

Algoritmo Super-Twisting Multivariável Adaptativo com perturbações ilimitadas com majorantes desconhecidos^{*}

Jair L. de Azevedo Filho^{*} Eduardo Vieira L. Nunes^{*}

^{*} COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, (e-mail:
jair.azevedo@coppe.ufrj.br, eduardo@coep.ufr.br).

Abstract: In this paper, a novel Multivariable Adaptive Super-Twisting Algorithm is proposed. Considering a multilayered structure, the proposed adaptive scheme does not require the knowledge of upper bounds for the matched disturbances and their derivatives. Extracting information from the equivalent control, a second-order sliding mode is achieved by adapting both gains in a non-conservative way, potentially reducing the undesirable effects of chattering.

Resumo: Neste artigo, um novo algoritmo Super-Twisting Adaptativo Multivariável é proposto. Considerando uma estrutura de múltiplas camadas, o esquema adaptativo proposto não requer o conhecimento de limitantes superiores para perturbações casadas e suas derivadas. Extraindo informações através do controle equivalente, um modo deslizante de segunda ordem é obtido adaptando ambos os ganhos de maneira não-conservadora, reduzindo, potencialmente, os efeitos indesejados do *chattering*.

Keywords: Disturbance rejection; higher-order sliding modes; Lyapunov methods; multivariable control; nonlinear adaptive control; sliding mode control

Palavras-chaves: rejeição de perturbação; modos deslizantes de ordem superior; métodos de Lyapunov; controle multivariável; controle adaptativo não-linear; controle por modos deslizantes.

1. INTRODUÇÃO

O controle por modos deslizantes é uma técnica muito eficiente para controlar sistemas incertos sujeitos a perturbações casadas (Utkin, 1992). A principal desvantagem dessa técnica é o problema do *chattering* causado pela alta frequência de chaveamento observada na ação de controle. Esse problema pode provocar oscilações de alta frequência nas variáveis do sistema, podendo prejudicar seu desempenho em malha fechada (Utkin, 1992; Shtessel et al., 2014). O conceito de modos deslizantes de ordem superior foi proposto em (Levant, 1993) com o objetivo de remover o problema do *chattering*. No entanto, na prática por conta da presença de não-idealidades, o efeito do *chattering* pode apenas ser atenuado (Boiko and Fridman, 2005).

Entre os esquemas de modo deslizante de segunda ordem, o Algoritmo Super-Twisting (STA) se destaca por não depender da derivada da variável de deslizamento para a sua implementação (Levant, 2003). A introdução de uma nova abordagem baseada em Funções de Lyapunov em (Moreno and Osorio, 2008) permitiu que fossem feitos novos desenvolvimentos incluindo a adoção de esquemas adaptativos para ajuste dos ganhos do STA.

Diversos autores consideraram leis adaptativas para aumentar os ganhos do algoritmo Super-Twisting a fim de garantir a geração do modo deslizante de segunda or-

dem (Plestan et al., 2010; Shtessel et al., 2012; Alwi and Edwards, 2013; Bartolini et al., 2013). No entanto, nesses trabalhos os ganhos só podem crescer ou permanecer com o mesmo valor. Dessa forma, o valor dos ganhos pode se tornar maior do que o necessário, reforçando o problema do *chattering*.

Visando a lidar com esse efeito indesejado, novas estratégias adaptativas foram propostas para minimizar os valores dos ganhos não só para o Super-Twisting, mas também para estratégias de modos deslizantes de primeira ordem Oliveira et al. (2016, 2018).

Com relação ao esquema adaptativo, diversas formas de ajuste dos ganhos são exploradas na literatura, como funções de barreira Obeid et al. (2018, 2020) e a estimação do controle equivalente. Em (Utkin and Poznyak, 2013), um esquema adaptativo baseado no conceito de controle equivalente garante o deslizamento de segunda ordem enquanto reduz a magnitude da ação de controle. No entanto, somente um ganho é adaptado, enquanto o outro ainda precisa ser ajustado suficientemente grande, baseado no conhecimento de um majorante para a perturbação.

Posteriormente, seguindo essa linha de pesquisa, uma nova estrutura baseada no algoritmo Super-Twisting é proposta em Edwards and Shtessel (2016), associada a um esquema adaptativo que permite a adaptação de ambos os ganhos. Por sua vez, um controlador contínuo adaptativo baseado em modos deslizantes de ordem superior foi proposto em (Edwards and Shtessel, 2019) para sistemas com grau

^{*} Este trabalho foi financiado pelo CNPq, FAPERJ e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) Finance Code 001.

relativo n . Entretanto, assume-se que a variável de deslizamento e suas $n - 1$ primeiras derivadas estão disponíveis. Deve-se destacar também que, assim como em (Utkin and Poznyak, 2013), o esquema adaptativo proposto em (Edwards and Shtessel, 2016, 2019) é voltado para sistemas SISO, e que a classe de perturbações considerada são de sinais limitados cuja primeira derivada é limitada por uma constante desconhecida.

Em (Zhao et al., 2019), foi proposto um algoritmo Super-Twisting multivariável cujos ganhos são adaptados por meio de um esquema de camada dupla baseado no controle equivalente. No entanto, assim como em (Utkin and Poznyak, 2013), esta estratégia adapta somente um dos ganhos, enquanto o outro deve ser definido suficientemente grande.

Visando a englobar uma classe de sistemas multivariáveis mais ampla, uma versão multivariável generalizada do algoritmo Super-Twisting com ganhos adaptativos descrita em (Edwards and Shtessel, 2016) foi proposta em (de Azevedo Filho and Nunes, 2020). Este artigo estende esta contribuição propondo um esquema adaptativo de múltiplas camadas capaz de lidar com perturbações polinomiais ilimitadas. Assim como em Edwards and Shtessel (2016), o conceito de controle equivalente é aplicado na adaptação de ambos os ganhos, evitando uma escolha conservadora de seus valores enquanto garante um deslizamento de segunda ordem. A convergência global em tempo finito é garantida para a variável de deslizamento e sua derivada através de uma abordagem via função de Lyapunov, enquanto a eficácia do método proposto é ilustrada através da simulações de um problema de detecção e reconstrução de ataques cibernéticos em um sistema de potência.

2. DEFINIÇÕES PRELIMINARES

O símbolo $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana para vetores, ou a norma induzida para matrizes. $\lambda_M(\cdot)$ ($\lambda_m(\cdot)$) denota o maior (menor) autovalor de uma matriz. Por sua vez, a definição de Fillipov para a solução de equações diferenciais descontínuas é considerada (Filippov, 1988)..

3. ESQUEMA ADAPTATIVO DE MÚLTIPLAS CAMADAS

Considere o seguinte sistema multivariável generalizado de (Edwards and Shtessel, 2016)

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= -\alpha(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \Phi(t, \sigma) + z(t), \\ \dot{z}(t) &= -\beta(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + d(t),\end{aligned}\quad (1)$$

onde $\sigma(t)$, $z(t) \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de deslizamento e o novo termo $\Phi(t, \sigma)$ e os ganhos variantes $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são dados por

$$\begin{aligned}\Phi(t, \sigma) &= -\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \sigma, \\ \alpha(t) &= \alpha_0 \sqrt{L(t)}, \quad \beta(t) = \beta_0 L(t),\end{aligned}\quad (2)$$

onde α_0 e β_0 são parâmetros de projeto positivos e $L(t) \in \mathbb{R}$ é uma função positiva obtida através do esquema adaptativo de múltiplas camadas que será apresentado poste-

riormente. Por sua vez, $d(t) \in \mathbb{R}^n$ é uma perturbação de entrada que satisfaz a seguinte hipótese

Hipótese 1. A classe de perturbações de entrada $d(t)$ considerada aqui satisfaz

$$\left\| \frac{d^m}{dt^m} d(t) \right\| \leq a_m \quad (3)$$

$\forall t \geq t_0$, onde $m > 0 \in \mathbb{N}$ e a constante $a_m \geq 0 \in \mathbb{R}$ é finita porém desconhecida

Seja $u_{eq} = \beta(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|}$. Logo, durante o modo deslizante ($\sigma = z = 0$), sabe-se pelo conceito de controle equivalente que

$$u_{eq} = \beta(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \Big|_{eq} = d(t) \quad (4)$$

onde $\beta(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \Big|_{eq}$ é um sinal contínuo que pode substituir $\beta(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|}$ e ainda preservar o modo deslizante. Para uma discussão mais ampla sobre o conceito de controle equivalente e sua estimação, veja Utkin (2013).

Uma vez que o esquema adaptativo proposto baseia-se no conceito de controle equivalente, a estimação do mesmo e de suas $m - 1$ derivadas temporais será feito a partir dos seguintes filtros passa-baixas multivariáveis:

$$\bar{u}_{eq_i}(s) = \text{diag} \left(\frac{s^i}{(\tau_k s + 1)^m} \right) \beta(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (5)$$

onde $i = 0, \dots, m - 1$, $\bar{u}_{eq_i} \in \mathbb{R}^n$, e $\tau_1, \dots, \tau_n > 0 \in \mathbb{R}$ são parâmetros suficientemente pequenos. Logo, durante o modo deslizante, $\frac{d^i}{dt^i} d(t)$ pode ser estimado em tempo real através de $\bar{u}_{eq_i}(t)$.

O objetivo agora é propor um esquema adaptativo que permita que o ganho $L(t)$ se torne um majorante para $\|d(t)\|$ após um tempo finito

Considere as seguintes variáveis auxiliares:

$$\delta_0(t) = L(t) - \frac{1}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq_0}(t)\| - \epsilon_0 \quad (6)$$

$$\delta_i(t) = \rho_i(t) - \frac{1}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq_i}(t)\| - \epsilon_i \quad (7)$$

onde $i = 1, \dots, m - 1$, e $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{m-1} > 0 \in \mathbb{R}$, e $0 < a < \min(1, \frac{1}{\beta_0}) \in \mathbb{R}$ são variáveis de projeto. Escolhendo a desta forma, tem-se que $\frac{1}{a\beta_0} > 1$.

Diferentemente do trabalho de Edwards and Shtessel (2016), que considera somente perturbações limitadas, nós introduzimos um novo conjunto de variáveis auxiliares no esquema de adaptação (7) de modo a lidar com uma classe mais ampla de perturbações.

De forma similar à (Edwards and Shtessel, 2016), as variáveis de projeto escalares a e ϵ_0 representam margens de segurança que devem satisfazer a seguinte desigualdade.

$$\frac{1}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq}(t)\| + \epsilon_0 > \|u_{eq}(t)\| \quad (8)$$

O ganho adaptativo $L(t)$ é definido como

$$L(t) = l(t) + l_0 \quad (9)$$

onde $l_0 > 0 \in \mathbb{R}$ é um parâmetro de projeto e $l(t)$ é uma função escalar que evolui de acordo com

$$\dot{l}(t) = -\rho_1(t) \operatorname{sgn}(\delta_0(t)), \quad (10)$$

com

$$\begin{aligned} \rho_i(t) &= \rho_{i0} + \bar{\rho}_i(t), \quad 1 \leq i \leq m \\ \dot{\bar{\rho}}_i(t) &= \begin{cases} -\rho_{i+1}(t) \operatorname{sgn}(\delta_i(t)), & \text{para } 1 \leq i \leq m-1 \\ \gamma |\delta_{i-1}(t)|, & \text{para } i = m \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

onde $\gamma, \rho_{10}, \dots, \rho_{m0} > 0 \in \mathbb{R}$ são parâmetros de projeto.

O primeiro resultado deste artigo é apresentado a seguir: Teorema 1. Considere o sistema (1) e a classe de perturbações $\mathbf{d}(t)$ apresentada na Hipótese 1. Então, o esquema adaptativo de múltiplas camadas (5)–(7), (9)–(11) garante que

$$L(t) > \begin{cases} l_0, \quad \forall 0 \leq t < t_s \\ \max\{\|\mathbf{d}(t)\|, \epsilon_0\}, \quad \forall t \geq t_s \end{cases} \quad (12)$$

para todo $t \geq t_0$.

Prova: Aqui iremos apresentar apenas os passos principais. Note que, para $\tau_i, i = 0, \dots, m-1$ suficientemente pequeno, existe um intervalo de tempo $[t_b, t_c] \subset [t_a, t_c]$ no qual

$$\|\bar{\mathbf{u}}_{eq_i}(t)\| > \lambda a \left\| \frac{d^i}{dt^i} \left(\beta(t) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \right) \right\|, \quad i = 0, \dots, m-1 \quad (13)$$

onde $1 < \lambda < \frac{1}{a}$. De (13), para $i = 0$, note que

$$\|\bar{\mathbf{u}}_{eq_0}\| > \lambda a \beta_0 L(t)$$

Substituindo este resultado em (6), durante a fase de alcance segue que $\delta_0(t) < 0$.

De (10), segue que $\dot{l}(t) = \rho_1(t)$. Considerando (13) e usando (1) e (2), Pode-se verificar que

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i} \left(\beta(t) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \right) \right\| > \left\| \frac{d^i}{dt^i} \left(\left\| \beta(t) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \right\| \right) \right\| = \beta_0 \rho_i(t), \quad (14)$$

para $i = 1, \dots, m-1$. Substituindo (14) em (13), pode-se verificar que

$$\|\bar{\mathbf{u}}_{eq_i}\| > \lambda a \beta_0 \rho_i(t), \quad i = 1, \dots, m-1$$

. Logo, de (7), pode-se verificar que $\delta_i(t) < 0, \forall i = 1, \dots, m$.

Finalmente, substituindo os resultados acima em (10) e (11), pode-se concluir que

$$\begin{cases} \dot{L}(t) = \dot{l}(t) = \rho_1(t) \\ \dot{\bar{\rho}}_i(t) = \dot{\rho}_i(t) = \rho_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, m-1 \\ \dot{\bar{\rho}}_m(t) = \dot{\rho}_m(t) > \gamma(\lambda - 1)\rho_{m-1}(t) \end{cases} \quad (15)$$

Dessa forma, é possível concluir que durante a fase de alcance, $L(t)$ e $\rho_i, i = 1, \dots, m$ crescem monotonicamente como funções exponenciais. Uma vez que, por hipótese, $\|\mathbf{d}(t)\|$ cresce, no máximo, como um polinômio de ordem m , em um tempo finito t_s onde, $\forall t \geq t_s, L(t) > \|\mathbf{d}(t)\|$.

Usando este resultado, pode-se provar que o modo deslizante $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{z} = \mathbf{0}$ é alcançado após um tempo finito t_σ .

Agora, suponha que o modo deslizante já foi alcançado. Considere a seguinte função de Lyapunov

$$V_{m-1}(\delta_{m-1}, \bar{\rho}_m) = \frac{\delta_{m-1}^2(t)}{2} + \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{qa_m}{a\beta_0} - \bar{\rho}_m(t) \right)^2, \quad (16)$$

onde $q > 1$ é uma margem de segurança usada para garantir que

$$\left| \frac{d}{dt} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq_{m-1}}(t)\| \right| < qa_m \quad (17)$$

Utilizando (11), pode-se mostrar que a derivada temporal de $V_{m-1}(\delta_{m-1}, \bar{\rho}_m)$ satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\dot{V}_{m-1} \leq -\rho_{m0} |\delta_{m-1}(t)| \quad (18)$$

Uma vez que $\dot{V}_{m-1} \leq 0$, pode-se concluir que $\delta_{m-1}(t)$ e $\bar{\rho}_m(t)$ são sinais limitados. Através de (7), note que um limitante superior para $|\delta_{m-1}(t)|$ é dado por

$$\begin{aligned} |\dot{\delta}_{m-1}(t)| &= \left| -\rho_m \operatorname{sgn}(\delta_{m-1}) + \frac{1}{a\beta_0} \frac{d}{dt} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq_{m-1}}(t)\| \right| \\ &\leq |-\rho_m \operatorname{sgn}(\delta_{m-1})| + \frac{1}{a\beta_0} \left| \frac{d}{dt} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq_{m-1}}(t)\| \right| \leq \rho_m(t) + \frac{qa_m}{a\beta_0} \end{aligned}$$

Como $\bar{\rho}_m(t)$ é limitado, verifica-se que $\rho_m(t)$ também é limitado. Consequentemente $|\dot{\delta}_{m-1}(t)|$ é um sinal limitado e $|\delta_{m-1}(t)|$ é absolutamente contínuo. De (18), a seguinte desigualdade é satisfeita.

$$\rho_{m0} \int_0^t |\delta_{m-1}(t)| dt \leq V_{m-1}(0) \quad (19)$$

Pelo Lema de Barbalat (Khalil, 2002), tem-se que $\delta_{m-1}(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Portanto, existe um tempo finito t_{m-1} onde $|\delta_{m-1}(t)| \leq \frac{\epsilon_{m-1}}{2}, \forall t > t_{m-1}$. Após isso, de (7), verifica-se que a função adaptativa $\rho_{m-1}(t)$ satisfaz a seguinte desigualdade

$$\left| \rho_{m-1}(t) - \frac{1}{a\beta_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq_{m-1}}(t)\| - \epsilon_{m-1} \right| = |\delta_{m-1}(t)| \leq \frac{\epsilon_{m-1}}{2}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \rho_{m-1}(t) - \frac{1}{a\beta_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq_{m-1}}(t)\| - \epsilon_{m-1} &\geq -\frac{\epsilon_{m-1}}{2} \\ \rho_{m-1}(t) &\geq \frac{1}{a\beta_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq_{m-1}}(t)\| + \frac{\epsilon_{m-1}}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

Por sua vez, considere a família de funções de Lyapunov candidatas

$$V_i = \frac{\delta_i^2(t)}{2}, \quad i = 1, \dots, m-2 \quad (21)$$

Considerando (6), (7), (9)–(11), pode-se mostrar que

$$\dot{V}_i \leq -\frac{\epsilon_{i+1}}{2} |\delta_i(t)| \quad (22)$$

Dessa forma, é possível verificar que

$$\delta_0(t) = \dots = \delta_{m-2}(t) = 0$$

após um certo tempo finito T_M . Além disso, durante o modo deslizante, segue de (6) e (8), que

$$L(t) = \frac{1}{a\beta_0} \|\bar{\mathbf{u}}_{eq}(t)\| + \epsilon_0 > \|\mathbf{u}_{eq}(t)\| = \|\mathbf{d}(t)\| \quad (23)$$

Finalmente de (10) e (15), tem-se que $L(t) > l_0$ durante a fase de alcance ($t < t_\sigma$), enquanto de (23)

$$L(t) > \max(\|\mathbf{d}(t)\|, \epsilon_0)$$

durante o modo deslizante. Portanto a desigualdade (12) é satisfeita $\forall t \geq t_0$, o que conclui a demonstração. \square

Observação 1. A abordagem proposta aqui pode lidar com uma classe perturbações ilimitadas, ao custo de ganhos ilimitados. Por sua vez, no caso de perturbações limitadas, pode-se verificar que $L(t)$ também se torna limitado.

Observação 2. Como $\delta_{m-1}(t)$ converge para zero assintoticamente, a função $\rho_m(t)$ é sempre crescente, o que pode se tornar problemático em certas aplicações práticas. Note que na prova do Teorema 2,

$$|\delta_{m-1}(t)| < \frac{\epsilon_{m-1}}{2}$$

é suficiente para garantir que o esquema adaptativo funcione. Logo, para lidar com este problema o esquema proposto pode ser substituído por

$$\begin{aligned} \dot{i}(t) &= -\rho_1 \operatorname{sgn}(\delta_0) \\ \dot{\rho}_i(t) &= -\rho_{i+1}(t) \operatorname{sgn}(\delta_i), \quad i = 1, \dots, m-1 \\ \dot{\rho}_m(t) &= \begin{cases} \gamma |\delta_{m-1}(t)|, & \text{if } |\delta_{m-1}(t)| \geq \delta_{m-1}^* \\ 0, & \text{if } |\delta_{m-1}(t)| < \delta_{m-1}^* \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

onde $\delta_{m-1}^* > 0 \in \mathbb{R}$ é um parâmetro de projeto pequeno.

4. CONVERGÊNCIA DAS VARIÁVEIS DE DESLIZAMENTO

Considere agora o sistema multivariável (1), o esquema adaptativo de múltiplas camadas e o ganho $L(t)$ que satisfaz (12). O seguinte Teorema apresenta as propriedades de convergência do algoritmo Super-Twisting considerado Teorema 2. Considere o sistema (1), o esquema adaptativo de múltiplas camadas (5)–(7), (9)–(11) e assuma que a Hipótese 1 é satisfeita. Definindo os ganhos α_0 e β_0 como

$$\frac{(2\alpha_0\beta_0)^2}{\alpha_0^2 + 2\beta_0 + 2} > \frac{\kappa^2}{\kappa - 1}, \quad (25)$$

com $1 < \kappa \in \mathbb{R}$, então, a superfície de deslizamento $\dot{\sigma} = \sigma = \mathbf{0}$ é alcançada em tempo finito.

Prova: Usando os mesmos argumentos de Azevedo Filho and Nunes (2020), pode-se concluir que o ponto de equilíbrio $(\sigma, z) = \mathbf{0}$ é alcançado globalmente em tempo finito. Consequentemente pode-se mostrar por (1) que se $(\sigma, z) = \mathbf{0}$, então $\dot{\sigma}(t) = \mathbf{0}$ após um tempo finito. \square

5. ESTUDO DE SIMULAÇÃO: SISTEMA CIBER-FÍSICO

Considere o sistema de potência WECC apresentado em (Pasqualetti et al., 2015; Corradini and Cristofaro, 2017). Usando a técnica de redução de Kron (Dorfler and Bullo, 2012), o sistema de potência pode ser escrito como

$$\dot{\xi}(t) = \bar{\mathbf{A}}\xi(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{B}}_f \mathbf{f}(\xi, t) \quad (26)$$

com $\xi(t) = [\theta(t)^T \omega(t)^T]^T$, onde $\theta(t) \in \mathbb{R}^3$ são os ângulos dos rotores geradores e $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ são as frequências relativas. Por sua vez, $\mathbf{f}(\xi, t)$ representa um vetor de ataques desconhecido e $\bar{\mathbf{B}}_f$ é uma matriz de projeto a ser definida posteriormente. Finalmente, as matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ são descritas em detalhes em (Corradini and Cristofaro, 2017). Para este caso ilustrativo, considere a seguinte saída

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\xi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi(t).$$

Além disso, considere que o primeiro e o quarto estados serão monitorados, isto é, $\bar{\mathbf{B}}_f = \bar{\mathbf{C}}^T$.

Depois da mudança de coordenadas apresentada em (de Azevedo Filho and Nunes, 2020) na forma $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\xi(t)$, o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_2(t)$, e \mathbf{A}_{11} é uma matriz Hurwitz. Considere agora o seguinte estimador de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{f}}(t) \end{bmatrix}$$

Com $\hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{x}}_2(t)$. Definindo os erros de estimação como $\mathbf{e}_1(t) = \mathbf{x}_1(t) - \hat{\mathbf{x}}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t) = \mathbf{x}_2(t) - \hat{\mathbf{x}}_2(t)$, e $\mathbf{e}_y(t) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)$, segue que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{e}_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}(t) - \hat{\mathbf{f}}(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

onde infere-se que $\mathbf{e}_y(t) = \mathbf{e}_2(t)$. Como \mathbf{A}_{11} é Hurwitz, pode-se verificar que $\mathbf{e}_1(t)$ é um sinal limitado que converge exponencialmente para a origem. O vetor de ataques $\mathbf{f}(t)$ é reconstruído pelo seguinte monitor de ataques

$$\hat{\mathbf{f}}(t) = \alpha(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \Phi(\sigma, t) + \int_{t_0}^t \beta(t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} dt,$$

onde $\sigma(t) = \mathbf{e}_y(t)$ é definido como a variável de deslizamento. De (27), o erro de monitoramento $\mathbf{f}(t) - \hat{\mathbf{f}}(t)$ é dado por

$$\mathbf{f}(t) - \hat{\mathbf{f}}(t) = \dot{\sigma} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{e}_1(t) \quad (28)$$

Por sua vez, note que a dinâmica de $\mathbf{e}_y(t)$ pode ser reescrita por (1), com

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{A}_{21}\dot{\mathbf{e}}_1(t) + \dot{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}\mathbf{e}_1 + \dot{\mathbf{f}}(t)$$

Considere para esta simulação que o vetor de ataques

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \frac{t^3}{3} \\ t \end{bmatrix}$$

é desconhecido e que sua terceira derivada temporal é limitada por uma constante desconhecida. Note que um vetor de ataques desta forma representa um possível ataque cibernético de alteração de carga em um sistema de potência.

Como $e_1(t)$ é um sinal limitado, a seguinte desigualdade é satisfeita $\forall t$

$$\left\| \ddot{\mathbf{d}}(t) \right\| \leq \left\| \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^3 \right\| \left\| e_1(t) \right\| + \left\| \frac{d^3 \mathbf{f}(t)}{dt^3} \right\| < a_2$$

onde a_2 é uma constante positiva mas desconhecida. Pelo Teorema 1, para $m \geq 2$, o esquema adaptativo de múltiplas camadas proposto garante que $L(t) > \|\mathbf{d}(t)\|$ em tempo finito. Finalmente, pelo Teorema 2, conclui-se que o modo deslizante de segunda ordem $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ é ser alcançado em tempo finito.

Observação 3. Note que $\|\dot{\mathbf{d}}(t)\|$ é um sinal ilimitado, violando as condições requeridas para a aplicação do esquema de camada dupla proposto em (Edwards and Shtessel, 2016). Por sua vez, o esquema de múltiplas camadas proposto aqui pode lidar com uma classe mais ampla de perturbações através da inclusão de novas camadas no esquema adaptativo.

Os parâmetros α_0 e β_0 são escolhidos de acordo com (25). Considerando $\kappa = 2$, estes parâmetros são selecionados como $\alpha_0 = 2$ e $\beta_0 = 3.5$. Os parâmetros do esquema de múltiplas camadas foram escolhidos como $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-2}$, $\tau_1 = 4 \cdot 10^{-2}$, $l_0 = 0.1$, $\rho_{10} = 0.1$, $\rho_{20} = 0.1$, $\epsilon_0 = 0.1$, $\epsilon_1 = 0.1$, $a = 0.28$, e $\gamma = 8$. Para esta simulação, assume-se que $\boldsymbol{\sigma}(0) = [1 \ -1]^T$, $\mathbf{z}(0) = [0 \ 0]^T$, e que as demais condições iniciais são zero. Os resultados de simulação são apresentados nas seguintes Figuras.

Pode-se verificar na Figura 1 que o esquema proposto garante convergência em tempo finito para as variáveis de deslizamento, e conseqüentemente de $\|\Phi(\boldsymbol{\sigma}, t)\|$. Por sua vez, pode-se ver na Figura 2, que após $t = 0.7s$, $L(t) > \|\mathbf{d}(t)\|$ satisfazendo (12). Nas Figuras 3 e 4 nota-se o comportamento esperado de $\delta_0(t)$, $\delta_1(t)$, $\rho_1(t)$ e $\rho_2(t)$. Além disso, verifica-se na Figura 5, que o ataque pode ser reconstruído exponencialmente, uma vez que $\mathbf{f}(t) - \hat{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{A}_{21} \mathbf{e}_1(t)$ (ver (28)).

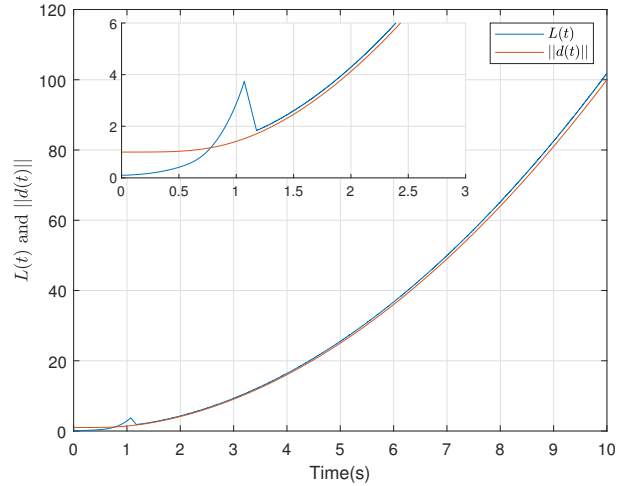


Figura 2. Ganho adaptativo $L(t)$ versus a norma de $\mathbf{d}(t)$

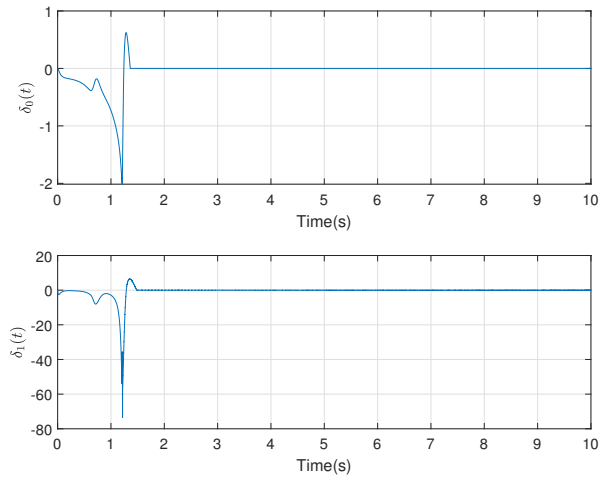


Figura 3. Variáveis auxiliares $\delta_0(t)$ e $\delta_1(t)$.

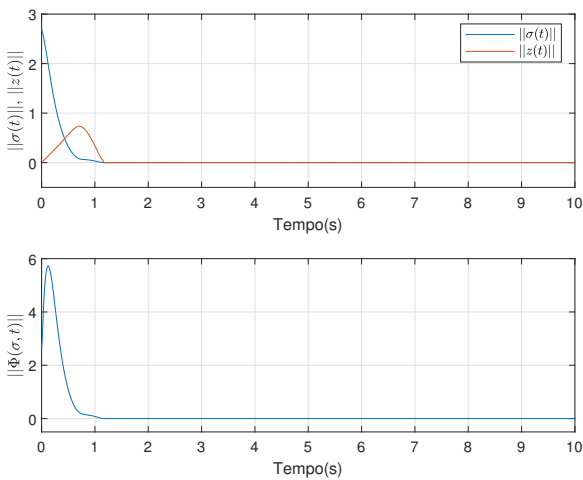


Figura 1. Norma das variáveis de deslizamento e da função $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, t)$

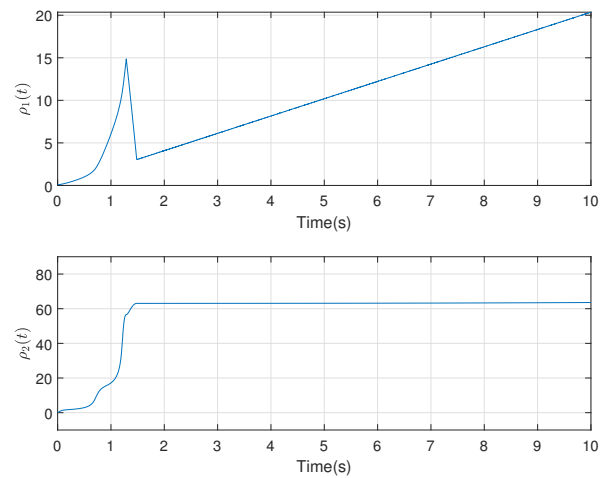


Figura 4. Variáveis adaptativas $\rho_1(t)$ e $\rho_2(t)$.

6. CONCLUSÃO

Este artigo propõe um novo esquema adaptativo de múltiplas camadas que adapta ambos os ganhos do algo-

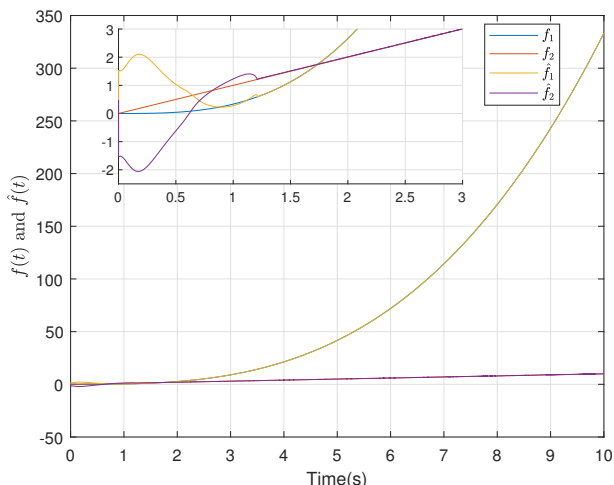


Figura 5. Reconstrução do ataque com o monitor proposto.

ritmo Super-Twisting multivariável modificado. O esquema adaptativo não requer conhecimento *a priori* de majorantes da perturbação e de suas derivadas. A introdução de camadas adicionais permite que a abordagem proposta seja capaz de lidar com uma classe de perturbações polinomiais ilimitadas. Durante a fase de alcance, os ganhos são aumentados para garantir que um modo deslizante de segunda ordem ocorra. Usando informação extraída de uma aproximação do controle equivalente e de suas derivadas temporais, é possível minimizar ambos os ganhos, atenuando o problema de *chattering*. O problema de detecção e reconstrução de ataques cibernéticos em um sistema de potência é considerado para ilustrar os resultados obtidos e comprovar a eficácia do esquema proposto, que é capaz inclusive de reconstruir ataques desconhecidos ilimitados.

REFERÊNCIAS

Alwi, H. and Edwards, C. (2013). An adaptive sliding mode differentiator for actuator oscillatory failure case reconstruction. *Automatica*, 49(2), 642–651.

Bartolini, G., Levant, A., Plestan, F., Taleb, M., and Punta, E. (2013). Adaptation of sliding modes. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 30(3), 285–300.

Boiko, I. and Fridman, L. (2005). Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(9), 1442–1446.

Corradini, M.L. and Cristofaro, A. (2017). Robust detection and reconstruction of state and sensor attacks for cyber-physical systems using sliding modes. *IET Control Theory & Applications*, 11(11), 1756–1766.

de Azevedo Filho, J.L. and Nunes, E.V.L. (2020). Multivariable adaptive dual layer super-twisting algorithm. In *21th IFAC World Congress*. IFAC.

Dorfler, F. and Bullo, F. (2012). Kron reduction of graphs with applications to electrical networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 60(1), 150–163.

Edwards, C. and Shtessel, Y. (2019). Enhanced continuous higher order sliding mode control with adaptation. *Journal of the Franklin Institute*, 356(9), 4773–4784.

Edwards, C. and Shtessel, Y. (2016). Adaptive dual-layer super-twisting control and observation. *International Journal of Control*, 89(9), 1759–1766.

Filippov, A.F. (1988). *Differential equations with discontinuous right-hand side*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems; 3rd ed.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10), 924–941.

Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6), 1247–1263.

Moreno, J.A. and Osorio, M. (2008). A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *2008 47th IEEE conference on decision and control*, 2856–2861. IEEE.

Obeid, H., Fridman, L., Laghrouche, S., Harmouche, M., and Golkani, M.A. (2018). Adaptation of levant's differentiator based on barrier function. *International Journal of Control*, 91(9), 2019–2027.

Obeid, H., Laghrouche, S., Fridman, L., Chitour, Y., and Harmouche, M. (2020). Barrier function-based adaptive super-twisting controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(11), 4928–4933.

Oliveira, T.R., Cunha, J.P.V., and Hsu, L. (2016). Adaptive sliding mode control for disturbances with unknown bounds. In *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 59–64. IEEE.

Oliveira, T.R., Cunha, J.P.V., and Hsu, L. (2018). Adaptive sliding mode control based on the extended equivalent control concept for disturbances with unknown bounds. In *Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Control—Theory and Applications*, 149–163. Springer.

Pasqualetti, F., Dorfler, F., and Bullo, F. (2015). Control-theoretic methods for cyberphysical security: Geometric principles for optimal cross-layer resilient control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 35(1), 110–127.

Plestan, F., Shtessel, Y., Bregeault, V., and Poznyak, A. (2010). New methodologies for adaptive sliding mode control. *International Journal of Control*, 83(9), 1907–1919.

Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding Mode Control and Observation*. Control Engineering. Birkhäuser.

Shtessel, Y., Taleb, M., and Plestan, F. (2012). A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application. *Automatica*, 48(5), 759–769.

Utkin, V.I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag.

Utkin, V.I. and Poznyak, A.S. (2013). Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method. *Automatica*, 49(1), 39–47.

Utkin, V.I. (2013). *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media.

Zhao, X., Zong, Q., Tian, B., Shao, S., You, M., and Liu, W. (2019). Adaptive multivariable finite-time continuous fault-tolerant control of rigid spacecraft. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(10), 2927–2940.