

Estabilidade Regional de Sistemas Lineares de Tempo Discreto sob Saturação de Controle Assimétrica ^{*}

Leonardo Cabral ^{*} Giorgio Valmorbida ^{**}
João Manoel Gomes da Silva Jr. ^{*}

^{*} Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica,
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS
(e-mail: lcabral, jmgomes@ufrgs.br).

^{**} Laboratoire des Signaux et Systèmes, CentraleSupélec, CNRS,
Université Paris-Saclay
(e-mail: giorgio.valmorbida@l2s.centralesupelec.fr)

Abstract: This work addresses the problem of regional stability analysis of discrete-time linear systems subject to asymmetric control saturation. Conditions to assess the exponential stability of the origin using piecewise quadratic functions as Lyapunov candidates are proposed. Estimates of the region of attraction of the origin are obtained as level sets of those functions and additional conditions to obtain better estimates considering some size criteria are discussed. A numerical example shows the applicability of the proposed method.

Resumo: Este trabalho aborda o problema de análise de estabilidade regional de sistemas lineares de tempo discreto sujeitos à saturação de controle assimétrica. Condições para certificar a estabilidade exponencial da origem utilizando funções quadráticas por partes como candidatas de Lyapunov são propostas. Estimativas da região de atração da origem são obtidas como superfícies de nível dessas funções e condições adicionais para obter melhores estimativas segundo critérios de tamanho são discutidas. Um exemplo numérico demonstra a aplicabilidade do método proposto.

Keywords: Regional stability analysis; Asymmetric saturation; Lyapunov methods

Palavras-chaves: Análise de estabilidade regional; Saturação assimétrica; Métodos de Lyapunov

1. INTRODUÇÃO

Todo sistema físico de controle está sujeito à saturação de seus atuadores. Este fato acarreta diversos desafios, visto que a presença da saturação pode implicar em perda de performance ou, até mesmo, na ocorrência de um comportamento instável (Hu and Lin, 2001; Tarbouriech et al., 2011; Zaccarian and Teel, 2011). Neste contexto, a análise da estabilidade regional de sistemas lineares sujeitos à saturação de entrada é importante, particularmente quando a dinâmica em malha aberta do sistema é exponencialmente instável pois, nesse caso, a estabilidade do sistema em malha fechada pode ser garantida apenas localmente (Tarbouriech et al., 2011). Neste caso, dependendo das condições iniciais, podem ser geradas trajetórias que divergem ou tendem a um ciclo limite. Visto que tais comportamentos são indesejados, o conhecimento da Região de Atração da Origem (RAO) se torna importante. Entretanto, a tarefa de computar com exatidão a RAO de um sistema não linear é complexa. Mesmo para o caso aparentemente simples de sistemas lineares sujeitos

à saturação, o tratamento direto usando desigualdades de Lyapunov é bastante difícil (Tarbouriech et al., 2011). Por isso, as técnicas disponíveis na literatura buscam computar uma estimativa da RAO, comumente representadas por superfícies de nível de funções de Lyapunov que certificam a estabilidade local da origem do sistema.

Para sistemas sujeitos à saturação simétrica, *i.e.*, em que os limites de saturação superior e inferior são iguais em magnitude, uma vasta coleção de técnicas está documentada em (Tarbouriech et al., 2011). Para o caso de saturação assimétrica, uma estratégia consiste em considerar uma saturação simétrica correspondente ao pior caso, ou seja, com o menor limite de saturação em magnitude, e utilizar as metodologias disponíveis para o caso simétrico. Entretanto, esta abordagem pode levar à soluções bastante conservadoras em termos de estimativas da RAO. Dentre os trabalhos que abordam saturação assimétrica, pode-se mencionar (Benzaouia and Burgat, 1988; Castelan et al., 1996), que tratam o problema de síntese de uma realimentação de estados que implica na invariância positiva da região de linearidade do sistema em malha fechada. Em (Benhayoun et al., 2013) um método para computar domínios de invariância quadráticos foi proposto baseado em transformações de limites assimétricos de saturação pela adição de um termo de *bias* na lei de controle. Para

^{*} Este trabalho foi financiado parcialmente pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Finance Code 001 e pela ANR (França), projeto HANDY, N^o ANR-18-CE40-0010.

sistemas de tempo contínuo, um método para computar regiões de estabilidade assimétricas foi proposto por Li and Lin (2018). Tal método considera uma partição do espaço de estados proposta por Yuan and Wu (2015) e funções quadráticas por partes obtidas a partir de não linearidades zona morta, como proposto em (Dai et al., 2009). Para sistemas de tempo discreto, Groff et al. (2019a) propuseram recentemente condições convexas para certificar a estabilidade exponencial regional da origem em um domínio quadrático por partes. Para isso, uma representação exata do sistema sob saturação assimétrica é construída a partir da divisão do espaço de estados por hiperplanos, onde a não linearidade saturação é escrita em cada região resultante em termos de não linearidades zona morta.

Neste trabalho, o problema de análise de estabilidade regional de sistemas lineares sujeitos à saturação é tratado utilizando uma representação do sistema em malha fechada baseada em funções rampa (Groff et al., 2019b). Funções quadráticas por partes são consideradas como candidatas de Lyapunov e condições para certificar a estabilidade exponencial regional da origem são derivadas. Superfícies de nível (i.e. conjuntos definidos pelas curvas de nível) destas funções são utilizadas como estimativas da RAO e condições adicionais para otimizar estas estimativas são discutidas. Devido a forma que a representação proposta em (Groff et al., 2019b) codifica a dinâmica do sistema e as regiões de saturação, as condições obtidas neste trabalho não demandam uma análise de alcançabilidade *a priori* para detectar e desconsiderar transições impossíveis entre regiões do espaço de estados. Esta é a principal diferença entre os resultados aqui apresentados e outras técnicas disponíveis na literatura, como em (Groff et al., 2019a).

O artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 define o problema de análise de estabilidade regional para o caso de sistemas lineares sujeitos à saturação assimétrica. A Seção 3 apresenta como tais sistemas podem ser representados em termos de funções rampa vetoriais enquanto a Seção 4 apresenta propriedades da função rampa e deriva condições suficientes para garantir a não negatividade regional de funções quadráticas por partes. A Seção 5 utiliza os resultados anteriores para derivar condições suficientes para certificar a estabilidade local da origem de um sistema linear sob saturação assimétrica e estimar a RAO como superfícies de nível de funções de Lyapunov quadráticas por partes. Condições adicionais são discutidas para obter melhores estimativas da RAO segundo critérios de tamanho. A Seção 6 aplica o método proposto em um exemplo numérico, comparando os resultados obtidos com os apresentados na literatura, enquanto a Seção 7 apresenta os comentários finais.

Notação: Para um vetor $v \in \mathbb{R}^m$, $v_{(i)}$ denota seu i -ésimo elemento, $v \succeq 0$ denota que $v_{(i)} \geq 0, \forall i = 1, \dots, m$. Para uma matriz $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $M_{(i,j)}$ denota o elemento na posição (i, j) e $M_{(i,:)}$ denota o vetor linha igual à i -ésima linha da matriz M . Se $M = M^\top$, então \star representa elementos transpostos, por simplicidade de notação. $\text{He}(M) \triangleq M + M^\top$. O conjunto das matrizes diagonais de dimensão $n \times n$ é representada por \mathbb{D}^n . As funções $\text{sat} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ e $\text{sn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representam, respectivamente, a saturação assimétrica e a função sinal.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema de tempo discreto, linear, invariante no tempo e sujeito à saturação de entrada (potencialmente) assimétrica descrito por

$$x[k+1] = Ax[k] + B \text{sat}(u[k], \underline{\mu}, \bar{\mu}), \quad (1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ são as matrizes de dinâmica e entrada, respectivamente, e $\text{sat} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ é a função saturação, definida elemento a elemento como

$$\text{sat}(v, \underline{\mu}, \bar{\mu}) = \begin{cases} -\underline{\mu}_{(i)} & \text{se } v_{(i)} < -\underline{\mu}_{(i)} \\ v_{(i)} & \text{se } -\underline{\mu}_{(i)} \leq v_{(i)} \leq \bar{\mu}_{(i)} \\ \bar{\mu}_{(i)} & \text{se } v_{(i)} > \bar{\mu}_{(i)}, \quad i = 1, \dots, q \end{cases}$$

para vetores não negativos elemento a elemento $\underline{\mu} \succeq 0 \in \mathbb{R}^q$ e $\bar{\mu} \succeq 0 \in \mathbb{R}^q$ que representam os limites de saturação inferior e superior, respectivamente. Note que o caso particular $\underline{\mu} = \bar{\mu}$ representa a saturação simétrica enquanto o caso geral $\underline{\mu} \neq \bar{\mu}$ corresponde à saturação assimétrica.

Assuma que o sistema em malha aberta (1) seja controlado por uma lei de controle do tipo realimentação estática de estados descrita por

$$u[k] = Kx[k], \quad (2)$$

em que $K \in \mathbb{R}^{q \times n}$ representa a matriz de ganhos, computada de forma a estabilizar a origem do sistema, ou seja, torná-la exponencialmente estável. Assim, a dinâmica do sistema em malha fechada (1)-(2) pode ser descrita como

$$x[k+1] = Ax[k] + B \text{sat}(Kx[k], \underline{\mu}, \bar{\mu}). \quad (3)$$

A não linearidade saturação presente no sistema em malha fechada (3) pode produzir comportamentos indesejados, tais como a ocorrência de trajetórias divergentes e/ou de ciclos limite. Assim sendo, muitas vezes a estabilidade global da origem não pode ser garantida. Em particular, se o sistema em malha aberta (1) possuir polos fora do círculo unitário (i.e. a matriz A não for *Schur* estável), então existirão condições iniciais para as quais as trajetórias divergirão. Portanto, é necessário definir o conceito de Região de Atração da Origem (RAO).

Definição 2.1. A RAO \mathcal{R}_A do sistema em malha fechada (3) é o conjunto de todas as condições iniciais x_0 tais que a trajetória do sistema $\zeta(k, x_0)$ tenda a zero quando k tender ao infinito, ou seja,

$$\mathcal{R}_A = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k, x_0) = 0 \right\}.$$

Entretanto, a caracterização analítica exata da RAO é uma tarefa complexa e, em geral, impossível. Assim sendo, comumente computa-se uma estimativa \mathcal{R} da RAO, definida a seguir.

Definição 2.2. Uma estimativa da RAO do sistema em malha fechada (3) é qualquer conjunto \mathcal{R} tal que

$$\begin{aligned} 0 &\in \mathcal{R}, \\ \mathcal{R} &\subseteq \mathcal{R}_A, \end{aligned}$$

ou seja, que inclua a origem e esteja contida em \mathcal{R}_A .

As estimativas \mathcal{R} da RAO são conjuntos em que a convergência das trajetórias para a origem é assegurada e, dessa forma, podem ser compreendidas como regiões do espaço

de estados de operação segura do sistema em questão. Assim sendo, é de interesse computar os maiores conjuntos \mathcal{R} , de acordo com algum critério de tamanho.

3. REPRESENTAÇÃO COM FUNÇÕES RAMPA

Nesta seção será apresentada uma metodologia para representação do sistema em malha fechada (3) utilizando funções rampa, baseada em (Groff et al., 2019b).

Considere a função rampa vetorial $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida elemento a elemento a partir da função rampa escalar $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi_{(i)}(v) = r(v_{(i)}) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_{(i)} < 0 \\ v_{(i)} & \text{se } v_{(i)} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (4)$$

A partir da definição da função rampa vetorial (4), o seguinte Lema pode ser enunciado.

Lema 1. O sistema em malha fechada (3) pode ser equivalentemente escrito em termos da função rampa vetorial ϕ definida em (4) como

$$\begin{aligned} x[k+1] &= F_1 x[k] + F_2 \phi(y(x[k])) \\ y(x[k]) &= F_3 x[k] + f_4, \end{aligned} \quad (5)$$

onde as matrizes $F_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_2 \in \mathbb{R}^{n \times 2q}$, $F_3 \in \mathbb{R}^{2q \times n}$ e o vetor $f_4 \in \mathbb{R}^{2q}$ são definidos como

$$\begin{aligned} F_1 &= A + BK, \quad F_2 = B[-I \ I], \\ F_3 &= \begin{bmatrix} K \\ -K \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f_4 = \begin{bmatrix} -\bar{\mu} \\ -\underline{\mu} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Prova. Note que o sistema (5) pode ser escrito como

$$x[k+1] = Ax[k] + Bv[k],$$

onde o vetor $v[k] \in \mathbb{R}^q$ é definido como

$$\begin{aligned} v[k] &\triangleq Kx[k] + [-I \ I] \phi \left(\begin{bmatrix} K \\ -K \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} -\bar{\mu} \\ -\underline{\mu} \end{bmatrix} \right) \\ &= Kx[k] - \phi(Kx[k] - \bar{\mu}) + \phi(-Kx[k] - \underline{\mu}). \end{aligned}$$

Pela definição da função rampa vetorial (4), o i -ésimo elemento de $v[k]$ pode ser escrito como

$$v_{(i)}[k] = \begin{cases} -\underline{\mu}_{(i)} & \text{se } K_{(i,:)}x[k] < -\underline{\mu}_{(i)} \\ K_{(i,:)}x[k] & \text{se } -\underline{\mu}_{(i)} \leq K_{(i,:)}x[k] \leq \bar{\mu}_{(i)} \\ \bar{\mu}_{(i)} & \text{se } K_{(i,:)}x[k] > \bar{\mu}_{(i)}, \quad i = 1, \dots, q, \end{cases}$$

onde $K_{(i,:)}$ representa a i -ésima linha da matriz K . Portanto, $v[k] = \text{sat}(Kx[k], \underline{\mu}, \bar{\mu})$, de onde a equivalência entre (3) e (5) segue. ■

Na representação (5) as regiões de saturação, isto é, as regiões do espaço de estados que correspondem as regiões linear, de saturação positiva e de saturação negativa de cada entrada (veja (Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech, 1999) ou (Tarbouriech et al., 2011) para detalhes) são codificadas através da combinação de elementos ativos (*i.e.* $y_{(i)} > 0$) e inativos (*i.e.* $y_{(i)} < 0$) do vetor $y(x[k])$. Situações em que um ou mais elementos são nulos (*i.e.* $y_{(i)} = 0$) correspondem a um ponto do espaço de estados que pertence a duas ou mais regiões de saturação, ou seja, à fronteira comum dessas regiões. Para ilustrar, considere o sistema em malha fechada (3) com duas entradas ($q = 2$) definido pelas matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1.20 & 0 \\ -0.05 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K = \begin{bmatrix} -0.93 & 0 \\ 0.05 & -0.07 \end{bmatrix} \quad (6)$$

e pelos limites de saturação assimétricos

$$\underline{\mu}^\top = [1 \ 0.5] \quad \text{e} \quad \bar{\mu}^\top = [6 \ 1]. \quad (7)$$

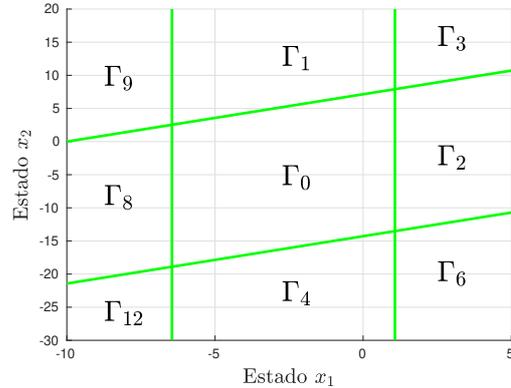


Figura 1. Regiões de saturação para o sistema (6)-(7)

A divisão do espaço de estados em regiões de operação não saturada, de saturação positiva e de saturação negativa de cada entrada está mostrada na Figura 1. A Tabela 1 associa cada uma das regiões Γ_j , para $j = 0, \dots, 15$, com a combinação de elementos do vetor $y(x[k])$ ativos ou inativos. Nela $\text{sn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ representa a função sinal, definida como

$$\text{sn}(y_{(i)}) = \begin{cases} +1 & \text{se } y_{(i)} > 0, \\ 0 & \text{se } y_{(i)} = 0, \\ -1 & \text{se } y_{(i)} < 0, \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, 4$. Ainda na Tabela 1, a letra L representa uma entrada não saturada, P representa uma entrada positivamente saturada, N uma entrada negativamente saturada e X codifica a situação infactível de uma mesma entrada estar simultaneamente saturada positiva e negativamente. Estas situações infactíveis correspondem a regiões Γ_j vazias no espaço de estados e que, portanto, não estão representadas na Figura 1. É por isso que embora o vetor $y(x[k])$ permita representar 2^{2q} regiões através de todas as combinações de seus elementos, apenas um máximo de 3^q regiões são criadas, já que algumas combinações possíveis de elementos de $y(x[k])$ são infactíveis e implicam em conjuntos vazios. Este é o caso, neste exemplo, da região Γ_5 , que codifica a situação em que a entrada $u_{(2)}$ está simultaneamente saturada positiva e negativamente.

4. PROPRIEDADES DA FUNÇÃO RAMPA

Visto que a função rampa vetorial ϕ é definida elemento a elemento em termos da função rampa escalar, a mesma herda as seguintes propriedades, válidas para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^{2q}$ (Primbs and Giannelli, 2001)

$$\phi_{(i)}(v) \geq 0; \quad (8a)$$

$$(\phi_{(i)}(v) - v_{(i)}) \geq 0; \quad (8b)$$

$$\phi_{(i)}(v)(\phi_{(i)}(v) - v_{(i)}) = 0. \quad (8c)$$

As relações (8a) e (8b) enunciam que a função rampa e seu complemento, dado por $(\phi_{(i)}(v) - v_{(i)})$, são não negativos, enquanto a relação (8c) afirma que o produto da função rampa pelo seu complemento é identicamente igual a zero.

Tabela 1. Possíveis combinações de elementos ativos e inativos em $y(x[k])$ para o sistema (6)-(7). Na tabela, L indica entrada não saturada, P indica saturação positiva, N saturação negativa e X codifica situações infactíveis.

sn($y_{(1)}$)	sn($y_{(2)}$)	sn($y_{(3)}$)	sn($y_{(4)}$)	$u_{(1)}$	$u_{(2)}$	Região Γ_i
-1	-1	-1	-1	L	L	Γ_0
-1	-1	-1	1	L	N	Γ_1
-1	-1	1	-1	N	L	Γ_2
-1	-1	1	1	N	N	Γ_3
-1	1	-1	-1	L	P	Γ_4
-1	1	-1	1	L	X	$\Gamma_5 = \emptyset$
-1	1	1	-1	N	P	Γ_6
-1	1	1	1	N	X	$\Gamma_7 = \emptyset$
1	-1	-1	-1	P	L	Γ_8
1	-1	-1	1	P	N	Γ_9
1	-1	1	-1	X	L	$\Gamma_{10} = \emptyset$
1	-1	1	1	X	N	$\Gamma_{11} = \emptyset$
1	1	-1	-1	P	P	Γ_{12}
1	1	-1	1	P	X	$\Gamma_{13} = \emptyset$
1	1	1	-1	X	P	$\Gamma_{14} = \emptyset$
1	1	1	1	X	X	$\Gamma_{15} = \emptyset$

As propriedades (8) da função rampa escalar permitem derivar propriedades válidas para a função rampa vetorial ϕ , que serão instrumentais para obter condições que certifiquem a estabilidade local da origem do sistema (3), representado por (5). Para isso, defina o seguinte vetor

$$\nu^\top(v) \triangleq [1 \ \phi^\top(v) \ (\phi(v) - v)^\top]$$

para $v \in \mathbb{R}^{2q}$. Com isso, os seguintes lemas podem ser enunciados.

Lema 2. Para qualquer matriz diagonal $T \in \mathbb{D}^{2q}$ e vetor $v \in \mathbb{R}^{2q}$, a função ϕ definida em (4) satisfaz

$$s_1(T, v) \triangleq \nu^\top(v) \gamma(T) \nu(v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^{2q},$$

onde

$$\gamma(T) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & T & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Prova. Como T é uma matriz diagonal, a expressão $s_1(T, v)$ pode ser escrita como

$$s_1(T, v) = 2 \sum_{i=1}^{2q} T_{(i,i)} \phi_{(i)}(v) (\phi_{(i)}(v) - v_{(i)}),$$

que é identicamente igual a zero como consequência da propriedade de complementariedade (8c). ■

Lema 3. Seja $N(x) \in \mathbb{R}^{(1+4q) \times (1+4q)}$ uma função matricial simétrica definida elemento a elemento por funções regionalmente não negativas $h_{(i,j)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, $N_{(i,j)}(x) = h_{(i,j)}(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n, i, j = 1, \dots, 1 + 4q$. Neste caso, a seguinte condição é válida para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^{2q}$

$$s_2(N(x), v) \triangleq \nu^\top(v) N(x) \nu(v) \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{D}, \ \forall v \in \mathbb{R}^{2q}. \quad (10)$$

Prova. Devido às propriedades de $N(x)$, a mesma é uma matriz não negativa elemento a elemento para todo $x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Além disso, o vetor $\nu(v)$ é não negativo para qualquer argumento $v \in \mathbb{R}^{2q}$ devido às propriedades de não negatividade (8a) e (8b) da função rampa e seu complemento. Portanto, nessas condições, o produto $\nu^\top(v) N(x) \nu(v)$ é composto apenas por elementos não negativos, provando (10). ■

Note que o Lema 3 se refere a não negatividade *regional* de $s_2(N(x), v)$ dentro de uma região \mathcal{D} do espaço de estados. Este resultado é uma extensão da propriedade global apresentada por Groff et al. (2019b), onde $N(x)$ é considerada uma matriz constante e não negativa elemento a elemento, situação em que $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$.

O desafio para derivar condições LMIs suficientes para certificar a não negatividade regional de uma função quadrática por partes (que será instrumental para a análise de estabilidade regional do sistema (5)) é escolher uma estrutura para a função matricial $N(x)$ tal que as condições para garantir sua não negatividade regional sejam convexas. Para isso, considera-se a seguinte estrutura

$$N(x) = \begin{bmatrix} h_a(x) & \star \\ h_b(x) & M_A \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde $M_A = M_A^\top \in \mathbb{R}^{4q \times 4q}$ é um bloco constante e não negativo elemento a elemento e as funções $h_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{4q}$ são definidas como

$$h_a(x) = \xi^\top(x) H_a \xi(x), \\ h_b(x) = H_b \xi(x),$$

com $H_a = H_a^\top \in \mathbb{R}^{(1+n+4q) \times (1+n+4q)}$ e $H_b \in \mathbb{R}^{4q \times (1+n+4q)}$ sendo matrizes constantes e o vetor $\xi(x)$ definido como

$$\xi^\top(x) = [1 \ x^\top \ \phi^\top(y(x)) \ (\phi(y(x)) - y(x))^\top].$$

Percebe-se que h_a é uma função quadrática por partes em x escrita como uma forma quadrática do vetor $\xi(x)$. Por outro lado, cada um dos $4q$ elementos de h_b pode ser escrito como um termo quadrático por partes em x da seguinte forma

$$h_{b(i)}(x) = H_{b(i,:)} \xi(x) = \xi^\top(x) \begin{bmatrix} H_{b(i,:)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xi(x),$$

onde $H_{b(i,:)}$ representa a i -ésima linha da matriz H_b .

Portanto, garantir a não negatividade regional de $N(x)$ em (11) dentro de uma região \mathcal{D} implica em escrever condições para assegurar a não negatividade regional de uma função quadrática por partes em x . Para obter tais condições, escolheu-se descrever a região \mathcal{D} também como uma superfície de nível de uma função quadrática por partes em x como segue:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x) \triangleq \xi^\top(x) D \xi(x) \geq 0\}, \quad (12)$$

com $D = D^\top \in \mathbb{R}^{(1+n+4q) \times (1+n+4q)}$. Dessa forma, o uso do *S-Procedure* permite assegurar a não negatividade regional de $N(x)$ em \mathcal{D} com o resultado do Lema a seguir.

Lema 4. Seja $h(x) = \xi^\top(x) H \xi(x)$, com $H = H^\top$, uma função quadrática por partes em x . Então, se existirem matrizes $T \in \mathbb{D}^{2q}$ e $M \succeq 0 \in \mathbb{R}^{(1+4q) \times (1+4q)}$ tais que

$$\Pi_1^\top (H - D + G_1^\top (\gamma(T) - M) G_1) \Pi_1 \geq 0, \quad (13)$$

com $\gamma(T)$ definido em (9),

$$G_1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \text{ e } \Pi_1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -f_4 & -F_3 & I \end{bmatrix}, \quad (14)$$

então a função $h(x)$ é não negativa em \mathcal{D} , *i.e.*, $h(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Prova. Defina

$$\chi^\top(x) \triangleq [1 \ x^\top \ \phi^\top(y(x))]. \quad (15)$$

Pré e pós multiplique (13) por $\chi^T(x)$ e $\chi(x)$, respectivamente, e observe que

$$\Pi_1 \chi(x) = \xi(x) \text{ e } G_1 \xi(x) = \nu(y(x)). \quad (16)$$

Dessa forma, utilizando os Lemas 2 e 3, (13) implica em

$$h(x) - d(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Como, por definição, $d(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, então $h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}$. ■

Observe que podemos aplicar o resultado do Lema 4 para cada elemento de $N(x)$ em (11), ou seja, para o elemento $h_a(x)$ e cada um dos $4q$ elementos em $h_b(x)$. Com isso, assegura-se a não negatividade regional de $N(x)$ em \mathcal{D} , conforme demonstrado no Lema 3, visto que os demais elementos de $N(x)$ são constantes e não negativos.

5. ANÁLISE DE ESTABILIDADE REGIONAL

Esta seção apresenta o resultado principal deste artigo, que consiste em condições LMI suficientes para garantir a estabilidade exponencial local da origem para sistemas sujeitos à saturação assimétrica. Para isso, os Lemas 2, 3 e 4, apresentados na Seção 4, serão utilizados para derivar condições de forma a certificar a estabilidade local da origem do sistema em malha fechada (5) e, ao mesmo tempo, caracterizar uma estimativa \mathcal{R} da RAO, *i.e.*, caracterizar a estabilidade regional do sistema.

Considere uma função candidata de Lyapunov $V(x)$ quadrática por partes, definida por

$$V(x) = \begin{bmatrix} x \\ \phi(y(x)) \end{bmatrix}^\top P \begin{bmatrix} x \\ \phi(y(x)) \end{bmatrix}, \quad P \triangleq \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^\top & P_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, a estabilidade exponencial regional da origem do sistema em malha fechada (5) pode ser verificada através do seguinte Teorema.

Teorema 5. Seja uma região \mathcal{D} definida como em (12). Se existem matrizes simétricas $P = P^\top \in \mathbb{R}^{(n+2q) \times (n+2q)}$, $H_a = H_a^\top \in \mathbb{R}^{(1+n+4q) \times (1+n+4q)}$, $H_c = H_c^\top \in \mathbb{R}^{(1+n+8q) \times (1+n+8q)}$, matrizes $H_b \in \mathbb{R}^{4q \times (1+n+4q)}$, $H_d \in \mathbb{R}^{8q \times (1+n+8q)}$, matrizes diagonais $T_1, T_a, T_{b_i} \in \mathbb{D}^{2q}$, $T_2, T_c, T_{d_j} \in \mathbb{D}^{4q}$, matrizes simétricas não negativas elemento a elemento $M_A \in \mathbb{R}^{2q \times 2q}$, $M_B \in \mathbb{R}^{4q \times 4q}$, $M_a, M_{b_i} \in \mathbb{R}^{(1+4q) \times (1+4q)}$, $M_c, M_{d_j} \in \mathbb{R}^{(1+8q) \times (1+8q)}$, escalares $\epsilon > 0$, $\eta \in (0, 1)$ e escalares não negativos $\alpha_a, \alpha_{b_i}, \alpha_c$ e α_{d_j} que satisfazem

$$\Pi_1^\top \left(Z_1 + G_1^\top \left(\gamma(T_1) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_A \end{bmatrix} \right) G_1 - H_a - \text{He} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_b \end{bmatrix} \right) \right) \Pi_1 \geq 0 \quad (17)$$

$$\Pi_1^\top (H_a - \alpha_a D + G_1^\top (\gamma(T_a) - M_a) G_1) \Pi_1 \geq 0 \quad (18)$$

$$\Pi_1^\top \left(\begin{bmatrix} H_{b(i,:)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha_{b_i} D + G_1^\top (\gamma(T_{b_i}) - M_{b_i}) G_1 \right) \Pi_1 \geq 0 \quad (19)$$

$$\Pi_2^\top \left(Z_2 + G_2^\top \left(\gamma(T_2) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_B \end{bmatrix} \right) G_2 - H_c - \text{He} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_d \end{bmatrix} \right) \right) \Pi_2 \geq 0 \quad (20)$$

$$\Pi_2^\top (H_c - \alpha_c G_3^\top D G_3 + G_2^\top (\gamma(T_c) - M_c) G_2) \Pi_2 \geq 0 \quad (21)$$

$$\Pi_2^\top \left(\begin{bmatrix} H_{d(j,:)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha_{d_j} G_3^\top D G_3 + G_2^\top (\gamma(T_{d_j}) - M_{d_j}) G_2 \right) \Pi_2 \geq 0 \quad (22)$$

para $i = 1, \dots, 2q, j = 1, \dots, 4q$, onde as matrizes G_1 e Π_1 foram definidas em (14) e as demais matrizes são definidas como segue,

$$G_2 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad G_3 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_2 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \begin{bmatrix} -f_4 \\ -f_4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -F_3 \\ -F_3 F_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_3 F_2 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$Z_1 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 - \epsilon I & P_2 & 0 \\ 0 & P_2^\top & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$Z_2 \triangleq - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_1^\top P_1 F_1 - \eta P_1 & F_1^\top P_1 F_2 - \eta P_2 & F_1^\top P_2 & 0 \\ 0 & \star & F_2^\top P_1 F_2 - \eta P_3 & F_2^\top P_2 & 0 \\ 0 & \star & \star & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então a origem do sistema em malha fechada (5) é exponencialmente estável e qualquer superfície de nível de $V(x)$ contida em \mathcal{D} é uma estimativa \mathcal{R} da RAO.

Prova. Pré e pós multiplicando (17) respectivamente por $\chi^T(x)$ e $\chi(x)$ definido em (15) e observando (16), obtém-se que

$$V(x) - \epsilon x^\top x + s_1(T_1, y(x)) - s_2(N_1(x), y(x)) \geq 0, \quad (23)$$

com

$$N_1(x) = \begin{bmatrix} h_a(x) & \star \\ h_b(x) & M_A \end{bmatrix},$$

onde $h_a(x) = \xi^\top(x) H_a \xi(x)$ e $h_b(x) = H_b \xi(x)$, pois

$$\begin{aligned} & \xi^\top(x) \left(G_1^\top \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_A \end{bmatrix} G_1 + H_a + \text{He} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_b \end{bmatrix} \right) \right) \xi(x) \\ &= \nu^\top(y(x)) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_A \end{bmatrix} \nu(y(x)) + h_a(x) + \\ & \quad \text{He} \left(\begin{bmatrix} \phi(y(x)) \\ \phi(y(x)) - y(x) \end{bmatrix}^\top h_b(x) \right) \\ &= \nu^\top(y(x)) \begin{bmatrix} h_a(x) & \star \\ h_b(x) & M_A \end{bmatrix} \nu(y(x)) \\ &= \nu^\top(y(x)) N_1(x) \nu(y(x)). \end{aligned}$$

As condições (18) e (19) garantem que a função escalar $h_a(x)$ e todos os $4q$ elementos da função vetorial $h_b(x)$ sejam não negativos em \mathcal{D} , conforme resultado enunciado no Lema 4. Como M_A é uma matriz não negativa elemento a elemento, aplicando os Lemas 2 e 3, (23) implica em

$$V(x) \geq \epsilon x^\top x \quad \forall x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Portanto, visto que ϵ é estritamente positivo, $V(x)$ é regionalmente definida positiva.

Resta agora demonstrar que $\Delta V(x) \triangleq V(x^+) - V(x) < 0$ em \mathcal{D} , onde x^+ representa o estado sucessor, ou seja, $x[k+1]$. Para isso, defina os seguintes vetores

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &\triangleq [y^\top(x) \ y^\top(x^+)]^\top, \\ \bar{\chi}(x) &\triangleq [1 \ x^\top \ \phi^\top(\bar{y}(x))]^\top, \end{aligned}$$

$$\bar{\xi}(x) \triangleq [1 \ x^\top \ \phi^\top(\bar{y}(x)) \ (\phi(\bar{y}(x)) - \bar{y}(x))^\top]^\top,$$

e perceba que $\Pi_2 \bar{\chi}(x) = \bar{\xi}(x)$. Pré e pós multiplicando (20) por $\bar{\chi}^\top(x)$ e $\bar{\chi}(x)$, respectivamente, obtém-se

$$-V(x^+) + \eta V(x) + s_1(T_2, \bar{y}(x)) - s_2(N_2(x), \bar{y}(x)) \geq 0, \quad (24)$$

onde

$$N_2(x) = \begin{bmatrix} h_c(x) & \star \\ h_d(x) & M_B \end{bmatrix},$$

com $h_c(x) = \bar{\xi}^\top(x) H_c \bar{\xi}(x)$ e $h_d(x) = H_d \bar{\xi}(x)$. As condições (21) e (22), através da aplicação do Lema 4 considerando $\bar{\xi}(x)$ ao invés de $\xi(x)$, garantem que a função escalar $h_c(x)$ e cada elemento da função vetorial $h_d(x)$ sejam não negativos em \mathcal{D} . Como o bloco M_B é uma matriz não negativa elemento a elemento, então aplicando os Lemas 2 e 3, (24) implica em

$$V(x^+) \leq \eta V(x) \quad \forall x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ou seja, $\Delta V(x) \leq (\eta - 1)V(x) < 0$ em \mathcal{D} , o que garante a estabilidade exponencial da origem. Dessa forma, qualquer superfície de nível de $V(x)$ contida em \mathcal{D} é um conjunto invariante e contrativo, servindo como estimativa \mathcal{R} da RAO. ■

Uma vez que as condições do Teorema 5 são resolvidas, ou seja, uma solução que satisfaça as condições (17)-(22) é encontrada, então a função de Lyapunov quadrática por partes $V(x)$ resultante certifica a estabilidade exponencial regional da origem do sistema em malha fechada (5). Neste caso, qualquer conjunto

$$\mathcal{L}(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq \rho, \rho \geq 0\} \subseteq \mathcal{D}$$

é uma estimativa \mathcal{R} da RAO. Ou seja, qualquer conjunto limitado por uma curva de nível da função de Lyapunov contida em \mathcal{D} é uma estimativa \mathcal{R} . Note, entretanto, que algumas soluções particulares das condições do Teorema 5

podem implicar em uma região \mathcal{R} maior, considerando alguma métrica de tamanho. Portanto, é interessante buscar formas de encontrar tais soluções.

Sem perda de generalidade, vamos considerar a superfície de nível $\mathcal{L}(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq 1\}$ para a análise. É possível garantir a inclusão de $\mathcal{L}(1)$ em \mathcal{D} através do seguinte Lema.

Lema 6. Se existe uma matriz diagonal $T_e \in \mathbb{D}^{2q}$, uma matriz não negativa elemento a elemento $M_e \in \mathbb{R}^{(1+4q) \times (1+4q)}$ e um escalar não negativo α_e tais que

$$\Pi_1^\top \left(\alpha_e D - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G_1^\top (\gamma(T_e) - M_e) G_1 \right) \Pi_1 \geq 0, \quad (25)$$

então $\mathcal{L}(1) \subseteq \mathcal{D}$.

Prova. Pré e pós multiplicando (25) por $\chi^\top(x)$ e $\chi(x)$, respectivamente, obtém-se

$$\alpha_e d(x) - (1 - V(x)) + s_1(T_e, y(x)) - s_2(M_e, y(x)) \geq 0.$$

Usando os resultados apresentados pelos Lemas 2 e 3, com $N(x) = M_e$, conclui-se que essa expressão é equivalente a

$$\alpha_e d(x) \geq (1 - V(x)).$$

Note que para qualquer $x \in \mathcal{L}(1)$ temos $(1 - V(x)) \geq 0$, implicando em $\alpha_e d(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{L}(1)$. Visto que α_e é não negativo, isso implica que $d(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathcal{L}(1)$ e, assim, segue que $\mathcal{L}(1) \subseteq \mathcal{D}$. ■

Uma vez que garantimos que $\mathcal{L}(1) \subseteq \mathcal{D}$, outras condições podem ser adicionadas para que $\mathcal{L}(1)$ compreenda pontos de interesse do espaço de estados. Para fazer isso, considere que esses pontos de interesse são representados por um conjunto de N vetores $\mathcal{V} = \{v_\ell\}$, para $\ell = 1, \dots, N$. Então, um conjunto de N condições necessárias e suficientes para garantir que $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}(1)$ é dada no Lema a seguir.

Lema 7. Se as seguintes condições forem satisfeitas para os N vetores do conjunto \mathcal{V} ,

$$\begin{bmatrix} v_\ell \\ \phi(y(v_\ell)) \end{bmatrix}^\top P \begin{bmatrix} v_\ell \\ \phi(y(v_\ell)) \end{bmatrix} \leq 1 \quad \forall \ell = 1, \dots, N, \quad (26)$$

então $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}(1)$.

Prova. Note que (26) representa $V(v_\ell) \leq 1 \ \forall \ell = 1, \dots, N$, garantindo assim que cada vetor de \mathcal{V} (i.e. cada ponto de interesse) esteja contido em $\mathcal{L}(1)$. ■

Por fim, note que uma superfície de nível de uma função quadrática por partes não é, necessariamente, um conjunto convexo. Assim, o conjunto de condições (26) não garante que o envelope convexo definido pelos vetores de \mathcal{V} esteja contido em $\mathcal{L}(1)$.

6. EXEMPLO NUMÉRICO

Considere o exemplo 1 apresentado em (Groff et al., 2019a), onde o sistema linear de tempo discreto

$$x[k+1] = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ -0.05 & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u[k]$$

é controlado por uma realimentação estática de estados $u[k] = Kx[k]$, com $K = [-1 \ 1]$. Os limites de saturação neste exemplo monovariável são $\bar{\mu} = 6$ e $\underline{\mu} = 1$. Como o sistema em malha aberta é instável (os autovalores da

matriz A são 1.0 e 1.2), a estabilidade da origem do sistema em malha fechada é apenas local. Portanto, é interessante obter uma estimativa \mathcal{R} da RAO.

Podemos escrever o sistema em malha fechada utilizando a representação com rampas ϕ utilizando (5). Com isso obtemos

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ -0.05 & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \phi(y(x[k])), \\ y(x[k]) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para certificar a estabilidade exponencial regional da origem, um problema de Programação Semi-Definida (SDP) foi construído com as restrições do Teorema 5, (25) e (26) para o conjunto \mathcal{V} de pontos de interesse

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} -13.0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2.4 \end{bmatrix} \right\}.$$

A região de interesse para a análise de estabilidade \mathcal{D} foi escolhida como uma bola deslocada da origem (mas contendo-a), descrita por (12), com

$$D = \begin{bmatrix} 88.3072 & -9.0384 & 0 & 0 \\ -9.0384 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix}.$$

Uma estimativa \mathcal{R} da RAO com área de 68.1 unidades ao quadrado foi obtida e está mostrada na Figura 2. Nela, Γ_0 representa a região linear, Γ_1 a região de saturação negativa e Γ_2 a região de saturação positiva. A matriz que define a função de Lyapunov $V(x)$ que certifica a estabilidade regional da origem é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0.0081 & -0.0050 & 0.0165 & 0.0610 \\ -0.0050 & 0.1554 & 0.0012 & -0.0094 \\ 0.0165 & 0.0012 & 0.0539 & 1.2331 \times 10^8 \\ 0.0610 & -0.0094 & 1.2331 \times 10^8 & 0.1368 \end{bmatrix}.$$

Perceba que P não precisa ser definida positiva para certificar a estabilidade regional do sistema, pois as condições propostas para analisar a estabilidade garantem as características regionais da função de Lyapunov $V(x)$, o que independente de P ser definida positiva. Além disso, as estimativas da RAO obtidas como curvas de nível de funções de Lyapunov não são, necessariamente, conjuntos convexos. Isso pode ser visto, por exemplo, na Figura 2. Essa característica é outra vantagem do método proposto em relação a métodos que lidam exclusivamente com conjuntos convexos.

Os resultados obtidos foram comparados com outros resultados da literatura, conforme mostrado na Figura 3. Em preto considerou-se a saturação simétrica de pior caso e as técnicas de saturação simétrica propostas em (Tarbouriech et al., 2011) foram utilizadas. Isso levou à uma estimativa \mathcal{R} com área de 37.3 unidades ao quadrado. Em vermelho, a técnica específica para saturação assimétrica apresentada em (Groff et al., 2019a) foi empregada e encontrou-se uma estimativa \mathcal{R} com área de 58.4 unidades ao quadrado. Por fim, em azul, as técnicas apresentadas neste trabalho foram utilizadas. Deste modo encontrou-se uma estimativa \mathcal{R} com área de 68.1 unidades ao quadrado.

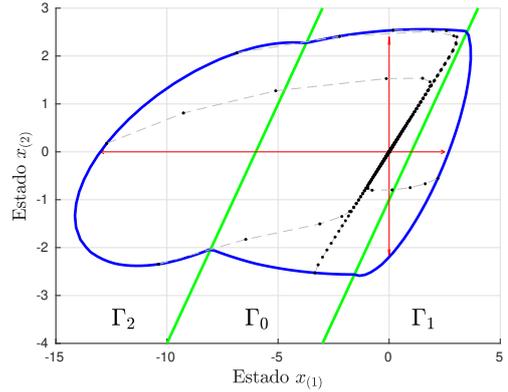


Figura 2. Estimativa \mathcal{R} da RAO (azul) considerando a saturação assimétrica (verde). O conjunto \mathcal{V} incluído em \mathcal{R} está mostrado em vermelho. Algumas trajetórias estão representadas pelos pontos pretos.

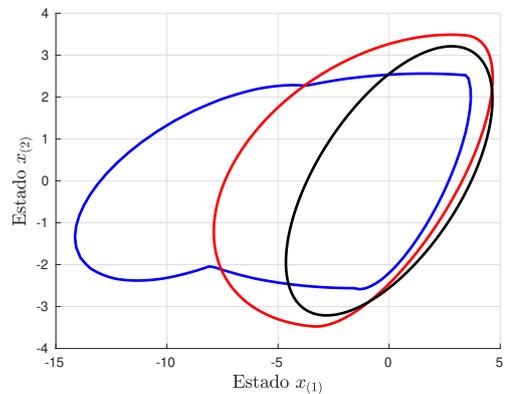


Figura 3. Estimativa \mathcal{R} da RAO obtida por três métodos. Em preto considerando a saturação simétrica no pior caso, em vermelho considerando a saturação assimétrica pelo método de (Groff et al., 2019a) e em azul considerando o método proposto neste trabalho.

7. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta uma metodologia para certificar a estabilidade exponencial da origem de um sistema linear de tempo discreto controlado por realimentação estática de estados e sujeito à saturação assimétrica. Além disso, uma estimativa da RAO é obtida como uma superfície de nível de uma função de Lyapunov quadrática por partes. Condições para obter melhores soluções, ou seja, regiões maiores como estimativas da RAO foram propostas e testadas em um exemplo numérico. Os resultados foram superiores aos obtidos previamente na literatura. Trabalhos futuros abordarão formas de otimizar tanto a escolha da região \mathcal{D} quanto do conjunto de pontos de interesse \mathcal{V} .

REFERÊNCIAS

Benhayoun, M., Benzaouia, A., Mesquine, F., and EL Hajjaji, A. (2013). Stabilization of unsymmetrical saturated discrete-time systems: An LMI approach. In *3rd International Conference on Systems and Control*, 478–483.

- Benzaouia, A. and Burgat, C. (1988). Regulator problem for linear discrete-time systems with non-symmetrical constrained control. *International Journal of Control*, 48(6), 2441–2451.
- Castelan, E.B., Gomes da Silva Jr., J.M., and Cury, J.E.R. (1996). A reduced-order framework applied to linear systems with constrained controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(2), 249–255.
- Dai, D., Hu, T., Teel, A., and Zaccarian, L. (2009). Piecewise-quadratic Lyapunov functions for systems with deadzones or saturations. *Systems & Control Letters*, 58, 365–371.
- Gomes da Silva Jr., J.M. and Tarbouriech, S. (1999). Polyhedral regions of local stability for linear discrete-time systems with saturating controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(11), 2081–2085.
- Groff, L.B., Valmorbidia, G., and Gomes da Silva Jr., J.M. (2019a). Regional stability of discrete-time linear systems subject to asymmetric input saturation. In *Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 169–174.
- Groff, L.B., Valmorbidia, G., and Gomes da Silva Jr., J.M. (2019b). Stability analysis of piecewise affine discrete-time systems. In *Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 8172–8177.
- Hu, T. and Lin, Z. (2001). *Control Systems with Actuator Saturation*. Springer Science.
- Li, Y. and Lin, Z. (2018). An asymmetric Lyapunov function for linear systems with asymmetric actuator saturation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(5), 1624–1640.
- Primbs, J.A. and Giannelli, M. (2001). Kuhn-tucker-based stability conditions for systems with saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(10), 1643–1647.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J.M., and Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer-Verlag London.
- Yuan, C. and Wu, F. (2015). Switching control of linear systems subject to asymmetric actuator saturation. *International Journal of Control*, 88(1), 204–215.
- Zaccarian, L. and Teel, A.R. (2011). *Modern Anti-windup Synthesis: Control Augmentation for Actuator Saturation*. Princeton University Press.