

Filtragem $L_2 - L_\infty$ para Sistemas Lineares com Saltos Markovianos e Cadeia Oculta^{*}

André M. de Oliveira^{*} Oswaldo L. V. Costa^{**}
Gabriela W. Gabriel^{***} Sérgio R. Barros dos Santos^{*}

^{*} Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, SP (e-mail: andre.marcorin@unifesp.br, sergio.ronaldo@unifesp.br).

^{**} Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP (e-mail: oswaldo@lac.usp.br)

^{***} Divisão de Engenharia Eletrônica, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, SP, (e-mail: ggabriel@ita.br)

Abstract: In this work, we study the design of $L_2 - L_\infty$ filters for Markov jump linear systems with hidden states. In this context, the Markov chain cannot be perfectly measured and the only available information to the filter are the measured output and a random variable, called detector, which is related to the mode of the system. In order to model this variable, we consider that the joint process of the Markov chain and the detector follows an exponential hidden Markov model. The results are given in terms of Linear Matrix Inequalities and are illustrated by means of a numerical simulation.

Resumo: Neste trabalho, estudamos o problema de projeto de filtros $L_2 - L_\infty$ para sistemas lineares com saltos markovianos e cadeia oculta. Neste contexto, a cadeia de Markov não pode ser perfeitamente medida e, portanto, as únicas informações disponíveis ao filtro são a saída medida e uma variável aleatória, chamada de detector, relacionada ao modo principal de salto do sistema. Para modelar esta variável, considera-se que o processo conjunto da cadeia de Markov e do detector seguem um modelo de Markov oculto exponencial. Os resultados do projeto são dados em termos de desigualdades matriciais lineares e ilustrados por um exemplo numérico.

Keywords: $L_2 - L_\infty$ filtering; hybrid systems, Markov jump linear systems; hidden Markov chains; linear matrix inequalities.

Palavras-chaves: Filtragem $L_2 - L_\infty$; sistemas híbridos; sistemas lineares com saltos markovianos; cadeias ocultas de Markov; desigualdades matriciais lineares.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas sujeitos a variações abruptas tem sido o foco de considerável atenção por parte da literatura nas últimas décadas, em especial, nas classes de sistemas híbridos submetidos a regras de chaveamento modelados por processos aleatórios, como por exemplo, os Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (do inglês, *Markov Jump Linear Systems*, MJLS) que vem sendo o ponto focal destes estudos, como pode ser visto em Boukas (2006); Costa et al. (2013); Dragan et al. (2013). Atualmente, o uso dos MJLS como ferramenta de modelagem e projeto de sistemas com variações abruptas em seu comportamento dinâmico encontrou espaço em problemas variados como

^{*} Esse trabalho foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) projeto No. 2021/13338-6, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), projeto No. 304149/2019-5, pelo FAPESP/Shell Research Center for Gas Innovation, projeto FAPESP No. 2020/15230-5, pelo Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia para Sistemas Autônomos Cooperativos (INSAC), projeto CNPq/INCT 465755/2014-3, projeto FAPESP/INCT 2014/50851-0 e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), proc. 88887.136349/2017-00.

em Controle Através da Rede (do inglês, *Networked Control Systems*, NCS) em Gonçalves et al. (2010); ou Sistemas de Controle Tolerantes a Falhas (do inglês, *Active-Fault Tolerant Control Systems*, AFTCS) estudado em Mahmoud et al. (2003), entre outros.

Um ponto bastante importante em relação aos MJLS é a disponibilidade do estado da cadeia de Markov, aqui representado por $\theta(t)$, para o projeto da lei de controle ou do filtro. O caso em que não é possível medir perfeitamente $\theta(t)$ foi considerado no contexto dos AFTCS em Aberkane et al. (2007, 2008), assumindo que um detector de falhas $\hat{\theta}(t)$, de modelo exponencial, é a única informação disponível para o controlador. Mais recentemente em Stadtmann and Costa (2017, 2018), uma formulação mais geral, conhecida como modelo de Markov oculto exponencial, foi utilizada para representar o processo conjunto $\tilde{\theta}(t) = (\theta(t), \hat{\theta}(t))$, o que permitiu o estudo do controle H_2 por realimentação de estados e o controle H_∞ por realimentação estática de saída para MJLS, considerando que os controladores só teriam acesso a $\hat{\theta}(t)$ e portanto $\theta(t)$ não poderia ser perfeitamente medido.

Outras abordagens que consideram o estado $\theta(t)$ oculto foram apresentadas, por exemplo, em Fang et al. (2020), que considera uma medida assíncrona $\hat{\theta}(t)$ de $\theta(t)$, e Rodrigues et al. (2019), que considera taxas de saltos dependentes de um parâmetro definido como ϵ . Cabe destacar que uma diferença importante da abordagem utilizada no presente artigo em relação a Fang et al. (2020), que considera o caso da filtragem H_∞ , é a modelagem de $\hat{\theta}(t)$. A formulação adotada em Fang et al. (2020) é baseada na condição de uma probabilidade condicional relacionando $\hat{\theta}(t)$ e $\theta(t)$, que deve valer para todo t (Eq. (4) em Fang et al. (2020)). Essa condição pode ser difícil de ser imposta, enquanto que em nossa formulação, o processo $\tilde{\theta}(t)$ é representado como um processo oculto exponencial de Markov. Desta forma, a evolução temporal de $\tilde{\theta}(t)$ é bem definida. Além disso, ao utilizarmos o modelo de Markov oculto, não é necessário utilizar um parâmetro ϵ para a taxa de saltos de $\hat{\theta}(t)$ como em Rodrigues et al. (2019), que estudou o problema de filtragem H_∞ , considerando que a cadeia de Markov $\theta(t)$ e a variável $\hat{\theta}^\epsilon(t)$ seguem uma cadeia de Markov oculta exponencial, onde o parâmetro ϵ determina a velocidade do chaveamento de $\hat{\theta}^\epsilon(t)$. Por fim, é importante salientar que nossa formulação engloba os casos dependentes do modo, independentes do modo e o caso de agrupamento em *clusters*, que são abordagens bem estabelecidas na literatura sobre a disponibilidade de $\theta(t)$.

O objetivo principal deste trabalho está relacionado com o problema de filtragem conhecido como “energia para pico”, ou filtragem $L_2 - L_\infty$. A idéia é projetar filtros de forma que a razão entre o valor esperado da norma do pico do erro de estimação em relação à norma do sinal exógeno de entrada seja limitada. Assim como discutido em Zhang et al. (2015), essa classe de filtros é menos conservadora em relação à filtragem H_∞ ao se considerar que a restrição em norma é imposta para todo t ao invés da norma L_2 do erro de estimação. O problema de filtragem $L_2 - L_\infty$ vem sendo analisado por diversos autores utilizando abordagens distintas (veja, por exemplo, Feng and Han (2015); Grigoriadis and Watson (1997); Liu (2004); Liu et al. (2004); Palhares and Peres (2000); Zhang et al. (2010, 2014, 2015), e referências), e para sistemas semimarkovianos, em Xu et al. (2020).

Nesse contexto, temos que o problema de filtragem para MJLS a tempo contínuo considerando a abordagem de processos de Markov ocultos anteriormente mencionada foi analisado para os casos H_2 , H_∞ e misto H_2/H_∞ em de Oliveira et al. (2022). Porém, do conhecimento dos autores, o problema de filtragem $L_2 - L_\infty$ para MJLS a tempo contínuo com observação parcial do modo de Markov conforme modelado em de Oliveira et al. (2022), ainda não foi estudado na literatura. Pode-se citar o artigo recente Xu et al. (2020) que considera a filtragem $L_2 - L_\infty$ para sistemas lineares semimarkovianos a tempo contínuo. Porém, a modelagem utilizada para o detector nesse trabalho é similar àquela adotada em Fang et al. (2020), isto é, requer probabilidades condicionais que devem ser satisfeitas para todo t . Portanto, as nossas condições de análise e projeto comparadas às de Xu et al. (2020) são distintas.

Dessa forma, a contribuição principal deste estudo é derivar novas condições de projeto baseadas em LMIs para obter filtros que dependem somente de $\hat{\theta}(t)$ de forma que o ganho $L_2 - L_\infty$ em relação ao erro de estimação seja limitado.

Esse trabalho é organizado da seguinte forma. Na Seção 2, apresentamos a notação utilizada e na Seção 3 a formulação inicial do problema, bem como alguns conceitos básicos. Alguns novos resultados auxiliares são derivados na Seção 4. O resultado principal é derivado na Seção 5, onde apresentamos as condições dadas na abordagem LMI para o cálculo de filtros dependentes de $\hat{\theta}(t)$, de forma que o ganho $L_2 - L_\infty$ em relação ao erro de estimação seja menor que um limitante fixo. Na Seção 6 apresentamos alguns exemplos numéricos. Por fim, concluímos este artigo com algumas discussões finais, apresentadas na Seção 7.

2. NOTAÇÃO

O espaço vetorial Euclidiano de dimensão n é representado por \mathbb{R}^n . O espaço linear limitado em norma de todas as matrizes reais de dimensão $m \times n$ é representado por $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, e por simplicidade, definimos $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. O espaço das matrizes semidefinidas positivas de dimensão $n \times n$ é representado por $\mathbb{B}(\mathbb{R}^{n+})$. O operador ' indica o transposto de uma matriz. A matriz identidade de dimensão $n \times n$ é representada por I_n (ou somente I) e a matriz nula de tamanho $m \times n$, por $0_{m \times n}$ (ou somente 0). Para $G \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, definimos a soma simétrica como $Her(R) \triangleq R + R'$. Para inteiros positivos N e M , os conjuntos \mathbb{N} e \mathbb{M} são dados por $\mathbb{N} \triangleq \{1, 2, 3, \dots, N\}$ e $\mathbb{M} \triangleq \{1, 2, 3, \dots, M\}$, respectivamente.

Em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ com filtração \mathcal{F}_t , $\mathbf{E}(\cdot)$ é o operador valor esperado. O espaço de todos os processos contínuos adaptados em \mathcal{F}_t , $w = \{w(t) \in \mathbb{R}^r, t \in \mathbb{R}^+\}$, que respeitam $\|w\|_2^2 \triangleq \int_0^\infty \mathbf{E}(\|w(\tau)\|^2) d\tau < \infty$, é representado por $L_2^r(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, ou somente por L_2 . De forma similar, ao trocarmos os subscritos 2 por ∞ , temos que L_∞ representa o espaço de processos w de forma que $\|w\|_\infty^2 \triangleq \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \mathbf{E}(\|w(t)\|^2) < \infty$.

3. PRELIMINARES

Consideramos o seguinte sistema em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$,

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\theta(t)}x(t) + J_{\theta(t)}w(t) \\ y(t) = L_{\theta(t)}x(t) + H_{\theta(t)}w(t) \\ z(t) = C_{\theta(t)}x(t) \end{cases} \quad (1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída estimada e $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é o ruído no espaço L_2 . $\theta(t)$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados \mathbb{N} , matriz de taxa de transição $\Lambda \triangleq [\lambda_{ij}]$ e $\theta(0) = \theta_0$, onde θ_0 é uma variável aleatória que assume valores em \mathbb{N} ; e $x(0) = x_0$, uma variável aleatória de segundo momento finito.

Consideramos que a cadeia de Markov $\theta(t)$ não pode ser perfeitamente medida. Em seu lugar, assume-se que a única informação disponível é fornecida por $\hat{\theta}(t)$, que pode assumir valores em \mathbb{M} . Para definir $\hat{\theta}(t)$, assume-se que o estado estendido $\tilde{\theta}(t) \triangleq (\theta(t), \hat{\theta}(t))$ é um processo de

Markov homogêneo com espaço de estados $\mathbb{V} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{M}$ e taxa de transição dada a seguir,

$$\mathbf{P} \left(\tilde{\theta}(t+h) = (j, \ell) \mid \tilde{\theta}(t) = (i, k) \right) = \begin{cases} 1 + \nu_{(i,k)(i,k)} h + o(h), & (j, \ell) = (i, k) \\ \nu_{(i,k)(j,\ell)} h + o(h), & (j, \ell) \neq (i, k) \end{cases}$$

onde,

$$\nu_{(i,k)(j,\ell)} = \begin{cases} \alpha_{j\ell}^k \lambda_{ij}, & j \neq i, \ell \in \mathbb{M}, \\ q_{k\ell}^i, & j = i, \ell \neq k, \\ \lambda_{ii} + q_{kk}^i, & j = i, \ell = k, \end{cases}$$

com $\sum_{\ell \in \mathbb{M}} \alpha_{j\ell}^k = 1, \forall j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{M}; \lambda_{ij} \geq 0$ para todo $i \neq j; q_{k\ell}^i \geq 0, \ell \neq k, \lambda_{ii} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}, q_{kk}^i = -\sum_{\ell \neq k} q_{k\ell}^i$. Assume-se que \mathbb{V} é um conjunto invariante de $\tilde{\theta}(t)$, isto é, $\mathbf{P}(\tilde{\theta}(t) \in \mathbb{V}) = 1$ sempre que $\tilde{\theta}(0) \in \mathbb{V}$.

Nesta formulação, temos que λ_{ij} representa a taxa de transição de $\theta(t)$, $q_{k\ell}^i$ modela saltos espontâneos e $\alpha_{j\ell}^k$, saltos simultâneos de $\hat{\theta}(t)$ e $\theta(t)$, veja de Oliveira and do Valle Costa (2021).

Comentário 1. Como discutido em Stadtmann and Costa (2018), os seguintes casos clássicos de observação da cadeia de Markov podem ser obtidos através da formulação exponencial:

- *Dependente do Modo:* Temos que $\hat{\theta} \equiv \theta$ ao impor que $\mathbb{M} = \mathbb{N}, q_{k\ell}^i = 0, \alpha_{j\ell}^k = 1$ e $\alpha_{j\ell}^k = 0$ para $j \neq \ell$, com conjunto invariante $\mathbb{V} = \{(i, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$.
- *Independente do Modo:* Impomos que $\mathbb{M} = \{1\}, q_{k\ell}^i = 0$ e $\alpha_{j1}^1 = 1$. Portanto, $\hat{\theta}(t)$ não fornece qualquer informação em relação à $\theta(t)$.
- *Sem Saltos Mútuos:* Consideramos que $\alpha_{jk}^k = 1$ and $\alpha_{j\ell}^k = 0$ para $k \neq \ell$.
- *Agrupamento em Clusters:* Temos que os estados da Cadeia podem ser escritos em $M \leq N$ conjuntos disjuntos chamados *clusters* \mathbb{N}_i de forma que $\mathbb{N} = \cup_{i \in \mathbb{M}} \mathbb{N}_i$ e existe uma função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{M}$ tal que $g(i) = j$ que indica que o estado i é associado ao estado j . Nessa abordagem, para todo t , o filtro terá acesso ao valor de $g(\theta(t))$. Isso é equivalente a se tomar $q_{k\ell}^i = 0$ e $\alpha_{ig(i)}^k = 1$, e então, toda vez que $\theta(t)$ transiciona para i , $\hat{\theta}(t)$ também transiciona simultaneamente para $g(i)$.

O objetivo principal deste trabalho é projetar filtros de ordem completa com a seguinte estrutura,

$$\mathcal{G}_f : \begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_{f\hat{\theta}(t)} x_f(t) + B_{f\hat{\theta}(t)} y(t) \\ z_f(t) = C_{f\hat{\theta}(t)} x_f(t), \end{cases} \quad (2)$$

onde $x_f(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado do filtro. Notamos que as matrizes do filtro dependem somente da variável observada $\hat{\theta}(t)$.

Dessa forma, combinando os sistemas (1) e (2), bem como definindo o estado estendido $\tilde{x}(t)' \triangleq [x(t)' \ x_f(t)']$ e o erro de estimação $e(t) \triangleq z(t) - z_f(t)$, podemos escrever o seguinte sistema estendido:

$$\mathcal{G}_c : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A_{\theta(t)\hat{\theta}(t)} \tilde{x}(t) + J_{\theta(t)\hat{\theta}(t)} w(t) \\ e(t) = C_{\theta(t)\hat{\theta}(t)} \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

onde, para todo $(i, k) \in \mathbb{V}$, temos que

$$A_{ik} \triangleq \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fk} L_i & A_{fk} \end{bmatrix}, \quad J_{ik} \triangleq \begin{bmatrix} J_i \\ B_{fk} H_i \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$C_{ik} \triangleq [C_i \ -C_{fk}].$$

Na sequência, vamos discutir as definições necessárias como a de estabilidade estocástica (ver Costa et al. (2015)).

Definição 2. (Estabilidade Estocástica). O sistema (3) com $w(t) \equiv 0$ é dito *estocasticamente estável* se $\|\tilde{x}\|_2^2 = \int_0^\infty \mathbf{E}(\|\tilde{x}(t)\|^2) dt < \infty$, para toda variável aleatória de segunda ordem $\tilde{x}(0)$ e todo $\tilde{\theta}_0 \in \mathbb{V}$.

Para verificar a estabilidade de (3), temos o seguinte resultado de Costa et al. (2013).

Proposição 3. Se existirem $P_{ik} > 0, (ik) \in \mathbb{V}$ que satisfaçam as seguintes desigualdades de Lyapunov acopladas,

$$Her(P_{ik} A_{ik}) + \sum_{(j\ell) \in \mathbb{V}} \nu_{(ik),(j\ell)} P_{j\ell} < 0 \quad (5)$$

então (3) é estocasticamente estável.

Além disso, de acordo com Costa et al. (2013), se o sistema (3) é estocasticamente estável, ao definir-se o processo $x = \{x(t); t \in \mathbb{R}^+\}$ com $x(t)$ dado por (3), temos que $x \in L_2$ sempre que $w \in L_2$.

Neste momento, podemos enunciar nosso objetivo geral, isto é, dado o escalar positivo γ ,

$$\text{Calcular } A_{fk}, B_{fk} \text{ e } C_{fk} \text{ tal que } \|e\|_\infty \leq \gamma \|w\|_2. \quad (6)$$

Neste contexto, apresentaremos alguns resultados auxiliares na próxima seção.

4. RESULTADOS AUXILIARES

Para a obtenção dos resultados auxiliares desta seção, é necessário que seja lembrada a fórmula de Dynkin aplicada à MJLS. Para isso, considere a função $V(i, k, x) = x' P_{ik} x$ para matrizes simétricas definidas positivas $P_{ik} > 0, (ik) \in \mathbb{V}$, bem como $\mathcal{L}V(i, k, x, w)$ dado por

$$\mathcal{L}V(i, k, x, w) = x' P_{ik} (A_{ik} x + J_{ik} w) + (A_{ik} x + J_{ik} w)' P_{ik} x + x' \left(\sum_{(j\ell) \in \mathbb{V}} \nu_{(ik),(j\ell)} P_{j\ell} \right) x. \quad (7)$$

Considerando a fórmula de Dynkin (ver a Eq. (4.16) em Costa et al. (2013)), temos a seguinte igualdade:

$$\mathbf{E}(x(t)' P_{\tilde{\theta}(t)} x(t)) - \mathbf{E}(x(0)' P_{\tilde{\theta}(0)} x(0)) = \mathbf{E} \left(\int_0^t \mathcal{L}V(\tilde{\theta}(\tau), x(\tau), w(\tau)) d\tau \right). \quad (8)$$

Apresentamos a seguinte proposição para satisfazer o objetivo em (6).

Proposição 4. Dado $\gamma > 0$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_{ik} > 0, (ik) \in \mathbb{V}$ que satisfaçam as desigualdades

$$\left[\begin{array}{c} Her(P_{ik} A_{ik}) + \sum_{(j\ell) \in \mathbb{V}} \nu_{(ik),(j\ell)} P_{j\ell} \\ J_{ik}' P_{ik} \end{array} \bullet \right] < 0, \quad (9)$$

$$\left[\begin{array}{c} P_{ik} \\ C_{ik} \end{array} \bullet \right] \geq 0, \quad (10)$$

então o sistema (3) é estocasticamente estável e $\|e\|_\infty \leq \gamma \|w\|_2$

Prova. Considerando (9), nota-se que (5) é satisfeita, e portanto pela Proposição 3, temos que o sistema (3) é estocasticamente estável. Considere algum sinal $w \in L_2$, $w \neq 0$. A partir de (9), temos que

$$\begin{aligned} & x(t)' P_{\tilde{\theta}(t)} (A_{\tilde{\theta}(t)} x(t) + J_{\tilde{\theta}(t)} w(t)) \\ & + (A_{\tilde{\theta}(t)} x(t) + J_{\tilde{\theta}(t)} w(t))' P_{\tilde{\theta}(t)} x(t) + \\ & \sum_{(j,\ell) \in \mathbb{V}} \nu_{\tilde{\theta}(t)(j,\ell)} x(t)' P_{j\ell} x(t) - \|w(t)\|^2 < 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Considerando (7), temos que (11) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}V(\tilde{\theta}(\tau), x(\tau), w(\tau)) - \|w(\tau)\|^2 < 0. \quad (12)$$

Considerando que $x(0) = 0$, temos, após integrar (12) e aplicar a fórmula de Dynkin (8), que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x(t)' P_{\tilde{\theta}(t)} x(t)) &= \mathbf{E}\left(\int_0^t \mathcal{L}V(\tilde{\theta}(\tau), x(\tau), w(\tau)) d\tau\right) \\ &< \int_0^t \mathbf{E}(\|w(\tau)\|^2) d\tau \leq \|w\|_2^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Da Eq. (10), segue que $\gamma^2 P_{ik} \geq C'_{ik} C_{ik}$. Portanto,

$$\gamma^2 \mathbf{E}(x(t)' P_{\tilde{\theta}(t)} x(t)) \geq \mathbf{E}(\|e(t)\|^2). \quad (14)$$

Considerando (13) e (14), temos que $\mathbf{E}(\|z(t)\|^2) \leq \gamma^2 \|w\|_2^2$ para todo t . Em especial, tomando o supremo em t , obtemos o resultado desejado. ■

Dessa forma, o objetivo descrito em (6) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \text{Calcular } A_{fk}, B_{fk} \text{ e } C_{fk} \text{ de forma que existam } P_{ik} > 0 \\ & \text{e (9) - (10) seja satisfeito} \end{aligned} \quad (15)$$

para todo $(ij) \in \mathbb{V}$. Nota-se que existem produtos entre as variáveis de decisão A_{fk} , B_{fk} e P_{ik} . Neste caso, o objetivo principal é encontrar condições convexas escritas na formulação LMI que garantam que $\|e\|_\infty \leq \gamma \|w\|_2$.

5. RESULTADOS

Nesta seção, derivamos novos resultados em termos de LMIs para obter filtros dependentes de $\hat{\theta}(t)$ dados em (2) tal que o objetivo original em (6) seja atendido. Como o filtro não altera a dinâmica do sistema em (1), é necessário assumir que (1) seja estocasticamente estável.

Considere as seguintes desigualdades matriciais,

$$P_{ik} > 0, \quad (16)$$

$$\mathcal{H}_{ik} + Her(\mathcal{Q}_{ik} \Phi_{ik}) + Her(\mathcal{E}_{ik} \Psi_{ik}) < 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{ik} & \bullet \\ [C_i - K_k \quad -K_k] \quad v I_{n_z \times n_z} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (18)$$

para todo $(i, k) \in \mathbb{V}$, onde

$$\mathcal{H}_{ik} \triangleq \begin{bmatrix} \sum_{(j,\ell) \in \mathbb{V}} \nu_{(i,k)(j,\ell)} \bar{P}_{j\ell} & \bullet & \bullet \\ \bar{P}_{ik} & 0_{2n \times 2n} & \bullet \\ 0_{n_w \times 2n} & 0_{n_w \times 2n} & -I_{n_w} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q}'_{ik} \triangleq [R'_{1ik} \quad Y'_{1ik} \quad R'_{2ik} \quad Y'_{2ik} \quad R'_{3ik}],$$

$$\Phi_{ik} \triangleq [A_i \quad 0_{n \times n} \quad -I_n \quad 0_{n \times n} \quad J_i],$$

$$\mathcal{E}'_{ik} \triangleq [0_{n \times n} \quad I_n \quad 0_{n \times n} \quad I_n \quad 0_{n \times n_w}],$$

$$\Psi_{ik} \triangleq [F_k L_i + X_k \quad X_k \quad -G_k \quad -G_k \quad F_k H_i].$$

Temos que $v \in \mathbb{R}_+$, $\bar{P}_{ik} > 0$, $\bar{P}_{ik} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{2n+})$, $(i, k) \in \mathbb{V}$, $F_k \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{n_w}, \mathbb{R}^n)$, $X_k \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, $K_k \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n_z})$, $G_k \in$

$\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, $R_{1ik} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, $R_{2ik} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, $R_{3ik} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n_w})$, $Y_{1ik} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, $Y_{2ik} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 5. Se existirem $v > 0$, \bar{P}_{ik} , X_k , F_k , K_k , G_k , R_{1ik} , R_{2ik} , R_{3ik} , Y_{1ik} e Y_{2ik} , $(ik) \in \mathbb{V}$, de forma que as desigualdades (16)-(18) sejam satisfeitas, então, pela escolha $\gamma = v^{1/2}$, $A_{fk} = G_k^{-1} X_k$, $B_{fk} = G_k^{-1} F_k$ e $C_{fk} = K_k$, temos que $\|e\|_\infty \leq \gamma \|w\|_2$.

Prova. Temos que mostrar que uma solução de (16)-(18) implica em uma solução de (9)-(10) de forma que o resultado da Proposição 4 leve ao limitante desejado. Considerando (17), notamos que $-Her(G_k) < 0$, e portanto temos que G_k é inversível. Pela escolha $X_k = G_k A_{fk}$ e $F_k = G_k B_{fk}$, temos que (17) pode ser reescrita como

$$\mathcal{H}_{ik} + Her\left([\mathcal{Q}_{ik} \quad \mathcal{E}_{ik} G_k] \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{ik} \\ \tilde{\Psi}_{ik} \end{bmatrix}\right) < 0 \quad (19)$$

e

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{ik} \\ \tilde{\Psi}_{ik} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_i & 0_{n \times n} & -I_n & 0_{n \times n} & J_i \\ B_{fk} L_i + A_{fk} & A_{fk} & -I_n & -I_n & B_{fk} H_i \end{bmatrix} \\ &= [\tilde{A}_{ik} \quad -\mathcal{T} \quad J_{ik}], \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{A}_{ik} \triangleq \begin{bmatrix} A_i & 0_{n \times n} \\ B_{fk} L_i + A_{fk} & A_{fk} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T} \triangleq \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n} \\ I_n & I_n \end{bmatrix},$$

$$[\mathcal{Q}_{ik} \quad \mathcal{E}_{ik} G_k] = \begin{bmatrix} R_{1ik} & 0_{n \times n} \\ Y_{1ik} & G_k \\ R_{2ik} & 0_{n \times n} \\ Y_{2ik} & G_k \\ R_{3ik} & 0_{n_w \times n} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1ik} \\ \tilde{G}_{2ik} \\ \tilde{G}_{3ik} \end{bmatrix},$$

para $\tilde{G}_{1ik} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{2n})$, $\tilde{G}_{2ik} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{2n})$ e $\tilde{G}_{3ik} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{n_w})$. Portanto, (19) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Phi_{ik} & \bullet & \bullet \\ \mathcal{T}' P_{ik} \mathcal{T} & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & -I_{n_w} \end{bmatrix} \\ & + Her\left(\begin{bmatrix} \mathcal{T}' G_{1ik} \\ \mathcal{T}' G_{2ik} \\ G_{3ik} \end{bmatrix} [A_{ik} \mathcal{T} \quad -\mathcal{T} \quad J_{ik}]\right) < 0 \end{aligned} \quad (20)$$

onde A_{ik} e J_{ik} são dadas em (4), bem como $\Phi_{ik} \triangleq \sum_{(j,\ell) \in \mathbb{V}} \nu_{(i,k)(j,\ell)} \mathcal{T}' P_{j\ell} \mathcal{T}$, $P_{ik} \triangleq \mathcal{T}^{-T} \bar{P}_{ik} \mathcal{T}^{-1}$ e

$$G_{aik} \triangleq \begin{bmatrix} R_{aik} - Y_{aik} & -G_k \\ Y_{aik} & G_k \end{bmatrix}$$

para $a \in \{1, 2\}$. Multiplicando (20) pelo lado direito por $diag(\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}^{-1}, I_{n_w})$ e sua transposta pelo lado esquerdo, temos que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sum_{(j,\ell) \in \mathbb{V}} \nu_{(i,k)(j,\ell)} P_{j\ell} & \bullet & \bullet \\ P_{ik} & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & -I_{n_w} \end{bmatrix} \\ & + Her\left(\begin{bmatrix} G_{1ik} \\ G_{2ik} \\ G_{3ik} \end{bmatrix} [A_{ik} \quad -I_{2n} \quad J_{ik}]\right) < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Considerando o Lema da Eliminação (ver Boyd et al. (1994)), defina

$$T_\perp \triangleq \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ A_{ik} & J_{ik} \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix}$$

de modo que $[A_{ik} \quad -I_{2n} \quad J_{ik}] T_\perp = 0$, bem como

$$T'_\perp \begin{bmatrix} \sum_{(j,\ell) \in \mathbb{V}} \nu_{(i,k)(j,\ell)} P_{j\ell} & \bullet & \bullet \\ P_{ik} & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & -I_{n_w} \end{bmatrix} T_\perp = \begin{bmatrix} Her(P_{ik} A_{ik}) + \sum_{(j,\ell) \in \mathbb{V}} \nu_{(i,k)(j,\ell)} P_{j\ell} & \bullet \\ J'_{ik} P_{ik} & -I_{n_w} \end{bmatrix}.$$

Portanto, multiplicando (21) por T'_\perp pelo lado esquerdo e por T_\perp pelo lado direito, temos que (9) é satisfeita. Além disso, temos que (18) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}' P_{ik} \mathcal{T} & \bullet \\ [C_i \ -C_{fk}] \mathcal{T} & v I_{n_z} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (22)$$

Ao se multiplicar (22) by $diag(\mathcal{T}^{-1'}, I_{n_z})$ pelo lado esquerdo e sua transposta pelo lado direito, obtemos (10), considerando que $C_{ik} = [C_i \ -C_{fk}]$ e $v = \gamma^2$. Por fim, da Proposição 4, temos que $\|e\|_\infty \leq \gamma \|w\|_2$. ■

A partir do Teorema 5, o objetivo principal (15) pode ser reescrito na forma

$$\text{Dado } v, \text{ encontre } \bar{\xi} \in \bar{\Xi}(v) \quad (23)$$

onde $\bar{\xi} = (\bar{P}_{ik}, F_k, X_k, K_k, G_k, R_{1ik}, R_{2ik}, R_{3ik}, Y_{1ik}, Y_{2ik})$ e $\bar{\Xi}(v)$ conjunto solução de (16)-(18) para um dado $v > 0$. Da relação linear de v em (16)-(18) e (23), podemos escrever o seguinte problema de otimização em termos de LMI para obter o menor valor do limitante $v = \gamma^2$ para o objetivo (23):

$$\min_{\xi \in \Xi} v, \quad (24)$$

onde $\xi = (v, \bar{P}_{ik}, F_k, X_k, K_k, G_k, R_{1ik}, R_{2ik}, R_{3ik}, Y_{1ik}, Y_{2ik})$ e Ξ é o conjunto solução de (16)-(18) considerando que v também é uma variável de decisão.

6. EXEMPLO NUMÉRICO

Consideramos uma adaptação do sistema dinâmico do avião não-tripulado de Ducard (2009) com dois modos de operação $\mathbb{N} = \{1, 2\}$, cujas matrizes são dadas por

$$A_i = \begin{bmatrix} -4.7796 & 0 & -4.5420 & 0 \\ 0 & -0.0830 & -0.8660 & -9.8100 \\ 1.0000 & -0.0215 & -3.6573 & 0 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Considera-se que o ângulo de arfagem é medido de forma que as matrizes do sensor são dadas por $L_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$, $H_1 = [0 \ 0.1]$ e $L_2 = 0.1L_1$, $H_2 = 1.1H_1$, isto é, existe uma atenuação de 10% no sinal medido e um aumento de 10% no ruído da medida. Deseja-se estimar a velocidade da aeronave em relação ao ar de forma que $C_i = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$, $i \in \mathbb{N}$. Consideramos que as taxas de transição de θ são dada por $\lambda_{11} = -1$ e $\lambda_{22} = -0.8$. Além disso, consideramos que $\mathbb{M} = \{1, 2\}$ e que a taxa de transição de saltos espontâneos seja dada por $q_{k\ell}^i = 0$ e as simultâneas, por

$$[\alpha_{j\ell}^k] = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & 1 - \bar{\alpha} \\ 1 - \bar{\alpha} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

para todo $k \in \mathbb{M}$. Neste caso, $0 \leq \bar{\alpha} \leq 1.0$ é a probabilidade do detector saltar para o mesmo modo da cadeia de Markov ao mesmo tempo, independente de seu estado anterior. Consideramos três casos distintos

- (1) $\bar{\alpha} = 0.5$. Notamos que a probabilidade de $\hat{\theta}(t+h)$ saltar para $\theta(t+h) = 1$ ou $\hat{\theta}(t+h) = 2$ é a mesma (50% de chance de obter um dos valores).
- (2) $\bar{\alpha} = 0.8$. Este é um caso intermediário no qual existe 80% de chance de $\theta(t+h) = \hat{\theta}(t+h)$.
- (3) $\bar{\alpha} = 1.0$. Neste caso, temos que $\theta(t+h) = \hat{\theta}(t+h)$, isto é, $\theta(t)$ e $\hat{\theta}(t)$ serão iguais para todo t , independente do estado anterior.

Calculando o melhor limitante $\bar{\gamma}$ através de (24), bem como o valor do limitante $\underline{\gamma}$ dado pela Proposição 4 para os três casos anteriormente mencionados, obtemos a Tabela 1.

Tabela 1. γ calculado por meio de (24) e da Proposição 4 em função de $\bar{\alpha}$.

$\bar{\alpha}$	γ (24)	γ Prop. (4)
0.5	11.4342	11.3276
0.8	10.7491	10.5407
1.0	5.8983	5.8710

Notamos que, para $\bar{\alpha} = 0.5$, temos o maior valor de γ . Neste caso, notamos que os valores de A_{fk} , B_{fk} e C_{fk} são iguais para todo $k \in \mathbb{M}$, isto é, obtemos um filtro independente do modo de operação. Isso pode ser explicado devido a probabilidade de transição ser sempre igual, independente do valor de $\theta(t)$. Notamos ainda, a partir da Tabela 1 que o aumento de $\bar{\alpha}$ impacta diretamente em γ , ocorrendo assim uma diminuição de seus respectivos valores. O caso em $\bar{\alpha} = 1$ implica que $\hat{\theta} = \theta$ e portanto temos um filtro dependente do modo de operação. Neste caso, temos os menores valores de γ dentre os valores analisados. Por fim, nota-se que os valores de γ de projeto calculados através de (24) e do limitante através da Proposição 4 diferem devido ao conservadorismo associado às condições de projeto definido no Teorema 5, mesmo para o caso dependente do modo. Isso pode ser verificado ao se obter as soluções de (24) ($\bar{\gamma}$) e do limitante através da Proposição 4 ($\underline{\gamma}$) para $\bar{\alpha} \in [0.0, 1.0]$, conforme mostrado na Figura 1. É

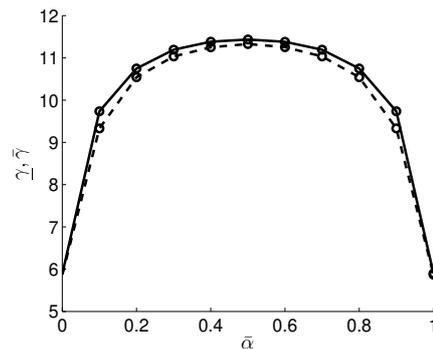


Figura 1. $\bar{\gamma}$ (linha contínua) e $\underline{\gamma}$ (linha tracejada) em função de $\bar{\alpha} \in [0.0, 1.0]$.

importante ressaltar que mesmo as condições da Proposição 4 são somente suficientes, e portanto, condições ótimas para o cálculo de γ permanecem um ponto em aberto na literatura de MJLS.

Para comparação do resultado com a literatura, consideramos o caso independente do modo obtido para $\bar{\alpha} = 0.5$ através de (24) e Proposição 4 ($\underline{\gamma}$) comparado ao caso robusto de Palhares and Peres (2000), Teorema 3.1 ($\underline{\gamma}_2$),

onde cada vértice do politopo é dado pelas matrizes dos respectivos subsistemas do MJLS em estudo. Resolvendo as condições de Palhares and Peres (2000), obtendo-se as matrizes do filtro A_f , B_f e C_f e as utilizando para o cálculo do limitante através da Proposição 4 (as matrizes do filtro são fixas para todos os modos de operação), temos que $\gamma_2 = 16.2173$, que é um valor 43% maior em relação ao caso independente do modo obtido por (24), mostrado na Tabela 6 e Figura 1.

Por fim, para comparação de um filtro $L_2 - L_\infty$ com um filtro H_∞ , considera-se o resultado de de Oliveira et al. (2022) para $\bar{\alpha} = 0.5$ e $\bar{\alpha} = 1.0$. Os filtros resultantes para os dois casos levam aos respectivos valores de norma H_∞ : 40.4013 e 18.9054. Analisando os valores da Tabela 6, temos os seguintes valores da razão $L_2 - L_\infty$ para os dois casos anteriormente mencionados: 11.3276 e 5.8710.

7. CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos o problema de filtragem $L_2 - L_\infty$ para MJLS a tempo contínuo considerando que o estado da cadeia de Markov não pode ser diretamente medido. Para contornar este problema de observação parcial, assumimos que existe um processo estocástico que provê a única informação sobre a cadeia oculta de Markov, de forma que processo conjunto é bem definido por um modelo de Markov oculto exponencial. Uma condição suficiente em termos de LMIs é derivada para a obtenção das matrizes do filtro que dependem somente do processo observado de forma que a razão entre o valor esperado do pico da norma euclideana do erro de estimação pela energia do sinal exógeno na entrada seja limitado para todo o tempo. Por fim, apresentamos um exemplo numérico para ilustrar os resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

- Aberkane, S., Ponsart, J.C., and Sauter, D. (2007). Multi-objective output feedback control of a class of stochastic hybrid systems with state-dependent noise. *Mathematical Problems in Engineering*, 2007(31561), 26.
- Aberkane, S., Sauter, D., and Ponsart, J.C. (2008). Output feedback robust H_∞ control of uncertain active fault tolerant control systems via convex analysis. *International Journal of Control*, 81(2), 252–263.
- Boukas, E.K. (2006). *Stochastic Switching Systems: Analysis and Design*. Birkhäuser Basel, New York City.
- Boyd, S., Ghaoui, L.E., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Costa, O.L.V., Fragoso, M.D., and Todorov, M.G. (2013). *Continuous-Time Markov Jump Linear Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York City.
- Costa, O.L.V., Fragoso, M.D., and Todorov, M.G. (2015). A detector-based approach for the H_2 control of Markov jump linear systems with partial information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(5), 1219–1234.
- de Oliveira, A.M., Costa, O.L.V., Fragoso, M.D., and Stadtmann, F. (2022). Dynamic output feedback control for continuous-time Markov jump linear systems with hidden Markov models. *International Journal of Control*, 95(3), 716–728.
- de Oliveira, A.M. and do Valle Costa, O.L. (2021). Control of continuous-time Markov jump linear systems with partial information. In A. Piunovskiy and Y. Zhang (eds.), *Modern Trends in Controlled Stochastic Processes*; 87–107. Springer Int. Publishing, Cham.
- Dragan, V., Morozaan, T., and Stoica, A.M. (2013). *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems*. Springer, New York City.
- Ducard, G.J.J. (2009). *Fault-tolerant Flight Control and Guidance Systems*. Springer-Verlag, New York City.
- Fang, M., Dong, S., and Wu, Z.G. (2020). Asynchronous H_∞ filtering of continuous-time Markov jump systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(2), 685–698.
- Feng, J. and Han, K. (2015). Robust full- and reduced-order energy-to-peak filtering for discrete-time uncertain linear systems. *Signal Processing*, 108, 183–194.
- Gonçalves, A.P.C., Fioravanti, A.R., and Geromel, J.C. (2010). Markov jump linear systems and filtering through network transmitted measurements. *Signal Processing*, 90(10), 2842–2850.
- Grigoriadis, K. and Watson, J. (1997). Reduced-order H_∞ and L_2 - L_∞ filtering via linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33(4), 1326–1338.
- Liu, F. (2004). Energy-to-peak filtering for Markov jump systems. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, 6, 5414–5415 vol.6.
- Liu, H., Sun, F., and Sun, Z. (2004). Reduced-order filtering with energy-to-peak performance for discrete-time Markovian jumping systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 21(2), 143–158.
- Mahmoud, M., Jiang, J., and Zhang, Y. (2003). *Active Fault Tolerant Control Systems - Stochastic Analysis and Synthesis*. Springer Verlag, Germany.
- Palhares, R.M. and Peres, P.L. (2000). Robust filtering with guaranteed energy to peak performance – an LMI approach. *Automatica*, 36(6), 851–858.
- Rodrigues, C.C.G., Todorov, M.G., and Fragoso, M.D. (2019). Detector-based approach for H_∞ filtering of Markov jump linear systems with partial mode information. *IET Control Theory & Appl.*, 13, 1298–1308.
- Stadtmann, F. and Costa, O.L.V. (2017). H_2 -control of continuous-time hidden Markov jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(8), 4031–4037.
- Stadtmann, F. and Costa, O.L.V. (2018). Exponential hidden Markov models for H_∞ control of jumping systems. *IEEE Control Systems Letters*, 2(4), 845–850.
- Xu, Z., Wu, Z.G., Su, H., Shi, P., and Que, H. (2020). Energy-to-peak filtering of semi-Markov jump systems with mismatched modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(10), 4356–4361.
- Zhang, H., Mehr, A.S., and Shi, Y. (2010). Improved robust energy-to-peak filtering for uncertain linear systems. *Signal Processing*, 90(9), 2667–2675.
- Zhang, H., Shi, Y., and Wang, J. (2014). On energy-to-peak filtering for nonuniformly sampled nonlinear systems: A Markovian jump system approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 22(1), 212–222.
- Zhang, Z., Zhang, Z., and Yang, S. (2015). Robust reduced-order l_2 - l_∞ filtering for network-based discrete-time linear systems. *Signal Processing*, 109, 110–118.