

Filtragem Ótima \mathcal{H}_2 Aplicada a Sistemas Amostrados^{*}

Henrique W. R. Pereira^{*} Gabriela W. Gabriel^{*}
André M. de Oliveira^{**} José C. Geromel^{***}

^{*} Instituto Tecnológico de Aeronáutica, IEE, 12228-900, São José dos Campos, SP, Brasil (e-mail: ggabriel@ita.br, henriquewrpereira@gmail.com).

^{**} Universidade Federal de São Paulo, Instituto de Ciência e Tecnologia, São José dos Campos, SP, Brazil (e-mail: andre.marcorin@unifesp.br)

^{***} Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Unicamp, Campinas, SP, Brasil (e-mail: geromel@dsce.fee.unicamp.br)

Abstract: This paper is entirely devoted to the design of the \mathcal{H}_2 optimal filter applied to systems with sampled-data measured outputs. Like the system, the proposed filter structure also has a hybrid dynamic. In this sense, a natural way of dealing with this problem is to use the hybrid approach. From the analysis of known optimality conditions for the \mathcal{H}_2 norm calculation, convex constraints based on differential linear matrix inequalities (DLMI) are derived for the design of the optimal filter. An immediate consequence of the results presented here is that the filter design optimality condition falls in the particular case of the observer structure. Two examples illustrate the obtained results.

Resumo: Este artigo é inteiramente dedicado ao projeto do filtro ótimo \mathcal{H}_2 aplicado a sistemas com saídas medidas amostradas. Assim como o sistema, o filtro proposto também apresenta uma dinâmica híbrida. Neste sentido, uma forma natural de tratar este problema é o uso da abordagem híbrida. A partir da análise de condições ótimas conhecidas para o cálculo da norma \mathcal{H}_2 , são derivadas condições convexas baseadas em desigualdades matriciais lineares diferenciais (DLMI) para o projeto do filtro ótimo. Uma consequência imediata dos resultados aqui apresentados é que a condição de otimalidade sobre o projeto do filtro recai no caso particular do observador de estados. Dois exemplos ilustram os resultados obtidos.

Keywords: Sampled-data systems; Hybrid systems; Filtering; \mathcal{H}_2 Optimization; DLMI.

Palavras-chaves: Sistemas amostrados; Sistemas híbridos; Filtragem; Otimização \mathcal{H}_2 ; DLMI.

1. INTRODUÇÃO

Com o passar dos anos, o avanço da tecnologia possibilitou novas formas de interação entre plantas contínuas e dispositivos que operam de forma intrinsecamente discreta, como é o caso dos computadores. Este tipo de sistemas tem sido objeto de estudos há décadas e diversas formas de tratá-los podem ser encontradas na literatura, sendo a mais comum dentre elas a discretização, Ichikawa et al. (2001). Com o passar do tempo, outras formas de tratar este problema surgiram, tais como *lifting*, Yamamoto (1990), *input delay*, Zhang et al. (2017) e abordagem híbrida ou impulsiva, Goebel et al. (2009); Briat (2013). Esta última, sem dúvida, traz uma vantagem que permite estender o estudo dos sistemas híbridos LTI (lineares e invariantes no tempo) a outros contextos, como os markovianos Geromel and Gabriel (2015) e de L'ure Gabriel and Geromel (2021), bem como o tratamento de sistemas robustos Geromel et al. (2019). Esta vantagem corresponde

à possibilidade de evitar o uso da função exponencial no desenvolvimento de condições convexas para o projeto de diferentes estruturas como a realimentação de estados ótima \mathcal{H}_2 , Geromel and Souza (2015), e a realimentação de saída ótima \mathcal{H}_2 , Geromel et al. (2019), sendo ainda uma lacuna na literatura o projeto de filtros e de observadores ótimos no contexto de minimização destas normas. Uma exceção é o trabalho de Briat (2013) em que soluções convexas baseadas na resolução de equações de Riccati são apresentadas somente para o contexto de estabilização do sistema amostrado.

Vale notar que em todos os trabalhos dedicados ao estudo dos sistemas híbridos, as condições de otimalidade recaem em condições (convexas) descritas por DLMI. Trabalhos como Ariola et al. (2020) e Gonçalves et al. (2018) discorrem sobre diferentes soluções numéricas para problemas envolvendo DLMI comparando-as em relação a seu desempenho numérico e esforço computacional. A descrição de problemas convexas através DLMI tem se mostrado uma ferramenta matemática de grande valor por ser capaz de apresentar uma solução ótima para qualquer restrição estrutural da solução apresentada, veja Gonçal-

^{*} Este trabalho contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico CNPq, processo 302013/2019-9, e da CAPES através do programa PRINT.

ves et al. (2018). Neste contexto, do uso de DLMI para a solução do problema de filtragem em sistemas amostrados, o trabalho de Pereira et al. (2021) apresenta o projeto de um observador de estados no contexto da otimização das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ . Nele, apenas condições subótimas são apresentadas. No contexto de condições convexas expressas através de LMIs, no trabalho de Souza et al. (2014), o projeto de filtros \mathcal{H}_2 é apresentado segundo condições também subótimas, tendo em vista que não é possível garantir que a solução ótima global de um problema não convexo seja calculada.

Desta forma, o presente trabalho propõe resolver um dos problemas clássicos da teoria de sistemas dinâmicos lineares, a filtragem ótima aplicada a sistemas amostrados. Diferentemente dos trabalhos anteriores, este trabalho apresenta uma formulação ótima expressa através de condições DLMI. Para isso, primeiro, são obtidas condições ótimas para o projeto de um filtro de ordem completa. A partir desta estrutura, obtém-se as matrizes do filtro que são invariantes no tempo e são obtidas a partir das matrizes do sistema e do observador de estados ótimo. É importante ressaltar que a convexidade do problema é preservada. Em nossa opinião, tais resultados são inéditos na literatura.

Notação: A notação utilizada é padrão. M' é o transposto de um vetor ou matriz real M e $\text{tr}(M)$ corresponde ao traço da matriz quadrada M . Para uma matriz quadrada simétrica M , $M > 0$ ($M \geq 0$) indica que M é (semi-)definida positiva e \bullet indica cada um dos seus blocos simétricos. Para um sinal z contínuo no tempo, $\|z\|_2^2 = \int_0^\infty z'z dt$. Para funções matriciais definidas no intervalo real limitado $[0, h]$, $P_0 = P(0)$ e $P_h = P(h)$ definem as matrizes calculadas em cada um dos seus extremos. Os conjuntos dos números naturais, dos números reais e dos números reais não negativos são denotados por \mathbb{N} , \mathbb{R} e \mathbb{R}_+ , respectivamente. A fim e facilitar a notação, a função $f(t)$ calculada no instante de tempo $t = t_k$ é, em geral, denotada como $f[k] = f(t_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

2. DISCUSSÃO PRELIMINAR

Seja o sistema LTI amostrado representado através da sua formulação no espaço de estados como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Ew_c(t) \quad (1)$$

$$y[k] = C_y x[k] + E_y w_d[k] \quad (2)$$

$$z_e(t) = C_z x(t) \quad (3)$$

o qual evolui a partir do estado inicial $x(0) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Para este sistema, $x(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $y[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida disponível apenas nos instantes de amostragem, $w_d[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{r_d}$ é uma perturbação discreta que modifica a saída medida, $w_c(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{r_c}$ é uma perturbação contínua que modifica o estado e $z_e(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$, a variável a ser estimada. O objetivo é estimar a saída $z_e(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, dada a saída (com perturbação) medida e amostrada, $y[k]$. Para isso, iremos utilizar a representação híbrida, em espaço de estados, conforme apresentada em Sun et al. (1993),

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}_c(t)\hat{x}(t) \quad (4)$$

$$\hat{x}(t_k) = \hat{A}_d\hat{x}(t_k^-) + \hat{B}_d y[k] \quad (5)$$

$$\hat{z}_e(t) = \hat{C}_c(t)\hat{x}(t) \quad (6)$$

com condição inicial $\hat{x}(0) = 0$ e válida para todo intervalo de tempo $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$. Para esta estrutura, $\hat{x}(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado do filtro e $\hat{z}_e(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ a estimativa de $z_e(\cdot)$ produzida pelo filtro. Desta forma, (4) e (6) definem a evolução temporal do filtro, sendo representada pelo par de matrizes $(\hat{A}_c(t), \hat{C}_c(t))$, válida entre instantes de amostragem sucessivos $t_k, k \in \mathbb{N}$ e (5) representa o comportamento discreto dos estados do filtro, os saltos, que ocorrem nos instantes da amostragem. As matrizes (\hat{A}_d, \hat{B}_d) , invariantes no tempo, descrevem esta dinâmica discreta. Assim, considerando o estado aumentado $\psi(t)' = [x(t)' \hat{x}(t)']$, podemos representar o sistema composto por planta e filtro como

$$\dot{\psi}(t) = F\psi(t) + J_c w_c(t) \quad (7)$$

$$z(t) = G\psi(t) \quad (8)$$

$$\psi(t_k) = H\psi(t_k^-) + J_d w_d[k] \quad (9)$$

As matrizes aumentadas indicadas acima são

$$F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A}_c \end{bmatrix}, J_c = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, G = [C_z \quad -\hat{C}_c] \quad (10)$$

e também

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \hat{B}_d C_y & \hat{A}_d \end{bmatrix}, J_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_d E_y \end{bmatrix} \quad (11)$$

em que é importante notar a presença das variáveis a serem determinadas em F , G , H e J_d . O sinal $z(t) = G\psi(t) = z_e(t) - \hat{z}_e(t)$ indica o erro de estimação produzido pelo conjunto planta e filtro. Desta forma, nosso objetivo de estimar z_e , pode ser traduzido em determinar as matrizes $(\hat{A}_c(t), \hat{C}_c(t), \hat{A}_d, \hat{B}_d)$ sob condições de otimalidade na minimização da norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação. Para isso, em um primeiro momento, apresentaremos as condições que nos permitem encontrar o filtro ótimo (4)–(6), variante no tempo, que minimiza o índice de desempenho

$$\varrho_2^2 = \sum_{i=1}^{r_c+r_d} \|z_i\|_2^2 \quad (12)$$

sendo z_i , para cada $1 \leq i \leq r_c$, a saída correspondente ao impulso a tempo contínuo ocorrendo no instante t_0^- no i -ésimo canal de w_c e z_i , para cada $r_c + 1 \leq i \leq r_c + r_d$, a saída correspondente a um impulso discreto ocorrendo no instante $k = 0$ no i -ésimo canal de w_d . Como visto em Geromel et al. (2019), ϱ_2 corresponde ao cálculo da norma \mathcal{H}_2 , uma vez que contabiliza a contribuição individual na saída, de um impulso aplicado em cada uma das entradas contínuas e discretas do sistema. Em um segundo momento, a partir das condições de otimalidade para determinar o filtro variante no tempo, obteremos a versão invariante no tempo de forma a conservar a otimalidade. Lembrando que as medições da saída ocorrem apenas nos instantes de amostragem $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, a melhor estimativa da saída $z_e(t)$ para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$ é dada pelo filtro ótimo. Para a sequência dos instantes de amostragem, consideramos $t_0 = 0$ e $t_{k+1} - t_k = h$, $\forall k \in \mathbb{N}$, em que $h > 0$ é o período de amostragem.

Nestas condições, é importante citar um resultado a ser utilizado aqui, o qual foi extraído de Geromel et al. (2019) e é apresentado no próximo teorema.

Teorema 1. Seja $h > 0$ o período de amostragem dado. O sistema híbrido (7)–(9) é globalmente assintoticamente estável e opera com o índice de desempenho ϱ_2 se, e apenas se, a DLMI

$$\dot{P}(t) + F'P(t) + P(t)F + G'G < 0, \quad t \in [0, h] \quad (13)$$

sujeita às condições de contorno

$$P_h > 0, \quad P_h > H'P_0H \quad (14)$$

for factível. No caso afirmativo, o índice de desempenho definido em (12) é dado por

$$\varrho_2^2 = \inf\{\text{tr}(J'_c P_h J_c) + \text{tr}(J'_d P_0 J_d) : (13) - (14)\} \quad (15)$$

Prova. A prova deste teorema pode ser vista como uma aplicação direta do resultado de Geromel et al. (2019) para o sistema híbrido definido por (7)-(9).

Deve-se notar que o ínfimo em (15) é baseado na função $P(\cdot) > 0$ definida no intervalo $[0, h]$ e nas matrizes P_0 e P_h , que satisfazem a seguinte relação

$$P(t) > e^{F'(h-t)} P_h e^{F(h-t)} + \int_0^{h-t} e^{F'\tau} G' G e^{F\tau} d\tau \quad (16)$$

que garante que dado $P_h > 0$, então teremos $P(t) > 0, \forall t \in [t_k, t_{k+1}]$. Como consequência, existirá $Q(t) = P(t)^{-1} > 0$, durante todo o intervalo considerado. Outro ponto a se ressaltar é que o Teorema 1 continua válido mesmo para matrizes (F, G) variantes no tempo, desde que elas respeitem a relação $F(t) = F(t - t_k)$ e $G(t) = G(t - t_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto é, são idênticas em cada intervalo de tempo definido por instantes de amostragem sucessivos $[t_k, t_{k+1}], k \in \mathbb{N}$.

3. FILTRO VARIANTE NO TEMPO

Esta seção é dedicada a apresentar as condições de otimalidade para o projeto de um filtro variante no tempo. Deseja-se que as condições obtidas sejam expressas através de DLMI, dadas as discussões apresentadas anteriormente. Para tanto, vamos considerar um período de amostragem $h > 0$. Com este escalar, podemos definir uma função matricial $P(\cdot) : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, tal que

$$P(t) = \begin{bmatrix} X(t) & V(t) \\ V(t)' & \hat{X}(t) \end{bmatrix} > 0 \quad (17)$$

em que cada uma das quatro partições que também estão definidas no intervalo $[0, h]$ tem imagem $\mathbb{R}^{n_x \times n_x}$. Estendendo-se o mesmo para suas inversas, definimos $Q(t)$ tal que

$$Q(t) = P(t)^{-1} = \begin{bmatrix} Y(t) & U(t) \\ U(t)' & \hat{Y}(t) \end{bmatrix} > 0 \quad (18)$$

segundo a ideia, inicialmente proposta em Scherer (1996). A partir destas definições e sabendo que $P(t)Q(t) = I$ podemos escrever as relações

$$X(t)Y(t) + V(t)U(t)' = I \quad (19)$$

$$V(t)'Y(t) + \hat{X}(t)U(t)' = 0 \quad (20)$$

que serão importantes para as deduções que se seguirão. Vamos considerar ainda a matriz de transformação de congruência

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & U(t)'Z(t) \end{bmatrix} \quad (21)$$

em que $Z(t) = Y(t)^{-1} > 0$. Para facilitar a notação e leitura do texto, daqui em diante, a dependência do tempo, nestas matrizes, será omitida. Nota-se que, sem perda de generalidade, as matrizes V e U podem ser consideradas

não singulares. Assim, a partir de (21) e das relações (19) e (20), podemos verificar que

$$\Gamma' P \Gamma = \begin{bmatrix} X & Z \\ Z & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (22)$$

Utilizando a mesma transformação para a matriz da derivada temporal de P e, conseqüentemente, da derivada em relação ao tempo das relações (19) e (20), teremos

$$\Gamma' \dot{P} \Gamma = -\Gamma' P \dot{Q} \Gamma = \begin{bmatrix} \dot{X} & \dot{X} + \dot{V}U'Z \\ \bullet & \dot{Z} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Além disso, podemos escrever que

$$\Gamma' F' P \Gamma = \begin{bmatrix} A'X & A'Z \\ A'X + ZU\hat{A}'_cV' & A'Z \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\Gamma' G' = \begin{bmatrix} C'_z \\ C'_z - ZU\hat{C}'_c \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\Gamma'_h H' P_0 \Gamma_0 = \begin{bmatrix} X_0 + C'_y \hat{B}'_d V'_0 & Z_0 \\ X_0 + C'_y \hat{B}'_d V'_0 + Z_h U_h \hat{A}'_d V'_0 & Z_0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Essas relações permitirão elaborar o projeto do filtro ótimo através de condições linearizadas obtidas a partir das DLMI do Teorema 1. Tal resultado é apresentado no próximo teorema.

Teorema 2. Seja $h > 0$, o período de amostragem, dado. Se as funções matriciais $X(t), Z(t), M_c(t), K_c(t)$, com $X(t) > Z(t) > 0$, e as matrizes M_d, K_d, W_d satisfizerem a DLMI

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + A'X + XA & \bullet & \bullet \\ A'X + ZA + M'_c & \dot{Z} + A'Z + ZA & \bullet \\ C_z & C_z - K_c & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

para todo $t \in [0, h]$, sujeita às condições de contorno

$$\begin{bmatrix} X_h & Z_h & X_0 + C'_y K'_d & Z_0 \\ \bullet & Z_h & X_0 + C'_y K'_d + M'_d & Z_0 \\ \bullet & \bullet & X_0 & Z_0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & Z_0 \end{bmatrix} > 0 \quad (28)$$

e

$$\begin{bmatrix} W_d & E'_y K'_d \\ \bullet & X_0 - Z_0 \end{bmatrix} > 0 \quad (29)$$

então a solução ótima com respeito às variáveis $X, Z, M_c, K_c, M_d, K_d, W_d$ do problema de programação convexa

$$\varrho_2^2 = \inf\{\text{tr}(E'X_h E) + \text{tr}(W_d) : (27) - (29)\} \quad (30)$$

fornecerá as matrizes do filtro ótimo como

$$\hat{A}_c = (Z - X)^{-1}(M_c - \dot{Z}), \quad \hat{C}_c = K_c \quad (31)$$

$$\hat{A}_d = (Z_0 - X_0)^{-1}M_d, \quad \hat{B}_d = (Z_0 - X_0)^{-1}K_d \quad (32)$$

Prova. A prova é resultante do estabelecido no Teorema 1. Para isso, considere $h > 0$ dado e o particionamento das matrizes P e Q conforme (17) e (18), respectivamente. Aplicando-se a transformação de congruência (21) em (17), chegaremos à (22), que corresponde à condição $X(t) > Z(t) > 0$. De forma análoga, pré e pós multiplicando (13) por Γ' e Γ , respectivamente, e aplicando-se o complemento de Schur na expressão resultante, chegamos à forma equivalente

$$\begin{bmatrix} \Gamma'(\dot{P} + F'P + PF)\Gamma & \bullet \\ G\Gamma & -I \end{bmatrix} < 0, \quad t \in [0, h] \quad (33)$$

Utilizando as relações já apresentadas anteriormente e a troca de variáveis $M_c = V\hat{A}_cU'Z + \dot{V}U'Z + \dot{X}$ e

$K_c = \hat{C}_c U' Z$ é possível recuperarmos a DLMI descrita em (27). A mesma transformação de congruência aplicada nas condições de contorno, (14), em conjunto com o complemento de Schur, levam a

$$\begin{bmatrix} \Gamma'_h P_h \Gamma_h & \Gamma'_h H' P_0 \Gamma_0 \\ \bullet & \Gamma'_0 P_0 \Gamma_0 \end{bmatrix} > 0 \quad (34)$$

A partir das relações anteriormente descritas e após levar em conta as igualdades (19) e (20) e a mudança de variáveis $M_d = V_0 \hat{A}_d U'_h Z_h$ e $K_d = V_0 \hat{B}_d$, a LMI descrita em (28) é recuperada. Além da DLMI e da LMI que descreve as condições de contorno, é necessário reescrever o problema de minimização nas novas variáveis. Para isso, aplicando-se o valor de J_c , (10), na expressão $J'_c P_h J_c$ chegamos imediatamente ao termo $E' X_h E$. Aplicando-se o mesmo procedimento para J_d , (10), em $J'_d P_0 J_d$ chegamos em $E'_y K'_d V_0^{-1} \hat{X}_0 V_0^{-1} K_d E_y$. Utilizando a variável auxiliar W_d , escrevemos

$$E'_y K'_d V_0^{-1} \hat{X}_0 V_0^{-1} K_d E_y < W_d \quad (35)$$

que, após a aplicação do complemento de Schur, torna-se

$$\begin{bmatrix} W & E'_y K'_d \\ \bullet & V_0 \hat{X}_0^{-1} V_0' \end{bmatrix} > 0 \quad (36)$$

Usando as relações (19) e (20) na LMI (36) chegamos à LMI (29), sendo o problema de minimização da norma \mathcal{H}_2 descrito na equação (30). Por fim, é preciso recuperar as matrizes do filtro a partir da solução calculada. Para isso, nota-se que, uma vez determinadas M_c , K_c , M_d e K_d , podemos arbitrar U como sendo qualquer função matricial não singular, por exemplo, $U = Y = Z^{-1}$. Esta escolha, em (19), leva a $V = Z - X < 0$, que aplicada na expressão de K_c , implica em

$$\hat{C}_c = K_c (U' Z)^{-1} = K_c \quad (37)$$

Analogamente, a partir de M_c podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{A}_c &= V^{-1} (M_c - \dot{V} U' Z - \dot{X}) (U' Z)^{-1} \\ &= (Z - X)^{-1} (M_c - \dot{Z}) \end{aligned} \quad (38)$$

Por outro lado, para as variáveis discretas M_d e K_d , pode-se recuperar \hat{A}_d e \hat{B}_d . De fato,

$$\hat{A}_d = V_0^{-1} M_d (U'_h Z_h)^{-1} = (Z_0 - X_0)^{-1} M_d \quad (39)$$

e

$$\hat{B}_d = V_0^{-1} K_d = (Z_0 - X_0)^{-1} K_d \quad (40)$$

Dessa forma, o filtro projetado pode ser completamente determinado, o que conclui a prova do teorema proposto.

A partir do resultado apresentado no Teorema 2 é possível obtermos uma formulação ótima para a filtragem de sistemas amostrados, considerando a minimização da norma \mathcal{H}_2 . Além da otimalidade do resultado, sua importância reside no fato de o projeto evitar a necessidade de lidar com exponenciais de matrizes, além de poder ser realizado através de programação convexa.

4. FILTRO INVARIANTE NO TEMPO

Uma característica que deriva do Teorema 2 é que, o projeto anterior recai no projeto do observador ótimo \mathcal{H}_2 . De fato, como será visto nesta seção, uma simplificação do resultado obtido em (37)–(40) permite estabelecer uma formulação invariante no tempo para o filtro. Esse resultado é apresentado no seguinte teorema.

Teorema 3. Seja $h > 0$ dado. Se a função matricial $X(t) = X(t)' > 0$ e a matriz K_d satisfizerem a DLMI

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + A' X + X A & C'_z \\ \bullet & -I \end{bmatrix} < 0, \quad t \in [0, h) \quad (41)$$

sujeita à condição de contorno

$$\begin{bmatrix} X_h & X_0 + C'_y K'_d \\ \bullet & X_0 \end{bmatrix} > 0 \quad (42)$$

então a solução ótima do problema convexo

$$\varrho_2^2 = \inf \{ \text{tr}(E' X_h E) + \text{tr}(E'_y K'_d X_0^{-1} K_d E_y) : (41) - (42) \} \quad (43)$$

fornecerá as matrizes do filtro ótimo como

$$\hat{A}_c = A, \quad \hat{C}_c = C_z \quad (44)$$

$$\hat{A}_d = I + X_0^{-1} K_d C_y, \quad \hat{B}_d = -X_0^{-1} K_d \quad (45)$$

Prova. Para a provar este teorema basta provarmos que o resultado do Teorema 2 continua válido para esta situação em particular. De fato, a condição ótima aplicada em (27) permite-nos escolher as variáveis $K_c = C_z$ e $M_c = -A' Z - X A$, eliminando, assim, praticamente todos os termos que não estão na diagonal principal. Após essa simplificação é possível ver que a DLMI (27) pode ser reescrita, de forma equivalente, como a DLMI (41) e $\dot{Z} + A' Z + Z A < 0$ cuja solução permite escrever ainda que

$$Z_0 > e^{A'h} Z_h e^{Ah} \quad (46)$$

Por outro lado, a condição de contorno, (42), nada mais é do que a condição (28) em que foram eliminadas as segundas e quartas linhas e colunas. Essa eliminação só é possível se adotarmos $M_d = -X_0 - K_d C_y$ e $X_h > Z_h > Z_0 > 0$, fazendo com que as matrizes Z_h e Z_0 sejam arbitrariamente pequenas, próximas da matriz nula. Estas manipulações podem de fato ser introduzidas mantendo a factibilidade da solução sem que qualquer conservadorismo seja introduzido. Assim, considerando que $X_h > Z_h > Z_0 > 0$ com $Z_h \approx Z_0 \approx 0$ é factível, isso faz com que possamos reescrever o problema de otimização conforme o problema de programação convexa descrito em (43). A consequência dessas afirmações é que a função matricial $Z(t)$ sujeita às condições de contorno $Z(0) = Z_0$ e $Z(h) = Z_h$ arbitrariamente próxima de zero para todo $t \in [0, h]$ seja também factível. Assim, os parâmetros que definem o filtro ótimo \mathcal{H}_2 podem ser reescritos como

$$\hat{A}_c = (Z - X)^{-1} (-X A - A' Z - \dot{Z}) = A \quad (47)$$

$$\hat{C}_c = K_c = C_z \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_d &= (Z_0 - X_0)^{-1} M_d = -X_0^{-1} (-X_0 - K_d C_y) \\ &= I + X_0^{-1} K_d C_y \end{aligned} \quad (49)$$

$$\hat{B}_d = (Z_0 - X_0)^{-1} K_d = -X_0^{-1} K_d \quad (50)$$

Por fim, a equação (42) sendo factível implica em $X_h > 0$ que, por sua vez, implica que as soluções factíveis para a DLMI (41) são tais que $X(t) > 0, \forall t \in [0, h]$. Assim, a imposição de $X > Z > 0$, em (30), será satisfeita uma vez que os valores de $Z > 0$ são arbitrariamente próximos de zero, concluindo, assim, a prova.

Como era de se esperar, o filtro ótimo para sistemas amostrados é invariante no tempo podendo ser facilmente projetado a partir de um problema de programação convexa descrito por uma DLMI com uma condição de contorno expressa por uma LMI. As matrizes projetadas em (47)–(50) quando substituídas na estrutura de (4)–(5), permitem

escrever o seguinte modelo invariante no tempo para o filtro

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t), \hat{x}(0) = 0 \quad (51)$$

$$\hat{x}(t_k) = \hat{x}(t_k^-) - X_0^{-1}K_d(y(t_k) - C_y\hat{x}(t_k^-)) \quad (52)$$

É interessante notar que o modelo interno para a equação contínua do filtro é idêntica à da planta. Já a estrutura discreta apresenta saltos dependendo justamente do erro que ocorre entre a saída do filtro e da planta. Assim, quando há uma convergência entre a saída do filtro e a saída da planta, o filtro não apresentará mais saltos e o seu comportamento dinâmico será o mesmo da planta. Esta formulação recupera o observador ótimo para o caso \mathcal{H}_2 em estudo.

5. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Para resolver o problema de filtragem ótima \mathcal{H}_2 em sistemas amostrados, assim como em outros problemas de otimização aplicada em sistemas amostrados, é necessário resolver um problema convexo descrito através de desigualdades diferenciais. Uma forma simples de obter a solução desejada é considerar a solução como sendo linear por partes, como proposto em Gonçalves et al. (2018). Aquele trabalho fornece uma solução (quando existir), com uma precisão desejada, para DLMIs descritas na forma $\mathcal{L}(\dot{P}, P) < 0$ a serem resolvidas em um intervalo de tempo finito $t \in [0, h]$, em que $\mathcal{L}(\cdot)$ corresponde a um operador linear. A aproximação de que trata Gonçalves et al. (2018) é dada por

$$\mathcal{L}\left(\frac{P_{i+1} - P_i}{\eta}, P_i\right) < 0 \quad (53)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{P_{i+1} - P_i}{\eta}, P_{i+1}\right) < 0 \quad (54)$$

para todo $i = 0, \dots, n_\theta - 1$ e $\eta = h/n_\theta$, em que n_θ é o número de subintervalos de $[0, h]$. O conjunto de equações (53)–(54) garante a continuidade da solução $P(t)$. Além disso, a segmentação crescente do intervalo $[0, h]$ garante a convergência do resultado para a solução de $\mathcal{L}(\dot{P}, P) < 0$, desde que seja feita a escolha de $n_\theta = 2^\theta$, tal que $\theta \in \mathbb{N}$, uma vez que desta forma é possível a comparação entre as soluções obtidas sucessivamente.

Outro ponto importante que concerne a resolução de DLMIs segundo Gonçalves et al. (2018) é o fato de a solução obtida ser ótima dada a restrição imposta para a solução, no caso, contínua e linear por partes. Esta condição não é verificada em outras aproximações possíveis.

6. EXEMPLOS

Nesta seção serão apresentados dois exemplos de forma a ilustrar os resultados teóricos obtidos e apresentados anteriormente. As simulações foram realizadas utilizando a ferramenta LMILab[®], do Matlab[®], em um computador a 3.6 [GHz] AMD Ryzen 7 PRO 3700 8-Core.

6.1 Filtragem ótima em um helicóptero 3DOF

Considere o modelo de uma planta didática de um helicóptero de dois motores com três graus de liberdade, conforme apresentado na referência Lima (2013). Este

Tabela 1. Comparação entre os valores projetados e simulados para o índice de desempenho ϱ_2^2 definido em (12)

| θ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|
| Proj. | 23,1 | 22,5 | 22,0 | 21,7 | 21,6 | 21,5 | 21,4 |
| Sim. | 21,7 | 21,4 | 21,3 | 21,3 | 21,2 | 21,2 | 21,2 |

sistema é originalmente instável, de dimensão $n_x = 6$ e considera-se a ação de controle nula (malha aberta), ver Lima (2013). Os estados do sistema correspondem a $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]'$, onde x_1 é o ângulo de arfagem, x_3 é o ângulo de elevação, x_5 é o ângulo de deslocamento. Os estados x_1, x_3 e x_5 são medidos. O restante dos estados, x_2, x_4 e x_6 , representam as respectivas taxas de variação temporal de x_1, x_3 e x_5 , e não são diretamente medidos. Assim, as matrizes do sistema são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,01 & 0 & -1,19 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,46 \end{bmatrix},$$

$$E' = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ -5]$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O objetivo é projetar um filtro que estime o estado x_6 (taxa de variação do ângulo de deslocamento) considerando um período de amostragem de $h = 0,5$ [s]. A matriz de estimação C_z é então dada por

$$C_z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (55)$$

Na Tabela 1 são apresentados os valores do limitante superior do índice de performance ϱ_2^2 obtidos através da solução do problema de programação convexa proposto no Teorema 3, para cada $\theta \in [0, 6]$. Nessa tabela podemos verificar a diminuição de ϱ_2 com o aumento do número de subintervalos escolhidos através da definição de θ . Após $\theta = 6$ o decréscimo no valor do limitante superior é pequeno ocasionando apenas o aumento do tempo para resolução do problema. Tomando-se $\theta = 6$, as matrizes da dinâmica discreta do filtro obtidas foram

$$A_d = \begin{bmatrix} 0,9985 & 0 & 1,2617 & 0 & 0,0001 & 0 \\ 0,0001 & 1,0000 & -0,0415 & 0 & 0,0000 & 0 \\ -0,0001 & 0 & -0,0001 & 0 & -0,0000 & 0 \\ -0,0005 & 0 & -0,6366 & 1,0000 & -0,0000 & 0 \\ 0,0000 & 0 & 0,0001 & 0 & 0,0000 & 0 \\ 0,0024 & 0 & -0,9952 & 0 & -0,6033 & 1,0000 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_d = \begin{bmatrix} 0,0015 & -1,2617 & -0,0001 \\ -0,0001 & 0,0415 & -0,0000 \\ 0,0001 & 1,0001 & 0,0000 \\ 0,0005 & 0,6366 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0001 & 1,0000 \\ -0,0024 & 0,9952 & 0,6033 \end{bmatrix}$$

A Figura 1 mostra o comportamento da saída estimada, $\hat{z}_e(t)$, e da saída $z_e(t)$, a partir da condição inicial $\xi(0) = HJ_c + J_d$. Para esta simulação, a linha contínua corresponde à saída real a ser estimada e a linha tracejada à saída estimada fornecida pelo filtro. Notamos perfeitamente que

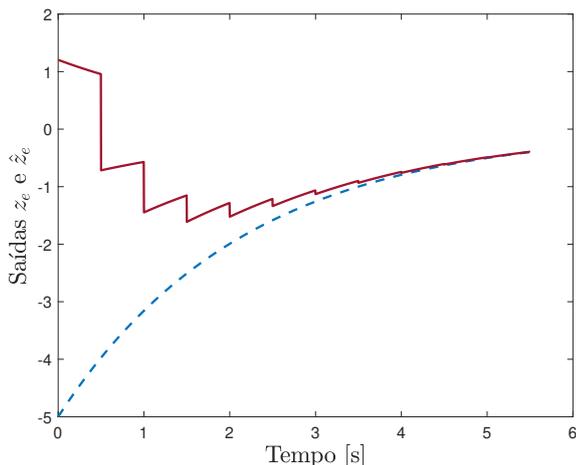


Figura 1. Estado estimado \hat{x}_6 (linha tracejada) e real x_6 (linha contínua) em função do tempo.

a saída estimada converge para a saída real, bem como o efeito da amostragem nessa estimação.

6.2 Exemplo numérico

Outro exemplo de interesse consiste em comparar o resultado obtido através do projeto ótimo, Teorema 3, com o resultado do observador subótimo proposto em Pereira et al. (2021). Neste caso, as matrizes do sistema são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; C_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}'; C_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}' \quad (56)$$

com $E_y = [1]$. Para $\theta = 6$ e $h = 1$ [s], obtemos as matrizes do filtro ótimo dadas por

$$\hat{A}_d = \begin{bmatrix} 0,1961 & 0 \\ -0,5811 & 1,000 \end{bmatrix}; \hat{B}_d = \begin{bmatrix} 0,8039 \\ 0,5811 \end{bmatrix}$$

o que garante o valor do índice de desempenho $\rho_2^2 = 0,7868$, que corresponde a um erro de aproximadamente 2% em relação ao valor simulado. Além disso, no projeto considerado em Pereira et al. (2021), o período de amostragem máximo para o qual as condições permanecem factíveis devido às condições serem mais conservadoras, é de $h = 2,1$ [s], enquanto que para o caso aqui tratado a factibilidade ocorre para períodos de amostragem de até $h = 6,0$ [s]. Assim, como pode ser observado no exemplo do helicóptero 3DOF, a convergência do erro de estimação ocorre mesmo para o caso de sistemas instáveis.

7. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou o projeto de um filtro linear amostrado variante no tempo baseado na minimização da norma \mathcal{H}_2 do erro de estimação. O projeto foi apresentado na forma de restrições convexas expressas através de DLMIs e de LMIs. A partir do projeto realizado, as condições de otimalidade aplicadas à estrutura de filtro variante no tempo, como esperado, recaíram em uma estrutura invariante no tempo, que neste caso, corresponde a exatamente o projeto do observador ótimo \mathcal{H}_2 , baseado no modelo interno da planta. Dois exemplos emprestados da literatura, ambos originalmente instáveis, ilustraram e permitem comparar os resultados apresentados com outros existentes na literatura.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pelo apoio a este projeto de pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Ariola, M., De Tommasi, G., Mele, A., and Tartaglione, G. (2020). On the numerical solution of differential linear matrix inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 185, 540–553.
- Briat, C. (2013). Convex conditions for robust stability analysis and stabilization of linear aperiodic impulsive and sampled-data systems under dwell-time constraints. *Automatica*, 49, 3449–3457.
- Gabriel, G.W. and Geromel, J.C. (2021). Sampled-data control of lur'e systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 40, 100994.
- Geromel, J.C. and Souza, M. (2015). On an lmi approach to optimal sampled-data state feedback control design. *International Journal of Control*, 88, 2369–2379.
- Geromel, J.C., Colaneri, P., and Bolzern, P. (2019). Differential linear matrix inequality in optimal sampled-data control. *Automatica*, 100, 289–298.
- Geromel, J.C. and Gabriel, G.W. (2015). Optimal \mathcal{H}_2 state feedback sampled-data control design of markov jump linear systems. *Automatica*, 54, 182–188.
- Goebel, R., Sanfelice, R.G., and Teel, A.R. (2009). Hybrid dynamical systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 29, 28–93.
- Gonçalves, T.R., Gabriel, G.W., and Geromel, J.C. (2018). Differential linear matrix inequalities optimization. *IEEE Control Systems Letters*, 3, 380–385.
- Ichikawa, A., Katayama, H., et al. (2001). *Linear time varying systems and sampled-data systems*, volume 265. Springer-Verlag London.
- Lima, D.S. (2013). *Controle Preditivo Explícito com Múltiplos Modelos para Acomodação de Falhas*. Master's thesis, Divisão de Engenharia Eletrônica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- Pereira, H.W., Gabriel, G.W., and de Oliveira, A.M. (2021). Projeto de um observador de estados para sistemas lineares amostrados através de condições lmi. In *XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente – SBAI 2021*, 720–725. SBA.
- Scherer, C.W. (1996). Mixed $\mathbb{H}_2/\mathbb{H}_\infty$ control for time-varying and linear parametrically-varying systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6, 929–952.
- Souza, M., Fioravanti, A.R., and Geromel, J.C. (2014). \mathcal{H}_2 sampled—data filtering of linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 62(18), 4839–4846.
- Sun, W., Nagpal, K.M., and Khargonekar, P.P. (1993). h_∞ control and filtering for sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38, 1162–1175.
- Yamamoto, Y. (1990). New approach to sampled-data control systems—a function space method. In *29th IEEE Conference on Decision and Control*, 1882–1887. IEEE.
- Zhang, D., Shi, P., Wang, Q.G., and Yu, L. (2017). Analysis and synthesis of networked control systems: A survey of recent advances and challenges. *ISA transactions*, 66, 376–392.