

# Estabilização Poliquadrática de Sistemas Positivos Chaveados com Incertezas Politópicas Variantes no Tempo e Alocação Regional de Autovalores

Rodrigo Possidônio Noronha \* Ginalber Luiz de Oliveira Serra \*\*

\* *Av. dos Portugueses, s/n, Bacanga, CEP: 65001-970, Universidade Federal do Maranhão, MA, (e-mail: possidonio\_789@hotmail.com).*

\*\* *Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, São Luís, CEP: 65030-005, Instituto Federal do Maranhão, MA (e-mail: ginalber@ifma.edu.br).*

---

**Abstract:** This paper addresses the polyquadratic stabilization of switched linear systems with polytopic uncertainties. Time-varying uncertain parameter-dependent switched Lyapunov functions are used to obtain conditions, in the form of linear matrix inequalities, that guarantee the polyquadratic stabilization and positivity of the dynamical system. The present work considers the case of discrete time-varying polytopic uncertainties in the switched state matrix, switched input matrix, and state feedback switched gain matrix. In addition, polyquadratic stabilization is performed with the eigenvalues placement in a circular region in the complex plane. Two example systems are employed to verify the effectiveness of the proposed conditions.

**Resumo:** Este trabalho trata da estabilização poliquadrática de sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas. São utilizadas funções de Lyapunov chaveadas dependentes de parâmetros incertos variantes no tempo para obtenção de condições, na forma de desigualdades matriciais lineares, que garantem a estabilização poliquadrática e a positividade do sistema dinâmico. O presente trabalho considera o caso de incertezas politópicas variantes no tempo discreto na matriz de estados chaveada, matriz de entrada chaveada, e matriz de ganhos chaveada de realimentação de estados. Além disso, a estabilização poliquadrática é realizada com a alocação de autovalores em uma região circular no plano complexo. São empregados dois sistemas exemplos para verificação da eficácia das condições propostas.

*Keywords:* Eigenvalues Placement; Linear Matrix Inequalities; Polyquadratic Stabilization; Polytopic Uncertainties; Positive Systems; Switched Systems.

*Palavras-chaves:* Alocação de Autovalores; Estabilização Poliquadrática; Desigualdades Matriciais Lineares; Incertezas Politópicas; Sistemas Positivos; Sistemas Chaveados.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas chaveados são sistemas dinâmicos compostos por modos (subsistemas) em que estão contidas as equações que descrevem as características dinâmicas do sistema e uma regra de chaveamento que seleciona a cada instante de tempo qual modo estará ativo (Liberzon and Morse, 1999; Liberzon, 2003). Por esse motivo, um sistema chaveado pertence à classe de sistemas híbridos (Gans and Hutchinson, 2007). Nesse sentido, uma das vantagens que motivam o estudo de sistemas chaveados é quando o sistema dinâmico é caracterizado por diferentes propriedades dinâmicas definidas em diferentes regiões no espaço de estados (Daafouz et al., 2003).

Um importante problema da teoria de controle de sistemas chaveados é a estabilização, seja quando a função de chaveamento é arbitrária, dependente do tempo ou da função de estados/saída (DeCarlo et al., 2000; Jin et al., 2020). A literatura já contém algumas contribuições referentes à es-

tabilização de sistemas chaveados considerando diferentes tipos de complexidades dinâmicas. Em Hetel et al. (2006), foi tratado o problema de estabilização para sistemas politópicos variantes no tempo via função de Lyapunov chaveada dependente de parâmetros (FLCDP). Em Tong et al. (2021), foi realizada a estabilização de sistemas chaveados de forma assíncrona com tempo de permanência dinâmico. Em Zhao and Zhu (2021), foi trabalhada a estabilização de sistemas chaveados estocásticos altamente não lineares com atrasos de tempo.

Uma outra classe importante de sistemas dinâmicos são os sistemas positivos. Sistemas positivos são aqueles que, dada uma condição inicial não negativa, a função de estados permanecerá não negativa para todo instante de tempo (Aleksandrov and Mason, 2014; Farina and Rinaldi, 2000). Sistemas positivos descrevem a dinâmica de fenômenos em diferentes áreas, como em biologia, física, ecologia, econometria, e entre outros (Aleksandrov and Mason, 2014). Com respeito aos sistemas lineares, a teoria de controle de sistemas positivos tem sido trabalhada pela comunidade acadêmica de sistemas dinâmicos (Kaczorek, 2012; Farina and Rinaldi, 2000). Porém, como um cenário

---

\* O presente trabalho foi realizado com apoio da FAPEMA, Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão.

de complexidade que tem motivado novas investigações, a presença de incertezas paramétricas é um ponto a se considerar aos sistemas positivos.

Este trabalho é delimitado à contribuir ao tópico de pesquisa referente à estabilização poliquadrática de sistemas lineares positivos chaveados incertos. Em Silva et al. (2021), foi proposta a estabilização de sistemas positivos chaveados e invariantes no tempo discreto via função de Lyapunov aumentada e chaveada. É importante também destacar Liu et al. (2017) que abordou o mesmo problema de Silva et al. (2021), porém com a função de Lyapunov baseadas no tempo médio de permanência. Em Deaecto and Geromel (2017), foi proposta uma síntese de controle por realimentação de estados com a garantia do custo  $\mathcal{H}_2$  e a positividade via função de Lyapunov chaveada. Em Liu et al. (2015), foi tratada a estabilização de sistemas positivos chaveados no tempo discreto com restrições na função de controle e de estados, e incertezas politópicas invariantes no tempo.

Nesse sentido, o presente trabalho visa propor, via funções de Lyapunov quadráticas chaveadas dependentes de parâmetro (FLCDP) incertos variantes no tempo, na forma de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs), condições para estabilização poliquadrática de sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas variantes no tempo discreto. As incertezas politópicas variantes no tempo são consideradas nas matriz de estados chaveada, matriz de entrada chaveada, e na matriz de ganhos chaveada de realimentação de estados. A função de chaveamento é do tipo arbitrária. Além disso, são incorporadas às condições para estabilização poliquadrática, condições que garantem a alocação de autovalores em regiões circulares, com centro no eixo real, do plano complexo, e a positividade do sistema. Embora alguns do problemas citados acima tenham sido tratados em Hetel et al. (2006); Peres et al. (1994), as complexidades abordadas no presente trabalho, de acordo com o levantamento bibliográfico, ainda não foram consideradas ao mesmo tempo na formulação de um problema de controle. As condições propostas são avaliadas em dois sistemas exemplos. O presente artigo é organizado da seguinte forma: resultados preliminares são apresentados na Seção 2; os resultados principais desse trabalho são apresentados na Seção 3; os exemplos computacionais para verificação da eficácia das condições propostas são apresentados na Seção 4; e na Seção 5 é apresentada a conclusão do trabalho.

**Notação:**  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  representa uma matriz com  $p$  linhas e  $n$  colunas. A notação  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  representa um vetor com  $n$  linhas e 1 coluna de números reais.  $\mathbf{P} \succ \mathbf{0}$  ( $\mathbf{P} \prec \mathbf{0}$ ) representa uma matriz definida positiva (negativa).  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  ( $\mathbf{P} \geq \mathbf{0}$ ) representa uma matriz com elementos positivos (não negativos). A notação  $\mathbf{p} > \mathbf{0}$  ( $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ ) representa uma vetor com elementos positivos (não negativos).  $\mathbf{P}^T$  representa uma matriz transposta. O bloco transposto de uma matriz definida em blocos é denotado por  $\star$ .

## 2. PRELIMINARES

Esta seção tem como objetivo apresentar as principais definições para o problema de estabilização poliquadrática de sistemas lineares positivos chaveados com incertezas politópicas variantes no tempo.

### 2.1 Problema de Estabilidade Poliquadrática

Seja o seguinte sistema linear no tempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\alpha}(k))\mathbf{x}(k) = \sum_{i=1}^L \alpha_i(k)\mathbf{A}_i\mathbf{x}(k), \quad (1)$$

onde  $\mathbf{x} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função de estados e  $k \in \mathbb{Z}$  é o instante de tempo discreto. A matriz de estados com incertezas politópicas variantes no tempo  $\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\alpha}(k))$  por definição  $\forall k \in \mathbb{Z}$  pertence ao conjunto convexo

$$\mathcal{A} := \left\{ \bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\alpha}(k) : \bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\alpha}(k)) = \sum_{i=1}^L \alpha_i(k)\mathbf{A}_i \right\}, \quad (2)$$

onde  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  denota o  $i$ -ésimo vértice do politopo convexo. O vetor de parâmetros incertos variantes no tempo  $\boldsymbol{\alpha}(k)$ , que descreve o politopo convexo, por definição  $\forall k \in \mathbb{Z}$  pertence ao simplex unitário

$$\Omega := \left\{ \boldsymbol{\alpha}(k) \in \mathbb{R}^L : \sum_{i=1}^L \alpha_i(k) = 1, \alpha_i(k) \geq 0 \right\}. \quad (3)$$

**Definição 1.** Em Daafouz and Bernussou (2001), a estabilidade poliquadrática do sistema (1) é verificada através de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros (FLDP),  $\bar{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\alpha}(k))$ , tal que as seguintes condições devem ser satisfeitas

- (1)  $\bar{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) = \mathbf{x}^T(k)\bar{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\alpha}(k))\mathbf{x}(k) > 0$
- (2)  $\bar{V}(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\alpha}(k+1)) - \bar{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) < 0$ ,

para  $\mathbf{x}(k) \neq \mathbf{0}$ , e  $\bar{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) = 0$  para  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ . A matriz de Lyapunov com incertezas politópicas variantes no tempo  $\bar{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\alpha}(k))$  pertence  $\forall k \in \mathbb{Z}$  ao conjunto convexo

$$\mathcal{P} := \left\{ \bar{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\alpha}(k)) : \bar{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\alpha}(k)) = \sum_{i=1}^L \alpha_i(k)\mathbf{P}_i \right\}, \quad (4)$$

onde  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^T \succ \mathbf{0}$  é a matriz de Lyapunov simétrica definida positiva pertencente ao  $i$ -ésimo vértice do politopo convexo.

**Comentário 1.** A estabilidade poliquadrática é assim chamada devido à FLDP ser quadrática com respeito à função de estados e depender em uma forma politópica do vetor de parâmetros incertos variantes no tempo (Daafouz and Bernussou, 2001).

De forma equivalente, a estabilidade poliquadrática pode ser verificada através do seguinte lema.

**Lema 1.** O sistema (1) é poliquadraticamente estável se existem matrizes simétricas definidas positivas  $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{S}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $\mathbf{G}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_i + \mathbf{G}_i^T - \mathbf{S}_i & \star \\ \mathbf{A}_i\mathbf{G}_i & \mathbf{S}_j \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, \quad (5)$$

$\forall i \in \{1, \dots, L\}$  e  $\forall j \in \{1, \dots, L\}$ . Em (5), a matriz de Lyapunov é dada por  $\mathbf{P}_i = \mathbf{S}_i^{-1}$ .

**Prova.** Ver De Oliveira et al. (1999).

Considere o seguinte sistema linear chaveado com incertezas politópicas variantes no tempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}(\sigma(k), \boldsymbol{\alpha}(k))\mathbf{x}(k), \quad (6)$$

onde  $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow I$  é a função de chaveamento arbitrária. A função de chaveamento indica qual modo estará ativo no

instante  $k$ , assumindo valores em  $I = \{1, \dots, N\}$  tal que  $N$  é o número de modos do sistema chaveado.

A matriz de estados chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo  $\hat{\mathbf{A}}(\sigma(k), \boldsymbol{\alpha}(k))$  é definida como

$$\hat{\mathbf{A}}(\sigma(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) = \sum_{j=1}^{n_\sigma} \alpha_{\sigma j}(k) \mathbf{A}_{\sigma j}, \quad (7)$$

onde  $\hat{\mathbf{A}}(\sigma(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) \in \{\bar{\mathbf{A}}(1, \boldsymbol{\alpha}(k)), \dots, \bar{\mathbf{A}}(N, \boldsymbol{\alpha}(k))\}$ ,  $\mathbf{A}_{\sigma j}$  denota o  $j$ -ésimo vértice do  $\sigma$ -ésimo modo e  $n_\sigma$  é o número de vértices do politopo convexo. O vetor de parâmetros incertos variantes no tempo  $\boldsymbol{\alpha}_\sigma(k)$  pertence  $\forall k \in \mathbb{Z}$  ao simplex unitário

$$\Omega_\sigma := \left\{ \boldsymbol{\alpha}(k) \in \mathbb{R}^{n_\sigma} : \sum_{j=1}^{n_\sigma} \alpha_{\sigma j}(k) = 1, \alpha_{\sigma j}(k) \geq 0 \right\}. \quad (8)$$

**Comentário 2** (Hetel et al., 2006). Uma vez que a combinação convexa de politopos convexos é também um politopo convexo, então (6) é equivalente a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \bar{\mathbf{A}}(i, \boldsymbol{\alpha}(k)) \mathbf{x}(k) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}(k), \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $\xi_i : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$  é a função indicadora, tal que  $\sum_{i=1}^N \xi_i(k) = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$ . A substituição da função de chaveamento pela função indicadora é justificada uma vez que, a cada instante  $k$ , apenas um modo é ativo. Com uma notação simplificada, (9) é equivalente a

$$\mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) \mathbf{x}(k). \quad (10)$$

Em Hetel et al. (2006), a estabilidade poliquadrática do sistema (10) é verificada através de uma FLCDP, tal que as seguintes condições devem ser satisfeitas

- (1)  $\hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) \mathbf{x}(k) > 0$
- (2)  $\hat{V}(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\alpha}(k+1)) - \hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) < 0,$

para  $\mathbf{x}(k) \neq \mathbf{0}$ , e  $\bar{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) = 0$  para  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ . Para as condições propostas em Hetel et al. (2006), segue que

$$\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) \mathbf{P}_{ij}, \quad (11)$$

onde  $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}^T \succ \mathbf{0}$  é a matriz de Lyapunov simétrica definida positiva pertencente ao  $i$ -ésimo modo e  $j$ -ésimo vértice do politopo convexo.

De forma equivalente, a estabilidade poliquadrática pode ser verificada através do seguinte lema.

Lema 2. (Hetel et al., 2006). O sistema (9) é poliquadraticamente estável se existem matrizes simétricas definidas positivas  $\mathbf{S}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{S}_{mv} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $\mathbf{G}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij} & \star \\ \mathbf{A}_{ij} \mathbf{G}_{ij} & \mathbf{S}_{mv} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, \quad (12)$$

$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall m \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, n_i\}$  e  $\forall v \in \{1, \dots, n_m\}$ . Em (12), a matriz de Lyapunov é dada por  $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{S}_{ij}^{-1}$ .

**Prova.** Ver Hetel et al. (2006).

## 2.2 Problema de Estabilização

Seja o seguinte sistema linear chaveado com incertezas politópicas variantes no tempo discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\beta}(k)) \mathbf{u}(k), \quad (13)$$

onde as matrizes de estado  $\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e de entrada  $\bar{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\beta}(k)) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  chaveadas com incertezas politópicas variantes no tempo são definidas como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) \mathbf{A}_{ij} \\ \hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\beta}(k)) &= \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^{n_i} \xi_i(k) \beta_{il}(k) \mathbf{B}_{il}, \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{B}_{il} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  são, respectivamente, o  $j$ -ésimo e  $l$ -ésimo vértices de dois politopos convexos pertencentes ao  $i$ -ésimo modo descritos pelos vetores de parâmetros incertos variantes no tempo  $\boldsymbol{\alpha}(k)$  e  $\boldsymbol{\beta}(k)$  pertencentes  $\forall k \in \mathbb{Z}$  aos simplex unitários

$$\begin{aligned} \Omega_i(\boldsymbol{\alpha}) &:= \left\{ \boldsymbol{\alpha}(k) \in \mathbb{R}^{n_i} : \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}(k) = 1, \alpha_{ij}(k) \geq 0 \right\} \\ \Omega_i(\boldsymbol{\beta}) &:= \left\{ \boldsymbol{\beta}(k) \in \mathbb{R}^{n_i} : \sum_{l=1}^{n_i} \beta_{il}(k) = 1, \beta_{il}(k) \geq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Supondo que o par  $(\hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)), \hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\beta}(k)))$  seja controlável, então é possível obter uma função de controle chaveada via realimentação de estados definida como

$$\mathbf{u}(k) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(k), \quad (16)$$

onde  $\mathbf{u} : \{0, 1\} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  é a função de controle chaveada e  $\mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$  é a matriz de ganhos de realimentação de estados. Através da função de controle chaveada (16), o sistema (13) é reescrito, após substituídas as definições de (14) em (13), conforme a seguir

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) \beta_{il}(k) \mathbf{H}_{ijl}(k) \mathbf{x}(k), \quad (17)$$

onde a matriz de estados em malha fechada é dada por  $\mathbf{H}_{ijl} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{il} \mathbf{K}_i$ . Em Hetel et al. (2006), a estabilidade poliquadrática do sistema (17) é verificada através de FLCDP, tal que

- (1)  $\hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) \mathbf{x}(k) > 0$
- (2)  $\hat{V}(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\tau}(k+1)) - \hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) < 0,$

para  $\mathbf{x}(k) \neq \mathbf{0}$ , e  $\bar{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) = 0$  para  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ . A matriz de Lyapunov chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo é dada por

$$\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) \beta_{il}(k) \mathbf{P}_{ijl}, \quad (18)$$

onde  $\mathbf{P}_{ijl} = \mathbf{P}_{ijl}^T \succ \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\tau}(k) = [\boldsymbol{\alpha}(k) \ \boldsymbol{\beta}(k)]$  é o vetor de parâmetros incertos variantes no tempo.

De forma equivalente, a estabilidade poliquadrática pode ser verificada através do seguinte lema.

Lema 3. (Hetel et al., 2006). O sistema (17) é poliquadraticamente estável se existem matrizes simétricas definidas positivas  $\mathbf{S}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $\mathbf{S}_{mv} \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$  e matrizes  $\mathbf{G}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_i + \mathbf{G}_i^T - \mathbf{S}_{ijl} & \star \\ \mathbf{A}_{ij} \mathbf{G}_i + \mathbf{B}_{il} \mathbf{R}_i & \mathbf{S}_{mvu} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, \quad (19)$$

$\forall i, m \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\forall j, l \in \{1, \dots, n_i\}$  e  $\forall v, u \in \{1, \dots, n_m\}$ . A matriz de ganhos de realimentação de estados é dada por

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{G}_i^{-1}. \quad (20)$$

**Prova.** Ver Hetel et al. (2006).

Antes de apresentar os resultados principais desse trabalho, é necessário apresentar a definição de sistemas positivos.

Lema 4. (Farina and Rinaldi, 2000; Silva et al., 2021). Um sistema dinâmico em malha fechada é definido positivo se para uma condição inicial  $\mathbf{x}(0) \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{u}(k) \geq \mathbf{0}$  implica que a trajetória correspondente  $\mathbf{x}(k) \geq \mathbf{0} \forall k \in \mathbb{Z}_+$ .

**Comentário 3.** Para um problema de estabilização, um sistema linear chaveado com incertezas politópicas variantes no tempo será positivo se para uma condição inicial  $\mathbf{x}(0) \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{u}(k) \geq \mathbf{0}$  a trajetória correspondente  $\mathbf{x}(k) \geq \mathbf{0} \forall k \in \mathbb{Z}_+$ . Esse resultado é obtido quando a matriz de estados em malha fechada possui todos elementos não negativos, ou seja,  $\mathbf{H}_{ijl} \geq \mathbf{0}$ .

### 3. RESULTADOS PRINCIPAIS

Considerando o seguinte sistema linear chaveado com incertezas politópicas variantes no tempo

$$\mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k))\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\beta}(k))\mathbf{u}(k). \quad (21)$$

Supondo que o par  $(\hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)), \hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\beta}(k)))$  seja controlável, então é possível obter uma função de controle chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo definida como

$$\mathbf{u}(k) = \sum_{i=1}^N \sum_{c=1}^{n_i} \xi_i(k) \gamma_c(k) \mathbf{K}_{ic} \mathbf{x}(k), \quad (22)$$

onde  $\mathbf{u} : \{0, 1\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  é a função de controle chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo. A matriz  $\mathbf{K}_{ic} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  é a matriz de ganhos de realimentação de estados pertence ao  $c$ -ésimo vértice do politopo convexo do  $i$ -ésimo modo descrito pelo vetor de parâmetros incertos variantes no tempo  $\boldsymbol{\gamma}(k)$  pertencente  $\forall k \in \mathbb{Z}$  ao simplex unitário

$$\Omega_i(\boldsymbol{\gamma}) := \left\{ \boldsymbol{\gamma}(k) \in \mathbb{R}^{n_i} : \sum_{c=1}^{n_i} \gamma_{ic}(k) = 1, \gamma_{ic}(k) \geq 0 \right\}. \quad (23)$$

Considerando que, além de garantir a estabilização poliquadrática e a positividade do sistema (21), a função de controle chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo (22) aloque os autovalores desejados em malha fechada em uma região circular com centro  $(\delta, 0)$  e raio  $r$ , como mostrado na Figura 1, tal que  $|\delta| + r \leq 1$ .

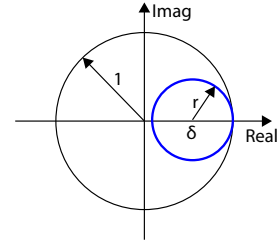


Figura 1. Região circular para alocação de autovalores.

A especificação de autovalores pode ser introduzida no sistema (21) por substituir a matriz de estados em malha fechada  $\mathbf{H}_{ijlc} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{il} \mathbf{K}_{ic}$  por  $\tilde{\mathbf{H}}_{ijlc} = (\mathbf{H}_{ijlc} - \delta)/r$  (Peres et al., 1994; Montagner et al., 2003).

Antes de enunciar o próximo lema é necessário apresentar mais algumas formulações. As condições para que o sistema (21) seja poliquadraticamente estável via função de controle chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo (22) são as seguintes

- (1)  $\hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) \mathbf{x}(k) > 0$
- (2)  $\hat{V}(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\eta}(k+1)) - \hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) < 0,$

para  $\mathbf{x}(k) \neq \mathbf{0}$ , e  $\hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = 0$  para  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ , onde  $\boldsymbol{\eta}(k) = [\boldsymbol{\alpha}(k) \ \boldsymbol{\beta}(k) \ \boldsymbol{\gamma}(k)]$  é o vetor de parâmetros incertos variantes no tempo.

A equação de estados em malha fechada é dada por

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \sum_{c=1}^{n_i} \xi_i(k) \eta_{ijlc}(k) \tilde{\mathbf{H}}_{ijlc}, \quad (24)$$

onde a matriz de estados chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo em malha fechada é dada por

$$\mathcal{H} = \hat{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \sum_{c=1}^{n_i} \xi_i(k) \eta_{ijlc}(k) \tilde{\mathbf{H}}_{ijlc}. \quad (25)$$

A matriz de Lyapunov chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo é dada por

$$\mathcal{P} = \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \sum_{c=1}^{n_i} \xi_i(k) \eta_{ijlc}(k) \mathbf{P}_{ijlc}, \quad (26)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_+ = \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\eta}(k+1)) = \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \sum_{c=1}^{n_i} \xi_i(k+1) \eta_{ijlc}(k+1) \mathbf{P}_{ijlc} = \\ \sum_{m=1}^N \sum_{v=1}^{n_m} \sum_{u=1}^{n_m} \sum_{r=1}^{n_m} \xi_m(k) \eta_{mvur}(k) \mathbf{P}_{mvur}. \end{aligned} \quad (27)$$

Assim, a função diferença ao longo da trajetória da FLCDP entre  $k+1$  e  $k$  é definida como

$$\hat{V}(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\eta}(k+1)) - \hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \left( \mathcal{H}^T \mathcal{P}_+ \mathcal{H} - \mathcal{P} \right) \mathbf{x}(k) < 0, \quad (28)$$

que é equivalente a

$$\mathcal{H}^T \mathcal{P}_+ \mathcal{H} - \mathcal{P} \prec \mathbf{0}. \quad (29)$$

Lema 5. O sistema (21) é poliquadraticamente estabilizável, positivo e com os autovalores alocados na região circular especificada via função de controle chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo (22) se existem matrizes simétricas definidas positivas  $\mathbf{S}_{ijlc} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{S}_{mvur} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e matrizes  $\mathbf{G}_{ic} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{Z}_{ic} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , tal que

$$\begin{bmatrix} r(\mathbf{G}_{ic} + \mathbf{G}_{ic}^T - \mathbf{S}_{ijlc}) & \star \\ \mathbf{A}_{ij}\mathbf{G}_{ic} + \mathbf{B}_{il}\mathbf{Z}_{ic} - \delta\mathbf{G}_{ic} & r\mathbf{S}_{mvur} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \quad (30a)$$

$$a_{ij(h_t)}g_{ic(h_t)} + \sum_{q=1}^p b_{il(h_q)}z_{ic(qt)} \geq 0, \quad (30b)$$

então a função de controle chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo (22) com  $\mathbf{K}_{ic} = \mathbf{Z}_{ic}\mathbf{G}_{ic}^{-1}$  estabiliza poliquadraticamente, garante a positividade e a alocação de autovalores na região circular especificada para o sistema (21),  $\forall i, m \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\forall j, l, c \in \{1, \dots, n_i\}$  e  $\forall v, u, r, \in \{1, \dots, n_m\}$ . Em (30b),  $\mathbf{A}_{ij} = [a_{ij(h_t)}]$ ,  $\mathbf{G}_{ic} = [g_{ic(h_t)}]$ ,  $\mathbf{B}_{il} = [b_{il(h_q)}]$  e  $\mathbf{Z}_{ic} = [z_{ic(qt)}]$ , em que  $\forall h, t \in \{1, \dots, n\}$  e  $\forall q \in \{1, \dots, p\}$ .

**Prova.** Para provar a suficiência de (30a), é assumido que essa condição é factível. A condição (30a) é obtida impondo que

$$\begin{bmatrix} r(\mathbf{G}_{ic} + \mathbf{G}_{ic}^T - \mathbf{S}_{ijlc}) & \star \\ (\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{il}\mathbf{K}_{ic} - \delta)\mathbf{G}_{ic} & r\mathbf{S}_{mvur} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, \quad (31)$$

Sendo assim, para tomar os mesmos procedimentos adotados por Hetel et al. (2006), são definidas as matrizes  $\check{\mathbf{A}}_{ijlc} = (\mathbf{A}_{ijlc} - \delta)/r$ ,  $\check{\mathbf{B}}_{il}\check{\mathbf{K}}_{ic} = (\mathbf{B}_{il}\mathbf{K}_{ic} - \delta)/r$  e  $\check{\mathbf{K}}_{ic} = \check{\mathbf{Z}}_{ic}\mathbf{G}_{ic}^{-1}$ . Dessa forma, (30a) e (30b) são reescritas como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ic} + \mathbf{G}_{ic}^T - \mathbf{S}_{ijlc} & \star \\ \check{\mathbf{A}}_{ij}\mathbf{G}_{ic} + \check{\mathbf{B}}_{il}\check{\mathbf{Z}}_{ic} & \mathbf{S}_{mvur} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \quad (32a)$$

$$\check{a}_{ij(h_t)}g_{ic(h_t)} + \sum_{q=1}^p \check{b}_{il(h_q)}\check{z}_{ic(qt)} \geq 0. \quad (32b)$$

Considerando que

$$\mathbf{G}_{ic} + \mathbf{G}_{ic}^T - \mathbf{S}_{ijlc} \succ \mathbf{0}. \quad (33)$$

Portanto,  $\mathbf{G}_{ic}$  é não singular e como  $\mathbf{S}_{ijlc} \succ \mathbf{0}$ , então

$$(\mathbf{S}_{ijlc} - \mathbf{G}_{ic})^T \mathbf{S}_{ijlc}^{-1} (\mathbf{S}_{ijlc} - \mathbf{G}_{ic}) \succeq \mathbf{0}, \quad (34)$$

que é equivalente a

$$\mathbf{G}_{ic}^T \mathbf{S}_{ijlc}^{-1} \mathbf{G}_{ic} \succeq (\mathbf{G}_{ic} + \mathbf{G}_{ic}^T - \mathbf{S}_{ijlc}). \quad (35)$$

Portanto, (30a) implica que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ic}^T \mathbf{S}_{ijlc}^{-1} \mathbf{G}_{ic} & \star \\ \check{\mathbf{A}}_{ij}\mathbf{G}_{ic} + \check{\mathbf{B}}_{il}\check{\mathbf{Z}}_{ic} & \mathbf{S}_{mvur} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, \quad (36)$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ic}^T \mathbf{S}_{ijlc}^{-1} \mathbf{G}_{ic} & \star \\ \check{\mathbf{H}}_{ijlc}\mathbf{G}_{ic} & \mathbf{S}_{mvur} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}. \quad (37)$$

Pré e pós multiplicando (37) pela transformação de congruência  $\text{diag}(\mathbf{G}_{ic}^{-T} \mathbf{S}_{mvur}^{-1})$  e  $\text{diag}(\mathbf{G}_{ic}^{-1} \mathbf{S}_{mvur}^{-T})$ , é obtido que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{ijlc}^{-1} & \star \\ \mathbf{S}_{mvur}\check{\mathbf{H}}_{ijlc} & \mathbf{S}_{mvur}^{-1} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}. \quad (38)$$

Fazendo  $\mathbf{P}_{ijlc} = \mathbf{S}_{ijlc}^{-1}$ , (38) resulta em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ijlc} & \star \\ \mathbf{P}_{mvur}\check{\mathbf{H}}_{ijlc} & \mathbf{P}_{mvur} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}, \quad (39)$$

$\forall i, m \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\forall j, l, c \in \{1, \dots, n_i\}$  e  $\forall v, u, r, \in \{1, \dots, n_m\}$ . Multiplicando todos os blocos de matrizes em (39) por seus respectivos vetores de parâmetros incertos variantes no tempo e por suas funções indicadoras, e após realizar os somatórios, é obtido que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & \star \\ \mathcal{P}_+\mathcal{H} & \mathcal{P}_+ \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}. \quad (40)$$

Aplicando o complemento de Schur em (40), é obtido que

$$\mathcal{H}^T \mathcal{P}_+ \mathcal{H} - \mathcal{P} \prec \mathbf{0}, \quad (41)$$

que é a mesma desigualdade matricial apresentada em (29), implicando na existência da função de Lyapunov chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo.

Para provar a necessidade, conforme apresentado em Hetel et al. (2006), é assumido que a função diferença ao longo da trajetória da FLCDP entre  $k+1$  e  $k$  satisfaça (28). Isso implica que (41) é satisfeito e, portanto, é obtido que

$$\check{\mathbf{H}}_{ijlc}^T \mathbf{P}_{mvur} \check{\mathbf{H}}_{ijlc} - \mathbf{P}_{ijlc} \prec \mathbf{0}, \quad (42)$$

$\forall i, m \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\forall j, l, c \in \{1, \dots, n_i\}$  e  $\forall v, u, r, \in \{1, \dots, n_m\}$ . Um procedimento similar ao proposto por Daafouz and Bernussou (2001) pode ser realizado para o fim da prova. Para que o sistema (21) seja positivo é necessário que (30b) seja satisfeito. A condição (30b) garante que todos os elementos de  $\check{\mathbf{H}}_{ijlc}$  seja não negativos, ou seja,  $\check{\mathbf{H}}_{ijlc} \geq \mathbf{0}$ .

**Comentário 4:** Para um caso particular em que os vetores de parâmetros incertos variantes no tempo são iguais, ou seja,  $\alpha(k) = \beta(k) = \gamma(k)$ , as condições do Lema 5 são reescritas como

$$\begin{bmatrix} r(\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{G}_{ij}^T - \mathbf{S}_{ij}) & \star \\ \mathbf{A}_{ij}\mathbf{G}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{Z}_{ij} - \delta\mathbf{G}_{ij} & r\mathbf{S}_{mv} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \quad (43a)$$

$$a_{ij(h_t)}g_{ij(h_t)} + \sum_{q=1}^p b_{ij(h_q)}z_{ij(qt)} \geq 0, \quad (43b)$$

então a função de controle chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo (22) com  $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{Z}_{ij}\mathbf{G}_{ij}^{-1}$  estabiliza poliquadraticamente, garante a positividade e a alocação de autovalores na região circular especificada para o sistema (21),  $\forall i, m \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n_i\}$  e  $\forall v \in \{1, \dots, n_m\}$ . Em (43b),  $\mathbf{A}_{ij} = [a_{ij(h_t)}]$ ,  $\mathbf{G}_{ij} = [g_{ij(h_t)}]$ ,  $\mathbf{B}_{ij} = [b_{ij(h_q)}]$  e  $\mathbf{Z}_{ij} = [z_{ij(qt)}]$ , em que  $\forall h, t \in \{1, \dots, n\}$  e  $\forall q \in \{1, \dots, p\}$ .

#### 4. EXEMPLOS COMPUTACIONAIS

Para certificar a eficácia das condições propostas para solução do problema de estabilização poliquadrática para a classe de sistemas tratada nesse trabalho, foram empregados exemplos acadêmicos retirados da literatura. As condições propostas na forma de LMIs foram implementadas e solucionadas em MATLAB (R2016a) através do *parser* YALMIP (Lofberg, 2004) e *solver* SEDUMI 1.3 (Sturm et al., 2006).

#### 4.1 Sistema 1

O sistema 1 é inspirado em Liu et al. (2017). Esse sistema dinâmico foi adaptado para obtenção de um sistema linear chaveado com dois modos, em que cada modo é descrito por um polítopo convexo contendo dois vértices. As matrizes de cada vértice foram definidas de forma arbitrária. Seja o seguinte sistema linear chaveado

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} -0,3 & 0,5 \\ 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} -0,8 & 0,9 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{11} &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{12} &= \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{21} &= \begin{bmatrix} -0,2 & -0,3 \\ -0,4 & -0,4 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{22} &= \begin{bmatrix} -0,5 & 0,4 \\ -0,9 & -0,9 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (44)$$

Neste exemplo, o sistema (44) é assintoticamente estável e não positivo. Logo, a função de controle chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo, caso satisfeitas as condições propostas (30a) e (30b), deve estabilizar o sistema em malha fechada, garantir a positividade e a alocação dos autovalores na região circular especificada, com função de chaveamento arbitrária e incertezas politópicas variantes no tempo. A região circular foi parametrizada com centro (0, 0) e raio  $r = 0,5$ .

Com respeito às condições propostas, (30a) e (30b) do *Lema 5*, para a estabilização poliquadrática e positividade do sistema (44), os vetores de parâmetros incertos variantes no tempo foram definidos como  $\alpha(k) = \beta(k) = \gamma(k)$ <sup>1</sup>. Na Tabela 1 são apresentados os números de variáveis escalares  $N_V$  e de linhas  $N_L$  de LMIs para o *Lema 3* e *Lema 5* proposto nesse trabalho. É possível notar que, em termos dos resultados apresentados na Tabela 1, a única diferença entre os dois Lemas é com respeito ao número de linhas, uma vez que o *Lema 5*, além da estabilização, garante a alocação de autovalores em uma região circular e a positividade do sistema. Esse resultado é coerente pois, embora seja baseado no *Lema 3*, o *Lema 5* não tem o objetivo de diminuir a complexidade do *Lema 3*.

Tabela 1. Número de variáveis escalares  $N_V$  e de linhas  $N_L$  de LMIs para o exemplo 1.

	<i>Lema 3</i>	<i>Lema 5</i>
$N_V$	36	36
$N_L$	73	89

Após a soluções do conjunto de LMIs em (30a) e (30b), foram obtidas as seguintes matrizes de ganhos de realimentação de estados

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix} 10,1583 & 0,1537 \\ -11,8298 & -1,3719 \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_{12} &= \begin{bmatrix} 2,2850 & -1,4794 \\ -1,1963 & 0,2187 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{21} &= \begin{bmatrix} 0,9867 & 0,3313 \\ -0,0185 & -0,1219 \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_{22} &= \begin{bmatrix} 0,4262 & 0,1961 \\ 0,1008 & 0,6800 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (45)$$

<sup>1</sup>  $\alpha(k)$  foi gerado utilizando a função `rand()` do MATLAB, com a seguinte restrição  $\alpha_{12}(k) = 1 - \alpha_{11}(k)$  e  $\alpha_{22}(k) = 1 - \alpha_{21}(k)$ .

tal que os autovalores da matriz de estados em malha fechada  $\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{K}_{ij}$  são iguais a:  $\{0,0099, 0,2719\}$  para a matriz  $\mathbf{H}_{11}$ ;  $\{-0,0003, 0,1885\}$  para a matriz  $\mathbf{H}_{12}$ ;  $\{0,4229, 0,0015\}$  para a matriz  $\mathbf{H}_{21}$ ;  $\{0,2713, 0,0674\}$  para a matriz  $\mathbf{H}_{22}$ .

A avaliação da função de controle chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo foi realizada considerando a condição inicial igual a  $\mathbf{x}(0) = [10 \ 20]^T$ . A evolução temporal da função de chaveamento arbitrária é mostrada na Figura 2. A evolução temporal da função de estados é mostrado na Figura 3, em que é possível notar que o sistema linear chaveado com incertezas politópicas variantes no tempo é positivo, ou seja,  $\mathbf{x}(k) \geq \mathbf{0} \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e  $\forall \boldsymbol{\eta}(k)$ . Com respeito à estabilidade poliquadrática, na Figura 4 é mostrada a evolução temporal da FLCDP, em que é possível notar que  $\hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) > 0$  e  $\hat{V}(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\eta}(k+1)) - \hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) < 0$  para  $\mathbf{x}(k) \neq \mathbf{0}$ , e  $\hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = 0$  para  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \boldsymbol{\eta}(k)$ . Na Figura 5 são apresentados os autovalores da matriz de estados chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo  $\hat{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k))$ , sendo possível notar que os mesmos permanecem alocados na região circular parametrizada  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \boldsymbol{\eta}(k)$ .

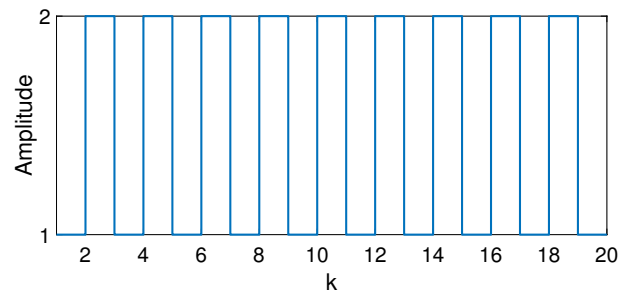


Figura 2. Evolução temporal da função de chaveamento.

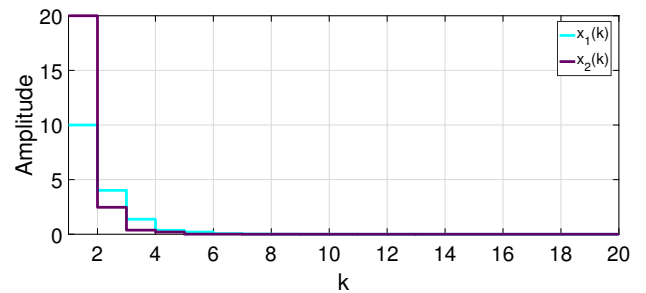


Figura 3. Evolução temporal da função de estados.

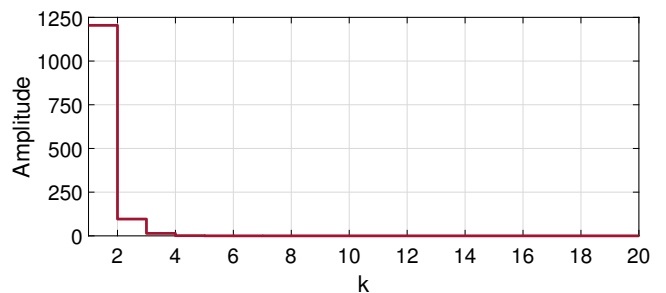


Figura 4. Evolução temporal da FLCDP.

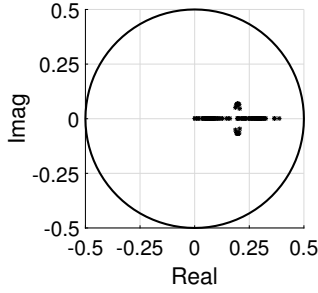


Figura 5. Autovalores de  $\hat{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k))$ .

#### 4.2 Sistema 2

O sistema 2 é um sistema linear chaveado com dois modos, em que cada modo é descrito por um politopo convexo contendo dois vértices. As matrizes de cada vértice foram definidas de forma arbitrária. Seja o seguinte o sistema linear chaveado

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0,700 & 0,200 & 0,600 \\ 0,300 & 0,400 & 0,200 \\ 0,201 & 0,100 & -0,100 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,200 & 0,400 \\ 0,300 & 0,200 & 0,200 \\ 0,199 & 0,100 & -0,300 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0,800 & 0,200 & 0,700 \\ 0,300 & 0,500 & 0,200 \\ 0,201 & 0,100 & -0,100 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,200 & 0,300 \\ 0,300 & 0,200 & 0,200 \\ 0,198 & 0,100 & -0,100 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 2,1 \\ 1 \\ 1,1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 1,9 \\ 1 \\ 0,9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 2,1 \\ 1 \\ 1,1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 1,9 \\ 1 \\ 0,9 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Neste exemplo, o sistema (46) é não positivo e instável. Logo, a função de controle chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo, caso satisfeitas as condições propostas (30a) e (30b), deve estabilizar poliquadraticamente o sistema (46) em malha fechada, garantir a positividade e a alocação dos autovalores na região circular especificada, com função de chaveamento arbitrária e incertezas politópicas variantes no tempo. A região circular foi parametrizada com centro  $(0, 0)$  e raio  $r = 0,45$ .

Com respeito às condições propostas, (30a) e (30b) do *Lema 5*, para a estabilização poliquadrática e positividade do sistema (44), os vetores de parâmetros incertos variantes no tempo foram definidos como  $\boldsymbol{\alpha}(k) = \boldsymbol{\beta}(k) = \boldsymbol{\gamma}(k)$ <sup>2</sup>. Na Tabela 2 são apresentados os números de variáveis escalares  $N_V$  e de linhas  $N_L$  de LMIs para o *Lema 3* e *Lema 5* proposto nesse trabalho. É possível notar que, assim como para o exemplo 1, em termos dos resultados apresentados na Tabela 2, a única diferença entre os dois Lemas é com respeito ao número de linhas, uma vez que o *Lema 5*, além da estabilização, garante a alocação de

<sup>2</sup>  $\boldsymbol{\alpha}(k)$  foi gerado utilizando a função `rand()` do MATLAB, com a seguinte restrição  $\alpha_{12}(k) = 1 - \alpha_{11}(k)$  e  $\alpha_{22}(k) = 1 - \alpha_{21}(k)$ .

autovalores e a positividade do sistema. Assim como para o exemplo 1, esse resultado é coerente pois, embora seja baseado no *Lema 3*, o *Lema 5* não tem o objetivo de diminuir a complexidade do *Lema 3*.

Tabela 2. Número de variáveis escalares  $N_V$  e de linhas  $N_L$  de LMIs para o exemplo 2.

	<i>Lema 3</i>	<i>Lema 5</i>
$N_V$	60	60
$N_L$	109	145

Após a soluções do conjunto de LMIs em (30a) e (30b), foram obtidas as seguintes matrizes de ganhos de realimentação de estados

$$\mathbf{K}_{11} = [-0,1794 \quad -0,0881 \quad 0,0999]$$

$$\mathbf{K}_{12} = [-0,2129 \quad -0,0997 \quad 0,3463]$$

$$\mathbf{K}_{21} = [-0,1826 \quad -0,0909 \quad 0,0913]$$

$$\mathbf{K}_{22} = [-0,2109 \quad -0,0988 \quad 0,1178],$$

tal que os autovalores da matriz de estados em malha  $\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{K}_{ij}$  são iguais a:  $\{0,3753, 0,2689, 0,0007\}$  para a matriz  $\mathbf{H}_{11}$ ;  $\{0,2141, 0,0296, -0,0362\}$  para a matriz  $\mathbf{H}_{12}$ ;  $\{0,4462, 0,3799, 0,0001\}$  para a matriz  $\mathbf{H}_{21}$ ;  $\{0,1892, 0,0408, -0,0235\}$  para a matriz  $\mathbf{H}_{22}$ .

A avaliação da função de controle chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo foi realizada considerando a condição inicial igual a  $\mathbf{x}(0) = [8 \ 8 \ 8]^T$ . A evolução temporal da função de chaveamento arbitrária é mostrada na Figura 2. A evolução temporal da função de estados é mostrada na Figura 6, em que é possível notar que o sistema linear chaveado com incertezas politópicas variantes no tempo é positivo, ou seja,  $\mathbf{x}(k) \geq \mathbf{0} \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$  e  $\forall \boldsymbol{\eta}(k)$ . Com respeito à estabilidade poliquadrática, na Figura 7 é mostrada a evolução temporal da FLCDP, em que é possível notar que  $\hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) > 0$  e  $\hat{V}(\mathbf{x}(k+1), \boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\eta}(k+1)) - \hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) < 0$  para  $\mathbf{x}(k) \neq \mathbf{0}$ , e  $\hat{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = 0$  para  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \boldsymbol{\eta}(k)$ . Na Figura 8 são apresentados os autovalores da matriz de estados chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo  $\hat{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k))$ , sendo possível notar que os mesmos permanecem alocados na região circular parametrizada  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \boldsymbol{\eta}(k)$ .

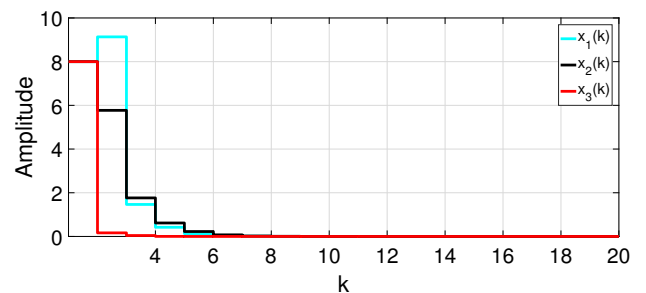


Figura 6. Evolução temporal da função de estados.

## 5. CONCLUSÃO

Esse trabalho tem como objetivo apresentar condições via FLCDP para a estabilização poliquadrática de sistemas



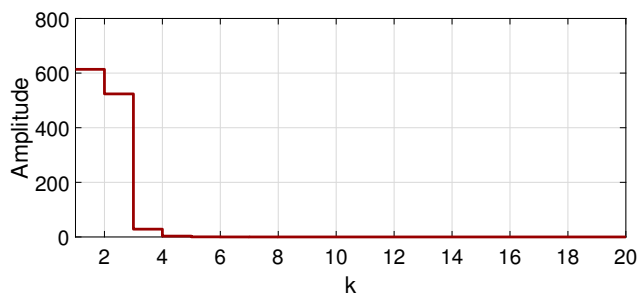


Figura 7. Evolução temporal da FLCDP.

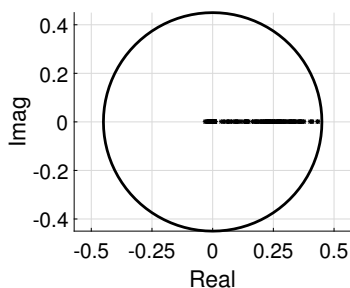


Figura 8. Autovalores de  $\hat{H}(\xi(k), \eta(k))$ .

chaveados com incertezas politópicas variantes no tempo. As incertezas politópicas variantes no tempo foram consideradas na matriz de estados chaveada, matriz de entrada chaveada e na matriz chaveada de ganhos de realimentação de estados. Foi utilizada uma função de chaveamento arbitrária para avaliar a eficácia da síntese de controle para estabilizar poliquadraticamente, garantir a positividade e a alocação de autovalores em uma região circular, centrada no eixo real, do plano complexo. Os exemplos computacionais comprovaram a eficácia das condições propostas, avaliadas em dois sistemas exemplos que são estável/não positivo e instável/não positivo. Para trabalhos futuros, uma possível nova contribuição é estender a síntese de controle considerando a alocação de autovalores em múltiplas regiões parametrizadas em função de critério de desempenho.

#### REFERÊNCIAS

Aleksandrov, A.Y. and Mason, O. (2014). Diagonal lyapunov–krasovskii functionals for discrete-time positive systems with delay. *Systems & Control Letters*, 63, 63–67.

Daafouz, J., Riedinger, P., and Iung, C. (2003). Observer-based switched control design with pole placement for discrete-time switched systems. *International Journal of Hybrid Systems*, 3(2), 263–282.

Daafouz, J. and Bernussou, J. (2001). Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5), 355–359.

De Oliveira, M.C., Bernussou, J., and Geromel, J.C. (1999). A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4), 261–265.

Deaecto, G.S. and Geromel, J.C. (2017).  $H_2$  state feedback control design of positive switched linear systems. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 3081–3086.

DeCarlo, R.A., Branicky, M.S., Pettersson, S., and Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7), 1069–1082.

Farina, L. and Rinaldi, S. (2000). *Positive linear systems: theory and applications*, volume 50. John Wiley & Sons.

Gans, N.R. and Hutchinson, S.A. (2007). Stable visual servoing through hybrid switched-system control. *IEEE Transactions on Robotics*, 23(3), 530–540.

Hetel, L., Daafouz, J., and Iung, C. (2006). Robust stability analysis and control design for switched uncertain polytopic systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(9), 166–171.

Jin, C.L., Wang, R., and Wang, Q.G. (2020). Stabilization of switched systems with time-dependent switching signal. *Journal of the Franklin Institute*, 357(18), 13552–13568.

Kaczorek, T. (2012). *Positive 1D and 2D systems*. Springer Science & Business Media.

Liberzon, D. (2003). *Switching in systems and control*, volume 190. Springer.

Liberzon, D. and Morse, A.S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5), 59–70.

Liu, J., Zhang, K., Pang, G., and Wei, H. (2015). Robust stabilisation for constrained discrete-time switched positive linear systems with uncertainties. *IET Control Theory & Applications*, 9(17), 2598–2605.

Liu, T., Wu, B., Wang, Y.E., and Liu, L. (2017). New stabilization results for discrete-time positive switched systems with forward mode-dependent average dwell time. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 39(2), 224–229.

Lofberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 284–289. IEEE.

Montagner, V.F., Leite, V.J., and Peres, P.L. (2003). Discrete-time switched systems: Pole location and structural constrained control. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control*, volume 6, 6242–6247. IEEE.

Peres, P., Umez, C., and Guaitoli, G. (1994). Robust mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control of uncertain discrete-time systems with regional pole constraints. In *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, 565–570. IEEE.

Silva, F.A., Pessim, P.S., and Lacerda, M.J. (2021). Controle de sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo: uma abordagem usando função de lyapunov aumentada. In *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente-SBAI*, volume 1.

Sturm, J., Polik, I., and Terlaky, T. (2006). Sedumi 1.3. URL <http://sedumi.ie.lehigh.edu>, 10, 126.

Tong, Y., Shi, P., Wang, Y., and Huang, B. (2021). Discretized quasi-time-dependent control for asynchronously switched systems with dynamic dwell-time. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(15), 7219–7238.

Zhao, Y. and Zhu, Q. (2021). Stabilization by delay feedback control for highly nonlinear switched stochastic systems with time delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(8), 3070–3089.