\Theta = \text{diag}\{\theta_{(1)}, \dots, \theta_{(m)}\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Com relação à saturação, considerando o vetor aumentado $e_a = [e^\top \ \delta^\top]^\top$ e reescrevendo a função zona-morta (8) como $\psi(K_a e_a, u_0) = K_a e_a - \text{sat}(K_a e_a, u_0)$, com

$$K_a = [K \quad K] \quad (18)$$

é possível enunciar a seguinte condição de setor generalizada:

Lema 3. (Moreira et al., 2019). Se o vetor $e_a \in \mathcal{S}_0 = \{e_a \in \mathbb{R}^{2n} : |(K_a - G_a)_{(r)} e_a| \leq u_{0(r)}, r \in [1, n]\}$, então a relação

$$\Upsilon_a = \psi^\top(K_a e_a, u_0) J_a [\psi(K_a e_a, u_0) - G_a e_a] \leq 0$$

é verificada para qualquer matriz diagonal $J_a > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com $G_a = [G_1 \quad G_2] \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$.

3.2 Condições de sincronização

O teorema a seguir apresenta condições para estabilização assintótica regional da origem do sistema não linear (17).

Teorema 1. Dada uma matriz de ganhos K que estabiliza o sistema (10), se existirem matrizes simétricas positivas definidas P, Q_δ e $\bar{Q}_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes diagonais $J_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $J_a \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $\bar{G}_1, \bar{G}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{(4n+m) \times (4n+m)}$ e escalares reais positivos τ_1, τ_2 e τ_3 tais que as condições

$$\begin{bmatrix} Q + \mathcal{B}\mathcal{X} + \mathcal{X}^\top \mathcal{B}^\top & & & \\ & [I \ 0] & & \\ & & \star & \\ & & & -\bar{Q}_e/\tau_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} P & & & & & \\ 0 & \star & & & & \\ J_{a(r,r)} K_{(r)} - \bar{G}_{1(r)} J_{a(r,r)} K_{(r)} - \bar{G}_{2(r)} 2\tau_3 J_{a(r,r)} - \tau_3^2 / u_{0(r)}^2 & & \star & & \star & \\ I & & 0 & & 0 & \bar{Q}_e/\tau_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (20)$$

$$r \in [1, n]$$

são verificadas com matrizes \mathcal{Q} e \mathcal{B} definidas como:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} -P & \star & \star & \star & \star & \\ 0 & P & \star & \star & \star & \\ J_1 \Theta C & 0 & -2J_1 & \star & \star & \\ \bar{G}_1 & 0 & 0 & -2J_a & \star & \\ 0 & 0 & 0 & \bar{G}_2^\top & -\tau_1 Q_\delta & \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathcal{B} = [A - EK \quad -I \quad B \quad E \quad -EK], \quad (22)$$

então todas as trajetórias do sistema não linear (17) iniciadas em $\mathcal{E}(P) = \{e[k] \in \mathbb{R}^n : e^\top[k] P e[k] \leq 1\}$ convergem assintoticamente para a origem, implicando na sincronização mestre-escravo de (1) e (2), sob estratégia ETC dada em (12) com Q_δ e $Q_e = \bar{Q}_e^{-1}$.

Prova. Por simplicidade de notação, os argumentos e parâmetros das funções não lineares $\rho(g_1, g_0) = \rho[k]$, $\psi(K e[k] + K \delta[k], u_0) = \psi[k]$ serão omitidos onde não existir ambiguidade. Considerando uma função de Lyapunov candidata quadrática dada por

$$V[k] = e^\top[k] P e[k],$$

sua variação entre dois instantes consecutivos é determinada como:

$$\Delta V[k] = V[k+1] - V[k]. \quad (23)$$

Neste ponto, é válido mencionar que o bloco (1,1) da condição (20) garante a positividade da matriz P e, por conseguinte, $V[k] > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Uma vez que a não linearidade $\sigma(\cdot)$ verifica P1-P2, então a função não linear $\rho(\cdot, \cdot)$ satisfaz o Lema 2. Em particular, nota-se que ele é satisfeito para quaisquer argumentos g_1

e g_0 de dimensões apropriadas. A partir disso, definindo os vetores $g_1 = C e[k]$ e $g_0 = C x_S[k]$, a seguinte relação baseada em setor é globalmente verificada:

$$\Upsilon_1 = \rho^\top(C e[k], C x_S[k]) J_1 [\rho(C e[k], C x_S[k]) - \Theta C e[k]] \leq 0 \quad (24)$$

Considerando o Lema 3, a relação $\Upsilon_a \leq 0$ é satisfeita desde que o vetor $e_a[k] \in \mathcal{S}_0$. Por fim, o critério de disparo (12) garante a verificação de $f = f(\delta[k], e[k]) < 0$ entre dois eventos consecutivos. Nos instantes de evento $k = k_i$, $\delta[k] = 0$ por definição e, portanto, a relação $f = -e^\top[k_i] Q_e e[k_i] < 0$ também é satisfeita. Com base nesses argumentos, se for garantido para todo $k \in [k_i, k_{i+1})$ que

$$\Delta V[k] - 2\Upsilon_1 - 2\Upsilon_a - \tau_1 f < 0 \quad \forall e_a[k] \in \mathcal{S}_0, \quad (25)$$

onde τ_1 é um escalar real positivo, então pode-se concluir que $\Delta V[k] < 0$, desde que $e_a[k] \in \mathcal{S}_0$. Assim, como $V[k]$ é uma função positiva definida, isso implicará que a origem do erro de sincronização é assintoticamente estável, ou seja, na sincronização mestre-escravo dos sistemas (1) e (2).

Definindo o vetor

$$x = [e^\top[k] \quad e^\top[k+1] \quad \rho^\top[k] \quad \psi^\top[k] \quad \delta^\top[k]]^\top,$$

então, a partir da dinâmica de malha fechada (17), tem-se que $\mathcal{B}x = 0$, onde \mathcal{B} é dado em (22). Além disso, reescrevendo (25) como $x^\top \mathcal{M} x < 0$, sendo

$$\mathcal{M} = \mathcal{Q} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \tau_1 Q_e [I \ 0] \quad (26)$$

com \mathcal{Q} dada em (21), pode-se concluir que se $\mathcal{M} < 0$, então $\Delta V[k] < 0$ para todo $k \in [k_i, k_{i+1})$, desde que $e_a[k] \in \mathcal{S}_0$. Aplicando o item (ii) do Lema de Finsler, segue que $x^\top \mathcal{M} x < 0$ para qualquer $\mathcal{B}x = 0$ (com $x \neq 0$), é verificada se e somente se existe uma matriz \mathcal{X} tal que:

$$\mathcal{M} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^\top \mathcal{X}^\top < 0 \quad (27)$$

é satisfeita. Através do complemento de Schur em (27) a condição (19) é obtida considerando $\bar{Q}_e = Q_e^{-1}$.

Agora, será demonstrado que (20) garante $e_a[k] \in \mathcal{S}_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, desde que $e[0] \in \mathcal{E}(P)$. Primeiro, deve ser observado que a relação quadrática

$$\left(\frac{\tau_3}{u_{0(r)}^2} - J_{a(r,r)} \right) \frac{u_{0(r)}^2}{\tau_3} \left(\frac{\tau_3}{u_{0(r)}^2} - J_{a(r,r)} \right)^\top \geq 0, \quad (28)$$

inspirada em (Lima et al., 2021), é satisfeita para qualquer escalar real positivo τ_3 , o que implica em

$$2\tau_3 J_{a(r,r)} - \frac{\tau_3^2}{u_{0(r)}^2} \leq J_{a(r,r)}^2 u_{0(r)}^2. \quad (29)$$

Através do elemento na posição (3,3) de (20), pode-se verificar que o lado esquerdo de (29) é um limitante inferior positivo de $J_{a(r,r)}^2 u_{0(r)}^2$. Assim, a satisfação de (20) assegura o cumprimento da seguinte relação

$$\begin{bmatrix} P & & & & & \\ 0 & \star & & & & \\ J_{a(r,r)} K_{(r)} - \bar{G}_{1(r)} J_{a(r,r)} K_{(r)} - \bar{G}_{2(r)} J_{a(r,r)}^2 u_{0(r)}^2 & & \star & & \star & \\ I & & 0 & & 0 & \bar{Q}_e/\tau_2 \end{bmatrix} > 0. \quad (30)$$

Neste ponto, aplicando uma transformação de congruência em (30) com a matriz $\text{diag}\{I, I, J_{a(r,r)}^{-1}, I\}$, onde $G_1 = J_a^{-1} \bar{G}_1$ e $G_2 = J_a^{-1} \bar{G}_2$, segue que (30) é equivalente a

$$\Omega > \begin{bmatrix} (K - G_1)_{(r)}^\top \\ (K - G_2)_{(r)}^\top \end{bmatrix} \frac{1}{u_{0(r)}^2} \begin{bmatrix} (K - G_1)_{(r)}^\top \\ (K - G_2)_{(r)}^\top \end{bmatrix}^\top \quad (31)$$

com $\Omega = \text{diag}\{P - \tau_2 Q_e, \tau_2 Q_\delta\}$, através da aplicação do complemento de Schur duas vezes. Logo, pré e pós multiplicando (31) pelo vetor $e_a^\top[k]$ e seu transposto, respectivamente, obtém-se a inequação

$$\begin{aligned} e^\top[k] P e[k] + \tau_2 f(\delta[k], e[k]) > \\ e_a^\top[k] (K_a - G_a)_{(r)}^\top \frac{1}{u_{0(r)}^2} (K_a - G_a)_{(r)} e_a[k], \end{aligned} \quad (32)$$

com K_a definido em (18), $G_a = [G_1 \ G_2]$ e τ_2 sendo um escalar real positivo. Com base no critério de disparo (12), pode-se verificar que a função de disparo satisfaz $f < 0$ para todo $k \in [k_i, k_{i+1})$. Assim, (32) é equivalente a relação

$$e^\top[k] P e[k] > e_a^\top[k] (K_a - G_a)_{(r)}^\top \frac{1}{u_{0(r)}^2} (K_a - G_a)_{(r)} e_a[k], \quad (33)$$

e pode-se concluir que $e_a[k] \in \mathcal{S}_0$, desde que $e[k] \in \mathcal{E}(P)$. Dessa forma, se (25) e (32) são satisfeitas, então segue que $e_a[k] \in \mathcal{S}_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, desde que $e[0] \in \mathcal{E}(P)$.

A partir destes argumentos segue que a satisfação de (19)-(20) efetivamente garante que $e_a[k] \in \mathcal{S}_0$ e $\Delta V[k] < 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, contanto que $e[0] \in \mathcal{E}(P)$. Portanto, $\mathcal{E}(P)$ é conjunto positivamente invariante e contrativo com relação às trajetórias do sistema (17), implicando na convergência assintótica das trajetórias do erro de sincronização para origem, ou seja, na sincronização dos sistemas (1) e (2). \square

4. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Nesta seção apresenta-se um problema de otimização para resolver o Problema 1.

Em primeiro lugar, considera-se que a região de erros iniciais admissíveis \mathcal{E}_0 é um conjunto elipsoidal, isto é, $\mathcal{E}_0 = \{e[k] \in \mathbb{R}^n : e^\top[k] P_0 e[k] \leq 1\}$ com P_0 sendo uma matriz simétrica positiva definida dada *a priori*. Então, se

$$P < P_0 \quad (34)$$

for satisfeita, pode-se concluir que $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}(P)$ e todos os erros de sincronização iniciais que pertencem à \mathcal{E}_0 convergem para a origem conforme desejado.

Em segundo lugar, o objetivo consiste em calcular os parâmetros Q_δ e Q_e do ETM de modo que o número de eventos seja reduzido em comparação com a atualização *time-triggered*. Considerando o critério de disparo (12), nota-se que um evento é gerado apenas quando a relação

$$f(\delta[k], e[k]) = \delta^\top[k] Q_\delta \delta[k] - e^\top[k] Q_e e[k] \geq 0 \quad (35)$$

é verificada. Quando isso ocorre, o ETM atualiza $\delta[k]$ para 0 e a função de disparo assume o valor $f = -e^\top[k] Q_e e[k] < 0$. Assim, para um novo evento ocorrer, f deve evoluir deste valor até zero. Portanto, para aumentar o intervalo de tempo entre eventos, a ideia consiste em “reduzir” Q_δ e “aumentar” Q_e como em (Moreira et al., 2019; Lisbôa et al., 2021). Com base nos elementos expostos até aqui, propõe-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_o = \text{tr}(Q_\delta) + \text{tr}(\bar{Q}_e) \\ \text{sujeito a:} \quad & (19), (20), (34), \end{aligned} \quad (36)$$

onde Q_e é maximizado indiretamente através da minimização de seu inverso $\bar{Q}_e = Q_e^{-1}$.

É importante mencionar que as restrições em (36) são desigualdades matriciais lineares desde que os escalares τ_1 , τ_2 e τ_3 sejam dados *a priori*. Por isso, aplica-se uma solução baseada em grade para obter os valores ótimos destas variáveis. Além disso, (36) é um problema de otimização *off-line* utilizado como ferramenta de projeto para determinar sistematicamente os parâmetros da estratégia ETC, não sendo necessária a sua solução *online* para a verificação da condição de disparo (12).

5. EXEMPLO NUMÉRICO

Considere o sistema tipo Lur’e de tempo discreto apresentado em Zani et al. (2018):

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \begin{bmatrix} 0,91 & 0,09 & 0 \\ 0,01 & 0,99 & 0,01 \\ 0 & -0,14 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,09 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma(x_1) + 0,01 I u \\ \sigma(x_1) &= \begin{cases} g_2(x_1 + 1) - g_1, & \text{se } x_1 < -1 \\ g_1 x_1, & \text{se } |x_1| \leq 1 \\ g_2(x_1 - 1) + g_1, & \text{se } x_1 > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Os níveis de saturação de entrada são definidos como $u_{0(r)} = 2$, $r \in [1, 3]$ e \mathcal{E}_0 é especificado através da matriz $P_0 = 1,3I$. Os parâmetros $g_1 = 1,15$ e $g_2 = 0,7$ determinam um comportamento caótico em tempo discreto semelhante a um circuito de Chua. Considere a lei de controle (7), onde

$$K = \begin{bmatrix} 1,369 & 1,888 & 0,466 \\ 1,379 & 2,932 & 0,418 \\ 0,918 & 1,199 & 0,712 \end{bmatrix}$$

foi projetado seguindo o método proposto em (Zani et al., 2018) que assegura estabilização regional com controle *time-triggered*. Além disso, restrições adicionais nos parâmetros do ETM dadas por $\lambda_{max}(Q_\delta) < 10^4 \lambda_{min}(Q_\delta)$ e $\lambda_{max}(\bar{Q}_e) < 10^4 \lambda_{min}(\bar{Q}_e)$ foram implementadas para evitar matrizes mal condicionadas. Neste cenário, aplicando um procedimento de grade em (36), obtém-se os valores ótimos $f_o = 74,85$, $\tau_1 = 3,4 \times 10^{-3}$, $\tau_2 = 6,8 \times 10^{-6}$ e $\tau_3 = 0,041$, assim como as matrizes dadas a seguir.

$$\begin{aligned} Q_e &= \begin{bmatrix} 82,53 & * & * \\ -18,20 & 258,64 & * \\ 22,94 & -2,02 & 59,31 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \\ Q_\delta &= \begin{bmatrix} 8,13 & * & * \\ 13,78 & 27,87 & * \\ 2,96 & 3,57 & 2,22 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0,33 & * & * \\ 0,31 & 1,20 & * \\ 0,12 & -0,00 & 0,15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A partir destas matrizes simulou-se o sistema mestre-escravo considerando o intervalo de simulação $k \in [0, 500]$ e as condições iniciais dadas por $x_M[0] = [0,4 \ 0,4 \ 0,6]^\top$ e $x_S[0] = [-0,9 \ 0,1 \ 0,32]^\top$ tal que $e[0] \in \mathcal{E}(P)$. A Figura 2 ilustra a evolução dos estados do mestre e do escravo no gráfico superior; as componentes do sinal de controle no segundo gráfico; a função de Lyapunov no terceiro gráfico e os instantes de evento no último gráfico, onde a altura das barras representa o intervalo entre dois eventos consecutivos $k_i - k_{i-1}$. Nota-se que a sincronização é atingida uma vez que os estados do escravo tendem para os do mestre, e também que a estratégia ETC reduziu eficientemente o número de eventos para 133, o que representa 73,45% de redução em comparação com os 501 eventos da implementação *time-triggered*.

Para avaliar a influência de \mathcal{E}_0 no número de eventos, define-se $P_0 = \mu I$ e consideram-se diferentes valores de

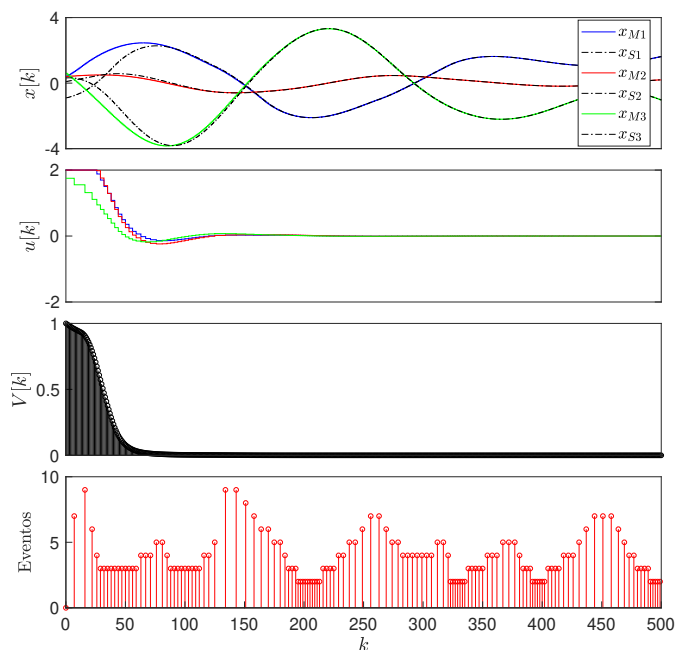


Figura 2. Simulação do sistema mestre-escravo.

μ conforme a Tabela 1. Então, para cada valor de μ , o problema de otimização (36) é resolvido e calcula-se o número médio de eventos em \mathcal{E}_0 , com arredondamento para o número inteiro superior mais próximo, para 1600 condições iniciais uniformemente distribuídas na fronteira de \mathcal{E}_0 com intervalo de simulação $k \in [0, 2000]$. Em primeiro lugar, nota-se que a estratégia ETC apresentou uma redução significativa no número de eventos em comparação com a implementação *time-triggered*. Em segundo lugar, verifica-se que existe um compromisso entre as atualizações do sinal de controle e o tamanho de \mathcal{E}_0 já que para conjuntos \mathcal{E}_0 de tamanho maior, expressos por pequenos valores de μ , o número médio de eventos é, tipicamente, superior. Além disso, ao considerar os resultados de Lisboa et al. (2021), a proposta atual demonstrou ser menos conservadora, especialmente para conjuntos \mathcal{E}_0 maiores. Isso é explicado através dos graus de liberdade proporcionados pelo Lema de Finsler em conjunto com as variáveis de relaxação τ_1 , τ_2 e τ_3 utilizadas nas condições de projeto.

Tabela 1. Número médio de eventos em \mathcal{E}_0 .

μ	Método proposto	Referência (Lisboa et al., 2021)	Implementação <i>time-triggered</i>
2.0	312	315	
1.6	380	395	
1.5	393	411	
1.4	439	470	2001
1.3	548	606	
1.2	1711	Infactível	
1.1	Infactível	-	Infactível

6. CONCLUSÃO

Neste artigo, investigou-se a sincronização mestre-escravo de sistemas não lineares tipo Lur'e de tempo discreto com entradas saturante através de técnicas de ETC. A partir dos argumentos de Lyapunov, da aplicação do Lema de Finsler e de inequações baseadas em setor, condições suficientes foram derivadas para garantir a estabilidade

assintótica regional da origem do erro de sincronização. Utilizando uma abordagem baseada em emulação, o projeto do ETM foi realizado considerando uma não linearidade dependente do estado e restrita em inclinação. A principal contribuição deste trabalho foi o desenvolvimento de condições de estabilização relaxadas da origem do erro de sincronização para a classe de sistemas não lineares considerada. A eficácia desta abordagem foi ilustrada através de um exemplo numérico com um oscilador caótico.

REFERÊNCIAS

- de Oliveira, M.C. and Skelton, R.E. (2001). Stability tests for constrained linear systems. In S.R. Moheimani (ed.), *Perspectives in robust control*, 241–257. Springer-Verlag.
- Ding, S., Wang, Z., and Xie, X. (2021). Periodic Event-Triggered Synchronization for Discrete-Time Complex Dynamical Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 1–12.
- Hao, Z., Xing-yuan, W., Peng-fei, Y., and Yu-jie, S. (2020). Combination synchronization and stability analysis of time-varying complex-valued neural networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 131, 109485.
- Heemels, W.P.M.H., Donkers, M.C.F., and Teel, A.R. (2011). Periodic Event-triggered Control Based on State Feedback. In *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2571–2576.
- Hespanha, J.P., Naghshtabrizi, P., and Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 138–162.
- Lima, T.A., Madeira, D. de S., Viana, V.V., and Oliveira, R.C.L.F. (2021). Static output feedback stabilization of uncertain rational nonlinear systems with input saturation. *arXiv e-prints*, 1–8.
- Lisbôa, C., Flores, J.V., Moreira, L.G., and Gomes da Silva Jr., J.M. (2021). Event-Triggered Synchronization of Saturated Lur'e-type Systems. In *60th IEEE Conference on Decision and Control*, 5416–5321.
- Moreira, L.G., Groff, L.B., Gomes da Silva Jr., J.M., and Tarbouriech, S. (2019). PI event-triggered control under saturating actuators. *International Journal of Control*, 92, 1634–1644.
- Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64, 821–824.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J.M., and Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer.
- Wang, Y., Ding, S., and Li, R. (2021). Master-slave synchronization of neural networks via event-triggered dynamic controller. *Neurocomputing*, 419, 215–223.
- Xu, Y., Wang, R., Lu, H., Song, X., Deng, Y., and Zhou, W. (2021). Adaptive Event-Triggered Synchronization of Networked Neural Networks with Time-Varying Delay Subject to Actuator Saturation. *Complexity*, 1–14.
- Zani, A., Flores, J.V., Fischmann, M., and Gomes da Silva Jr., J.M. (2018). Synchronization of discrete-time Lur'e systems under saturating control. In *European Control Conference*, 2953–2958.
- Zhu, Y., Zheng, W.X., and Zhou, D. (2020). Quasi-Synchronization of Discrete-Time Lur'e-Type Switched Systems With Parameter Mismatches and Relaxed PDT Constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 50(5), 2026–2037.