

Análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas fuzzy T-S discretos no tempo com premissas parcialmente combinadas^{*}

I. H. da Cunha^{*} C. P. Castro^{**} L. F. P. Silva^{*,**} V. J. S. Leite^{*,**}

^{*} Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) do CEFET-MG/UFSJ, Av. Amazonas, 7675, Belo Horizonte, MG, Brasil, 30.510-000, (e-mails: italohenriquedacunha@gmail.com, luis@cefetmg.br e valter@ieee.org)

^{**} Departamento de Engenharia Mechatronica, CEFET-MG, Álvares Azevedo, 400, 35503-822, Divinópolis, MG, Brasil. (e-mails: carla.esc1@hotmail.com)

Abstract: This work proposes a relaxation that results in better stability analysis and controller synthesis for discrete-time Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems subject to partially matched assumptions. This case, in which the controller and system have the same number of rules but differ in the parameters, is a frequent case in control applications, which has a great practical interest. The proposed approach is based on representing the error between two membership functions (MFs) through a second-order polynomial. The conditions are proposed as convex optimization procedures formulated as linear matrix inequalities (LMIs), guaranteeing efficient numerical solutions. Two examples illustrate the proposal; where the first one compares the proposed analysis condition with one found in the literature. The second example uses the synthesis condition to guarantee the stability of the closed-loop system, and the T-S fuzzy controller has membership functions different from the T-S fuzzy system. The results achieved suggest the superiority of the proposed method.

Resumo: Este trabalho propõe uma relaxação que leva a melhores resultados tanto na análise de estabilidade quanto na síntese de controladores para sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) a tempo discreto sujeitos a premissas parcialmente combinadas. Esse caso, em que controlador e sistema possuem o mesmo número de regras, mas essas diferem entre si, trata um caso frequente em aplicações de controle, possuindo grande interesse prático. A abordagem proposta baseia-se na representação do erro entre duas funções de pertinência (MFs, do inglês *Membership Functions*) por meio de um polinômio de segunda ordem. As condições são propostas na forma de procedimentos de otimização convexa formulados como desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), garantindo soluções numéricas eficientes. Dois exemplos ilustram a proposta. No primeiro, a condição de análise proposta é comparada com uma encontrada na literatura. O segundo exemplo usa a condição de síntese para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, sendo que o controlador fuzzy T-S possui funções de pertinência diferentes do sistema fuzzy T-S. Os resultados alcançados sugerem a superioridade do método proposto.

Keywords: Discrete-time systems, partially matched premises, LMIs, Lyapunov function.

Palavras-chaves: Sistemas discretos no tempo, premissas parcialmente combinadas, LMIs, função de Lyapunov.

1. INTRODUÇÃO

A modelagem fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) tem sido bastante utilizada para lidar com sistemas não lineares a partir do desenvolvimento de condições de análise estabilidade e síntese de controladores (Lee and Joo, 2014; Lee et al., 2011; Li et al., 2015; Sung et al., 2012; Zhang et al., 2011). De maneira geral, um modelo fuzzy T-S descreve um sistema não linear por um conjunto de regras

fuzzy SE-ENTÃO conectadas pela MF. As MFs dependem das variáveis de premissas, que podem ser dependentes do tempo, dos estados ou das entradas do sistema. Uma aplicação do modelo fuzzy T-S é quando a MF depende de estados, de modo que as variáveis de premissas são alguns ou todos os estados do sistema. Neste caso, tem-se um sistema quasi-LPV (Guerra et al., 2009).

A maioria dos trabalhos publicados na literatura adota a abordagem de premissas perfeitamente combinadas, o que significa que tanto o modelo quanto o controlador assumem a mesma função de pertinência (Nguyen et al., 2020; Pala-

^{*} I. H. Cunha agradece ao CEFET-MG pelo suporte financeiro. V. J. S. Leite agradece ao apoio do CNPq via projeto 311208/2019-3.

nimuthu et al., 2022; Li and Tanaka, 2021; Chen et al., 2021). No entanto, em situações reais é razoável supor que não há uma perfeita combinação entre as MF do processo e do respectivo controlador, principalmente devido a diferença entre o sistema real e modelo matemático não linear que o representa. Neste contexto, surgem estudos envolvendo premissas parcialmente combinadas (PMP, do inglês *Partially Matched Premises*) (Lam and Narimani, 2009) e premissas imperfeitamente combinadas (IMP, do inglês *Imperfectly Matched Premises*) (Zhou et al., 2021), veja mais detalhes em (Lam, 2018). No caso do PMP, o número de variáveis de premissas é o mesmo tanto para o modelo quanto para o controlador fuzzy, porém essas variáveis podem assumir valores diferentes. Assim, tem-se MFs distintas com o mesmo número de regras. No caso mais geral, IMP, tanto o número de variáveis quanto as próprias variáveis de premissas se diferem, resultando em MFs distintas com números de regras também diferentes.

Neste artigo, condições de análise de estabilidade e síntese de controladores fuzzy T-S que resultam em sistemas de controle fuzzy T-S discretos no tempo com premissas parcialmente combinadas são propostas. Para lidar com a diferença entre as MFs do sistema e do controlador, a MF do controlador fuzzy T-S foi reescrita como um polinômio de grau dois em função da MF do modelo fuzzy T-S mais um vetor auxiliar.

Essa abordagem difere das encontradas na literatura (Lee, 2018; Yang et al., 2019; Xie et al., 2020), pois utiliza o erro máximo entre a MF do sistema e a MF do controlador, tanto na análise de estabilidade quanto na síntese de controladores. Esse fato, além de novo, permite a regulação do erro, de modo que garanta a estabilidade assintótica e reduza o conservadorismo.

As novas condições convexas formuladas em termos de LMIs foram desenvolvidas a partir de uma função candidata de Lyapunov. Dois exemplos foram apresentados. No primeiro, testou-se a condição de análise, comparando-a com resultados semelhantes encontrados na literatura, mostrando que a condição de análise proposta obtém melhores resultados. De posse do modelo não linear de um sistema real que simula um pêndulo-hélice, no último, o controlador fuzzy T-S foi projetado a partir da condição de síntese proposta. Esse controlador foi aplicado no modelo não linear, mostrando que os resultados encontrados têm uma interface limitada com os sistemas práticos.

Na próxima seção, foi formulado o problema do qual trata este artigo, apresentando a estrutura do modelo fuzzy T-S e do controlador. Na Seção III, alguns resultados preliminares foram apresentados a fim de apoiar os principais resultados apresentados na Seção IV. Dois exemplos numéricos ilustram a eficácia da abordagem proposta e estabelecem comparações com abordagens semelhantes na literatura. A Seção VI contém as principais conclusões deste artigo.

Notação: Para um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ significa que todos os componentes de x , denotados por x_i , são não negativos. Para duas matrizes simétricas quadradas reais, A e B , $A > B$ significa que $A - B$ tem autovalores maiores que zero. A^\top denota a transposição de A . $\text{He}(A)$ significa $A + A^\top$. $\mathcal{G}(\sigma, \mu)$ é a distribuição normal, ou gaussiana, com desvio padrão σ e média μ . $\mathcal{R}(-1, 1)$ representa um

valor aleatório entre -1 e 1 , com distribuição uniforme. O símbolo \star representa blocos simétricos. O conjunto $[a, b]$ é definido como um intervalo com valores reais e $a \leq b$.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema não linear discreto no tempo representado por:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad (1)$$

em que $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada de controle do sistema. A função $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é Lipschitz e sem perda de generalidade, a origem é o ponto de equilíbrio do sistema, i.e., $f(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} = x(k+1)$. Assumindo que o sistema não linear (1) pode ser representado por um modelo fuzzy T-S como (Tanaka and Wang, 2001; Feng, 2009):

$$\begin{aligned} \text{SE} \quad & \phi_1(x(k)) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } \phi_\Psi(x(k)) \text{ é } M_\Psi^i, \\ \text{ENTÃO} \quad & x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

em que $\phi_\ell(x(k))$, $\ell = 1, \dots, \Psi$ são variáveis premissas escalares que, supostamente, dependem apenas dos estados, M_ℓ^i são conjuntos fuzzy e N é o número de regras. As matrizes $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são conhecidas. A partir do método de inferência fuzzy: fuzzificação singleton, produto de inferência fuzzy e defuzzificação média central (Feng, 2009); o sistema dinâmico é descrito como

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^N w_i(x(k)) \{A_i x(k) + B_i u(k)\}, \quad (3)$$

em que

$$\sum_{i=1}^N w_i(x(k)) = 1, \quad w_i(x(k)) \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, N, \quad \text{e} \quad (4)$$

$$w_i(x(k)) = \frac{\prod_{\ell=1}^{\Psi} \mu_{M_\ell^i}(\phi_\ell(x(k)))}{\sum_{q=1}^N \prod_{\ell=1}^{\Psi} \mu_{M_\ell^q}(\phi_\ell(x(k)))}$$

é a MF normalizada e $\mu_{M_\ell^i}(\phi_\ell(x(k)))$, $j = 1, \dots, N$, é o grau de pertinência correspondente ao conjunto fuzzy M_ℓ^i . Note que, $w_i(x(k))$ é uma função não linear de $x(k)$. Foi proposto, no presente artigo, a seguinte lei de controle:

$$\begin{aligned} \text{SE} \quad & \theta_1(x(k), k) \text{ é } O_1^j \text{ e } \dots \text{ e } \theta_\Psi(x(k), k) \text{ é } O_\Psi^j, \\ \text{ENTÃO} \quad & u(k) = K_j x(k), \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5)$$

em que $\theta_\ell(x(k), k)$, $\ell = 1, \dots, \Psi$ são variáveis premissas escalares e O_ℓ^j são conjuntos fuzzy. As matrizes $K_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são as matrizes de ganho da lei de controle. A saída inferida do controlador fuzzy é dada por

$$u(k) = \sum_{j=1}^N m_j(x(k), k) K_j x(k), \quad (6)$$

com

$$\sum_{j=1}^N m_j(x(k), k) = 1, \quad m_j(x(k), k) \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, N, \quad \text{e} \quad (7)$$

$$m_j(x(k), k) = \frac{\prod_{\ell=1}^{\Psi} \mu_{O_\ell^j}(\theta_\ell(x(k), k))}{\sum_{q=1}^N \prod_{\ell=1}^{\Psi} \mu_{O_\ell^q}(\theta_\ell(x(k), k))}$$

é a função de pertinência normalizada que é uma função não linear de $x(k)$ e $\mu_{O_\ell^j}(\theta_\ell(x(k),k))$, $j = 1, \dots, N$ é o grau de pertinência correspondente ao conjunto fuzzy O_ℓ^j .

Note que as funções de pertinência do controlador fuzzy T-S (5)–(6) e do modelo fuzzy T-S (2)–(3) são calculadas a partir de variáveis de premissas diferentes. Contudo, elas contêm o mesmo número de termos. Dessa forma, as funções de pertinência resultantes apresentam o mesmo número de regras, N , resultando em premissas parcialmente combinadas; para mais detalhes, veja (Lam, 2018). Vale destacar que a máxima diferença entre as funções de pertinência é uma informação importante para a determinação dos resultados principais deste trabalho, que serão apresentados a diante. Diante disso, a Definição a seguir apresenta como esse valor é obtido.

Definição 1. A máxima diferença percentual entre as MFs do controlador fuzzy T-S (5)–(6) e do modelo fuzzy T-S (2)–(3) em relação as MFs do modelo fuzzy T-S ($w_i(x(k))$) e seu complemento convexo ($1 - w_i(x(k))$), para todos os estados admissíveis ao longo do tempo, i.e., $x(k) \in \mathbb{R}^n$ para todo $k \geq 0$, é dada por

$$e = \max \left[\begin{array}{l} \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ x(k) \in \mathbb{R}^n \\ k \in \mathbb{N}}} \left(\frac{w_i(x(k)) - m_i(x(k),k)}{w_i(x(k))} \right), \\ \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ x(k) \in \mathbb{R}^n \\ k \in \mathbb{N}}} \left(\frac{m_i(x(k),k) - w_i(x(k))}{1 - w_i(x(k))} \right) \end{array} \right]. \quad (8)$$

Note que de (8) e da convexidade da MF w_i , tem-se que $e \in [0, 1]$. Além disso, para $e = 0$, tem-se a Compensação Distribuída Paralela (PDC, do inglês *Parallel Distributed Compensation*), em que $m_i = w_i$. Esse é o caso majoritário encontrado na literatura, em que se assume o perfeito conhecimento da função de pertinência do sistema, permitindo seu uso no projeto do controlador fuzzy (Feng, 2006). Quando $e > 0$, tem-se uma situação mais realista em que o conhecimento de w_i não é perfeito, havendo, portando, uma diferença entre a MF usada no controlador e no sistema. O pior caso ocorre quando $e = 1$, significando que os valores de w_i e m_i são completamente independentes, resultando na situação mais conservadora.

Aplicando a lei de controle (5)–(6) em (2)–(3), obtém-se o seguinte sistema fuzzy T-S de malha fechada:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^N w_i(x(k)) \left[A_i + B_i \sum_{j=1}^N m_j(x(k),k) K_j \right] x(k). \quad (9)$$

Assim, diante de todo o exposto acima, são propostos os seguintes problemas a serem tratados neste trabalho:

Problema 1. Dado o modelo fuzzy T-S (2)–(3) com a lei de controle (5)–(6) e dada as matrizes, K_j , $j = 1, \dots, N$, e um erro absoluto máximo entre as MFs do sistema e os do controlador, verifique se o sistema fuzzy T-S em

malha fechada (9) com premissas parcialmente combinadas resultante é assintoticamente estável.

Problema 2. Dado o modelo fuzzy T-S (2)–(3) e o erro absoluto máximo entre as MFs do sistema e o do controlador, determine as matrizes K_j , $j = 1, \dots, N$, tais que o sistema de malha fechada fuzzy T-S (9) resultante com premissas parcialmente combinadas é assintoticamente estável.

3. RESULTADOS PRELIMINARES

Nossos principais resultados são baseados na Teoria de Lyapunov e na relaxação das condições propostas em (da Cunha et al., 2020) para tratar o erro entre as MFs do modelo e controlador. Assumimos uma candidata à função de Lyapunov, $V(x(k)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x(k)) =$

$$x^\top(k) \sum_{i=1}^N w_i P_i x(k), \text{ em que} \quad \alpha_0(\|x(k)\|) \leq V(x(k)) \leq \alpha_1(\|x(k)\|), \quad (10)$$

com matrizes definidas positivas $P_i = P_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ e $\alpha_j(\cdot)$, $j = 0, 1$, são funções de classe \mathcal{K}_∞ ¹. Além disso, é necessário que (Vidyasagar, 1993):

$$\Delta V(x(k)) = x^\top(k+1) \sum_{j=1}^N w_j P_j x(k+1) - x^\top(k) \sum_{i=1}^N w_i P_i x(k) \leq -\alpha_2(\|x(k)\|), \quad (11)$$

para todo $x(k)$ pertencente à trajetória do sistema, com $i, j = 1, \dots, N$ e $\alpha_2(\|x(k)\|)$ uma função de classe \mathcal{K}_∞ . O seguinte resultado é usado no desenvolvimento das contribuições deste trabalho.

Lema 1. Seja $w \in \mathbb{R}^N$ um vetor que satisfaz $\sum_{i=1}^N w_i = 1$, $w_i \geq 0$. Então

$$\sum_{i=1}^N w_i \sum_{i=1}^N w_i = \left(\sum_{i=1}^N w_i \right)^2 \quad (12)$$

Prova 1. Note que a expressão em (12) pode ser reescrita, usando a convexidade do domínio, como

$$\sum_{i=1}^N w_i \left(\sum_{j=1}^N w_j \right) = \sum_{i=1}^N w_i \left(\sum_{i=1}^N w_i \right) = \left(\sum_{i=1}^N w_i \right)^2$$

o que vale inclusive para $i = j$.

O Lema a seguir apresenta uma relaxação do que foi baseado em (da Cunha et al., 2020, Lema 2), ao utilizar uma função de segunda ordem na MF para relacionar as MFs do controlador e sistema, para uma dada faixa de diferenças entre essas funções, dada por $e \geq 0$.

Lema 2. Considere a máxima diferença entre as MFs do controlador (5)–(6) e do modelo fuzzy T-S (2)–(3) dada por e , como em (8). Então, existe uma função vetorial pertencente ao simplex unitário $h(w(x(k)), m(x(k),k)) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ que permite escrever a MF do controlador, $m(x(k),k)$ como

$$m_i = w_i - \frac{e}{2} w_i - \frac{e}{2} w_i \sum_{j=1}^N w_j + e h_i, \quad (13)$$

¹ Uma função $\gamma : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ é de classe \mathcal{K}_∞ se é estritamente crescente, $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$.

assegurando que $m(x(k),k)$ pertence ao intervalo

$$w_i(1 - e) \leq m_i \leq w_i(1 - e) + e. \quad (14)$$

Ressaltamos que o Lema 2 usa uma relaxação de segunda ordem em w_i , devido ao produto $w_i \sum_{j=1}^N w_j$. Como é visto mais adiante, esse termo é explorado na análise de estabilidade e síntese de controladores para obtenção de condições menos conservadoras.

Prova 2. Note que, por construção, m_i precisa, a cada instante k , satisfazer (14) conforme a Definição 1. Assim, o limite inferior pode ser obtido de (14) pode ser verificado em (13) com auxílio do Lema 1 com $h_i = 0$, enquanto que o limite superior de (14) é satisfeito em (13) com $h_i = 1$. Portanto, para qualquer valor de m_i na faixa dada em (14), existe $0 \leq h_i \leq 1$ que satisfaz (13). Além disso, somando-se (13) para $i = 1, \dots, N$, usando-se a convexidade de $w(x(k))$ e $m(x(k),k)$ e o Lema 1, obtém-se

$$\sum_{i=1}^n h_i = \frac{\sum_{i=1}^n m_i - \sum_{i=1}^n w_i \left(1 - \frac{e}{2} - \frac{e}{2} \sum_{i=1}^n w_i\right)}{e} = 1, \quad (15)$$

que demonstra a convexidade de $h(k)$. \square

Considerando o Lema 2, substituímos m_j em (9) pelo lado direito de (13) e após algumas manipulações algébricas obtemos:

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \sum_{\ell=j}^N \sum_{q=1}^N \sigma w_i w_j w_\ell h_q \mathcal{A}_{ij\ell q} x(k), \quad (16)$$

em que

$$\mathcal{A}_{ij\ell q} = \frac{1}{6} \left\{ 2(A_i + A_j + A_\ell) + 2e(B_i + B_j + B_\ell)K_q + (1 - e)(B_i K_j + B_j K_i + B_i K_\ell + B_\ell K_i + B_j K_\ell + B_\ell K_j) \right\}, \quad (17)$$

$$e \sigma = \begin{cases} 1, & i = j = \ell; \\ 3, & i = j \neq \ell \text{ ou } i \neq j = \ell; \\ 6, & i \neq j \neq \ell. \end{cases} \quad (18)$$

4. RESULTADOS PRINCIPAIS

As principais contribuições deste artigo são dadas nos seguintes teoremas que fornecem soluções para os problemas 1 e 2.

4.1 Condição de análise de estabilidade

Teorema 1. Considere o modelo fuzzy T-S (2)–(3) com matrizes de ganho K_i , $i = 1, \dots, N$, dadas e um escalar $e \in [0, 1]$ que satisfaz a Definição 1. Suponha que existam matrizes definidas positivas $P_i = P_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ e matrizes $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que as seguintes LMIs sejam verificadas para $i = 1, \dots, N$, $j = i, \dots, N$, $\ell = j, \dots, N$, $q = 1, \dots, N$ e $o = 1, \dots, N$:

$$\begin{bmatrix} P_o + \text{He}\{F\} & -F\mathcal{A}_{ij\ell q} - E \\ \star & \text{He}\{E\mathcal{A}_{ij\ell q}\} - \frac{P_i + P_j + P_\ell}{3} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (19)$$

com $\mathcal{A}_{ij\ell q}$ dado em (17).

Então, o sistema fuzzy T-S em malha fechada com premissas parcialmente combinadas (9) é assintoticamente estável.

Prova 3. Ao substituir (17) em (19), multiplicar por w_i , w_j , w_ℓ e h_q , e somar para $i = 1, \dots, N$, $j = i, \dots, N$, $\ell = j, \dots, N$, $o = 1, \dots, N$, $q = 1, \dots, N$ com σ dado em (18), e considerando o Lema 2, tem-se

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \star & \Lambda_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

com,

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \sum_{o=1}^N w_o [P_o + \text{He}\{F\}] \\ \Lambda_2 = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i m_j [F(A_i + B_i K_j) + E] \\ \Lambda_3 = \sum_{j=1}^N w_i m_j \left\{ \text{He}\{E(A_i + B_i K_j)\} - P_i \right\} \end{cases} \quad (21)$$

A pré e pós-multiplicação de Λ por ξ^\top e ξ , respectivamente, com $\xi = [x(k+1)^\top \ x(k)^\top]^\top$, e usando-se o lado direito de (9) substituído por $x(k+1)$, resulta em

$$\Delta V = x^\top(k+1) \sum_{o=1}^N w_o P_o x(k+1) - x^\top(k) \sum_{i=1}^N w_i P_i x(k) < 0, \quad (22)$$

Além disso, como as matrizes P_i , para $i = 1, \dots, N$, são simétricas e positivas definidas, então (10) é verificado com $\alpha_0(\|x(k)\|) = \lambda_{\min}(P_i)\|x(k)\|$ e $\alpha_1(\|x(k)\|) = \lambda_{\max}(P_i)\|x(k)\|$, podendo-se considerar $\alpha_2(\|x(k)\|) = \epsilon\|x(k)\|$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno assegurando-se (11). Portanto, $V(x(k))$ é uma função de Lyapunov, garantindo que o sistema fuzzy T-S em malha fechada com premissas parcialmente combinadas (9) seja assintoticamente estável. \square

4.2 Condição de síntese

Teorema 2. Considere o modelo fuzzy T-S (2)–(3) e um escalar $e \in [0, 1]$ que satisfaz a Definição 1. Suponha que existam matrizes definidas positivas $\tilde{P}_i = \tilde{P}_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$ e matrizes $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $W \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ tais que os seguintes LMIs sejam verificadas para $i = 1, \dots, N$, $j = i, \dots, N$, $\ell = j, \dots, N$, $q = 1, \dots, N$ e $o = 1, \dots, N$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_o + \tilde{F} + \tilde{F}^\top & -\tilde{\mathcal{A}}_{ij\ell q} \\ \star & -\frac{\tilde{P}_i + \tilde{P}_j + \tilde{P}_\ell}{3} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (23)$$

com

$$\tilde{\mathcal{A}}_{ij\ell q} = \frac{1}{6} \left\{ 2(A_i + A_j + A_\ell)\tilde{F} + 2e(B_i + B_j + B_\ell)W_q + (1 - e)(B_i W_j + B_j W_i + B_i W_\ell + B_\ell W_i + B_j W_\ell + B_\ell W_j) \right\}. \quad (24)$$

Então, a lei de controle de (5)–(6) com ganhos de realimentação de estado dados por

$$K_i = W_i \tilde{F}^{-1} \quad (25)$$

assegura que a malha fechada com o modelo fuzzy T-S (2)–(3) é assintoticamente estável.

Prova 4. Inicialmente, note que da factibilidade de (24), tem-se assegurada a regularidade de \tilde{F} . Assim, substituindo-se W_i por $K_i \tilde{F}$ em (23)–(24), pré- e pós-multiplicando-se a desigualdade resultante por $\text{diag}(F, F)$ e $\text{diag}(F, F)^\top$,

respectivamente, recuperam-se as condições do Teorema 1 com $\tilde{P}_i = F^{-1}P_iF^{-\top}$, $i = 1, \dots, N$, $\tilde{F} = F^{-1}$ e $E = 0$, assegurando-se, portanto, a estabilidade assintótica da malha fechada sob condições de premissas parcialmente combinadas. \square

Observação 1. Ressaltamos que as condições de análise de estabilidade e de síntese de controladores fuzzy apresentadas nos Teoremas 1 e 2 recorrem ao Lema 2, permitindo um tratamento direto do erro entre as funções de pertinência do controlador e do sistema controlado, o que na literatura é feito, em geral, de forma indireta. Essas condições oferecem melhores resultados que a abordagem proposta por da Cunha et al. (2020) (para o caso contínuo tempo) graças ao Lema 2 que emprega uma função de segunda ordem para modelar o erro entre as MFs.

5. EXEMPLOS

Na sequência, a abordagem proposta é aplicada em dois exemplos. O primeiro deles permite comparar os resultados alcançados com o Teorema 1 com a abordagem proposta por Lam and Narimani (2009). O segundo exemplo usa o Teorema 2 para projetar os ganhos de um controlador fuzzy T-S de tempo discreto para garantir a estabilidade do modelo não linear de um sistema pêndulo-hélice. Nos dois casos, os sistemas fuzzy T-S e os controladores fuzzy T-S não compartilham as mesmas MFs, o que invalida a aplicação de técnicas como as propostas em (Peng et al., 2018).

5.1 Exemplo 1

Considere um sistema não linear modelado pela representação fuzzy T-S com duas regras ($N = 2$):

$$\begin{aligned} \text{SE } x_1(k) \text{ is } M_1^i, \\ \text{ENTÃO } x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k), \end{aligned} \quad (26)$$

em que

$$\begin{aligned} A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -0,1 & -0,5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a & -1 \\ -0,1 & -0,25 \end{bmatrix}, \\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

com $1 \leq a \leq 4$ e $0,8 \leq b \leq 1,8$. Os ganhos em malha fechada, $K_i, i = 1, 2$, foram determinados de tal forma que os polos de $A_i + B_i K_i$ estejam localizados em 0,5 (condição apenas necessária para a estabilidade da malha fechada). O objetivo deste exemplo é avaliar as condições propostas no Teorema 1 e em (Lam and Narimani, 2009, Theorem 3), verificando a região de valores de (a, b) para a qual a malha fechada é certificada como estável. Quanto maior a região certificada, melhor (ou menos conservadora) é a condição.

O sistema fuzzy T-S e o controlador fuzzy T-S não compartilham as MFs, que são dadas por:

$$w_1(x(k)) = \frac{\left(1 - \frac{(\sin(x_1(k))+1) \sin(|x_1(k)|^{-4})^5}{40(1+e^{[-100x_1(k)^3(1-x_1(k))])}\right) \cos(x_1(k))^2}{1 + e^{[-2,5x_1(k)(3 + \frac{x_1(k)}{0,42})]}}$$

$$w_2(x(k)) = 1 - w_1(x(k)), m_1(x(k), k) = 0,7144\mathcal{G}(0,38, 0,38) + 0,05 \text{ e } m_2(x(k), k) = 1 - m_1(x(k), k) \text{ com } x_1(k) \in$$

$[-\pi/2 \pi/2]$. Neste exemplo, assumimos $e = 0,16$ e usamos o Lema 2 que permite escrever a MF do controlador em termos de w_i de acordo com (13) para algum vetor $h(k) \in \mathbb{R}^2$ pertencente ao simplex unitário. Note que não é necessário determinar esse vetor, mas apenas assegurar sua existência, o que é feito pelo Lema 2.

Na Figura 1, as linhas pontilhadas azuis ilustram a faixa tolerável de excursionamento de m_i , indicadas pelas linhas contínuas vermelhas, para $e = 0,16$ e as expressões de w_i dadas acima, que são indicadas nessa figura pelas linhas contínuas pretas. Nota-se que a condição (14) é satisfeita para todos os valores de x_1 . Se factíveis, as condições de análise do Teorema 1 asseguram que qualquer MF m_i que excursiona na faixa $w_i(1 - e)$ a $w_i(1 - e) + e$ resultam em uma malha fechada estável.

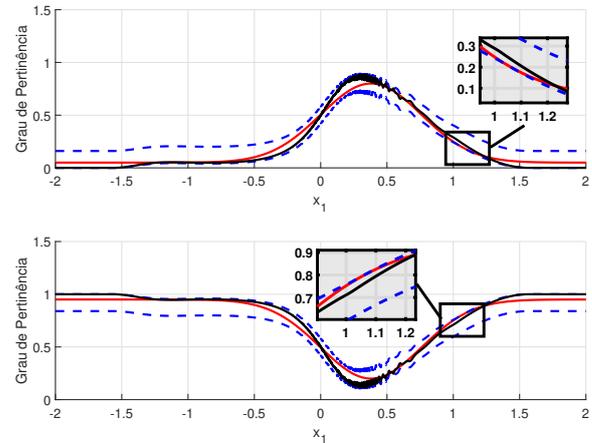


Figura 1. Funções de pertinência m_i (—), w_i (—) e os limites estabelecidos no Lema 2 (14) (---), para $e = 0,16$.

A comparação entre os desempenhos das condições do Teorema 1 e (Lam and Narimani, 2009, Lema 3) para este exemplo pode ser vista na Figura 2, na qual foi feito um grid nos valores do par (a, b) e verificou-se para cada ponto se o sistema fuzzy em malha fechada é estável. Os pontos marcados com “o” foram validados usando as condições do Teorema 1 enquanto os pontos marcados com “.” foram certificados usando (Lam and Narimani, 2009, Lema 3). A condição de análise proposta neste trabalho alcança uma quantidade de pontos factíveis 15,3% maior do que a condição proposta por Lam and Narimani (2009), ilustrando seu menor conservadorismo.

5.2 Exemplo 2

Seja o sistema pêndulo-hélice representado na Figura 3.

Nesse sistema, a posição angular do pêndulo é medida por um potenciômetro instalado na articulação pêndulo com a estrutura fixa. Utilizando a segunda lei de Newton aplicada ao movimento rotacional, pode-se modelar a dinâmica desse sistema por

$$J\ddot{\theta} = F_e \ell_m - (P_h \ell_h + P_m \ell_m) \sin(\theta) - \mu\dot{\theta}, \quad (27)$$

em que, $J = 0,001\text{kg}\cdot\text{m}^2$ é o momento de inércia, $\ell_m = 0,575\text{m}$ é a distância entre o potenciômetro e o motor,

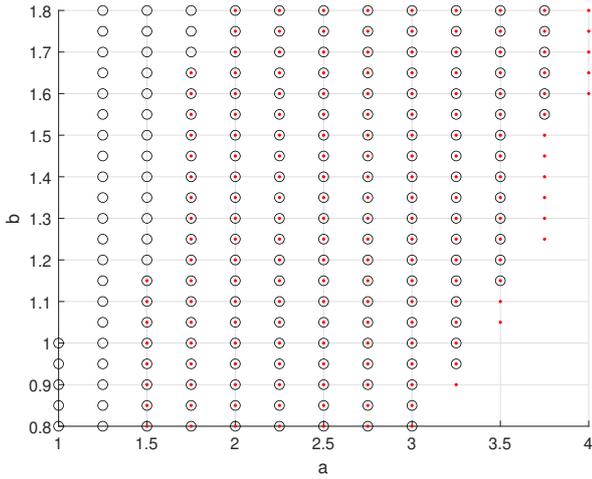


Figura 2. Região de estabilidade certificada pelo (Lam and Narimani, 2009, Teorema 3) (·) e pelo Teorema 1 com $e = 0,16$ (o).

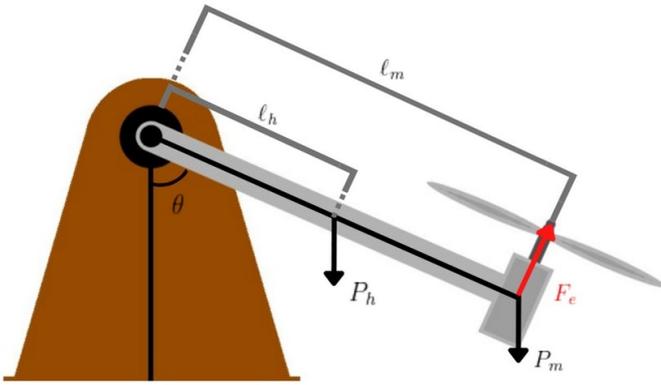


Figura 3. Representação do sistema pêndulo-hélice.

$l_h = 0,275\text{m}$ é a distância entre o potenciômetro e o centro de massa do pêndulo, $P_m = 0,0218\text{kgf}$ é o peso do motor, $P_h = 0,002\text{kgf}$ é o peso do pêndulo e $\mu = 0,00108 \text{ kgf}/(\text{m/s})$ é o coeficiente de amortecimento.

Para projetar os controladores digitais para esse sistema, foi seguida a abordagem usada por Lopes et al. (2020), que emprega a discretização de Euler. Foi selecionado o período de amostragem de 0,02s. Em seguida, foi determinado o modelo fuzzy T-S (2) de duas regras ($N = 2$) que descreve o sistema discreto para $x_1 = \theta \in [0 \pi/2]$, em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9983 & 0,0198 \\ -0,165 & 0,977 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0,9987 & 0,02 \\ -0,1297 & 0,9959 \end{bmatrix},$$

$B_1 = B_2 = [0 \ 7,64]^\top$ e as MFs:

$$w_1 = \frac{\sin(x_1) - \frac{2}{\pi}x_1}{1 - \frac{2}{\pi}x_1}, \quad w_2 = \frac{x_1 - \sin(x_1)}{1 - \frac{2}{\pi}x_1}.$$

para $\sin(x_1) \neq 0$ e, caso contrário, $w_1 = 1$ e $w_2 = 0$. Neste exemplo, usaremos três funções de pertinência diferentes para o controlador, $m_1^\kappa(x(k),k)$, $\kappa \in \{1, 2, 3\}$, dadas por

$$m_1^1(x(k),k) = 0,5 \left(\frac{\sin(x_1) - \frac{2}{\pi}x_1}{1 - \frac{2}{\pi}x_1} + 0,5 \right) + 0,2\mathcal{R}(-1, 1),$$

$$m_2^1(x(k),k) = 0,5 \left(\frac{\sin(x_1) - \frac{2}{\pi}x_1}{1 - \frac{2}{\pi}x_1} + 0,5 \right) + 0,2 \sin(0,8k),$$

$$m_1^3(x(k),k) = \frac{\sin(x_1) - \frac{2}{\pi}x_1}{1 - \frac{2}{\pi}x_1},$$

com $m_2^\kappa(x(k),k) = 1 - m_1^\kappa(x(k),k)$, $\kappa \in \{1, 2, 3\}$. Portanto, apenas as MF m_1^3 coincidem com as do modelo do sistema. Além disso, as MF m_1^1 e m_2^1 assumem valores diferentes para um mesmo valor de $x_1(k)$, Usando o Teorema 2 para projetar um controlador fuzzy estabilizante para esse sistema com $e = 0,5$, obtemos:

$$K_1 = [-0,9753 \ -0,1301] \text{ e } K_2 = [-0,0787 \ -0,2519].$$

Com esses ganhos, o sistema fuzzy T-S em malha fechada com premissas parcialmente combinadas resultante foi simulado. As trajetórias dos estados são mostradas na Figura 4, em que as linhas vermelhas, azuis e pretas representam os estados cujos controladores possuem as MFs, $m_1^1(x(k),k)$, $m_2^1(x(k),k)$ e $m_1^3(x(k),k)$, respectivamente. Nota-se que em todos os casos as trajetórias dos estados resultantes convergem para a origem.

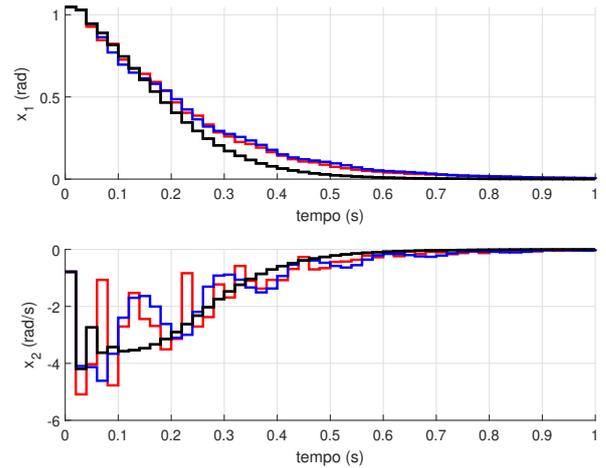


Figura 4. Trajetórias de estado dos sistemas de controle resultantes, usando $m_1^1(x(k),k)$ (—), $m_2^1(x(k),k)$ (—) e $m_1^3(x(k),k)$ (—), $i = 1, 2$.

A figura 5 mostra as MFs do controlador fuzzy T-S ao longo do tempo, em que as linhas vermelhas, azuis e pretas representam $m_1^1(x(k),k)$, $m_2^1(x(k),k)$ e $m_1^3(x(k),k)$, respectivamente. As linhas pontilhadas verdes representam os limites da faixa em que as MFs do controlador podem variar para $e = 0,5$.

6. CONCLUSÃO

Neste artigo, apresentam-se novas condições convexas formuladas em termos de LMIs, para a) análise de estabilidade de sistemas fuzzy T-S com controladores fuzzy T-S de tempo discreto e b) síntese de controladores fuzzy T-S de tempo discreto, assumindo premissa parcialmente combinada em ambos os casos. As condições propostas foram baseadas em uma função de Lyapunov dependente de

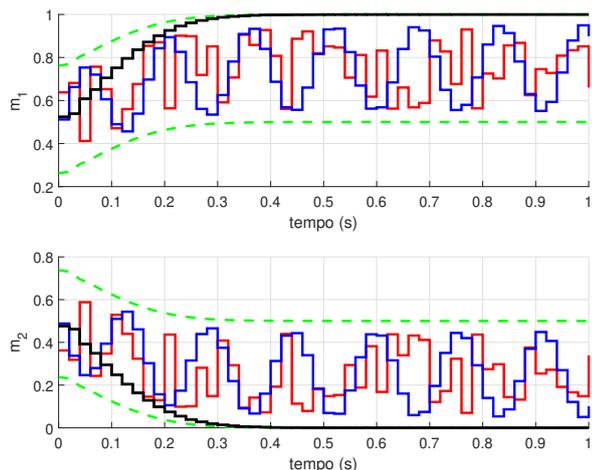


Figura 5. As MFs do controlador fuzzy T-S, $m_i^1(x(k),k)$ (—), $m_i^2(x(k),k)$ (—) e $m_i^3(x(k),k)$ (—), para $i = 1$ e 2 e limites estabelecidos no Lema 2 (14) (---), para $e = 0,5$.

parâmetros. O ponto central nos resultados apresentados é o Lema 2, em que foi proposta com uma metodologia de representar a MF do controlador em função da MF do sistema usando uma aproximação de segunda ordem. A abordagem proposta permite o tratamento explícito do erro entre as MF do sistema e do controlador. Dois exemplos são apresentados, sendo um para comparar com um resultado já consagrado na literatura e outro exemplo ilustra a aplicação em um modelo motivado por um processo físico.

REFERÊNCIAS

Chen, Y.J., Tanaka, K., Tanaka, M., Tsai, S.H., and Wang, H.O. (2021). A novel path-following-method-based polynomial fuzzy control design. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 51(6), 2993–3003. doi:10.1109/TCYB.2019.2956495.

da Cunha, I.H., Silva, L.F.P., Leite, V.J.S., and Klug, M. (2020). Analysis and synthesis conditions for T-S fuzzy continuous-time systems with partially matched premises. *IFAC PapersOnLine*, 53(2), 7989–7994.

Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 14(5), 676–697.

Feng, G. (2009). *Analysis And Synthesis Of Fuzzy Control Systems: A Model-Based Approach*. CRC Press, Hong Kong.

Guerra, T.M., Kruszewski, A., and Lauber, J. (2009). Discrete Takagi-Sugeno models for control: Where are we? *Annual Reviews in Control*, 33(1), 37–47.

Lam, H.K. (2018). A review on stability analysis of continuous-time fuzzy-model-based control systems: From membership-function-independent to membership-function-dependent analysis. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 67, 390–408.

Lam, H.K. and Narimani, M. (2009). Stability analysis and performance design for fuzzy-model-based control system under imperfect premise matching. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(4), 949–961.

Lee, D.H. and Joo, Y.H. (2014). On the generalized local stability and local stabilization conditions for discrete-

time Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions Fuzzy Systems*, 22(6), 1654–1668.

Lee, D.H., Park, J.B., and Joo, Y.H. (2011). Further improvement of periodic control approach for relaxed stabilization condition of discrete-time Takagi-Sugeno. *Fuzzy Sets and Systems*, 174(1), 50–65.

Lee, S. (2018). Novel stabilization criteria for t–s fuzzy systems with affine matched membership functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27(3), 540–548.

Li, H., Gao, Y., Wu, L., and Lam, H.K. (2015). Fault detection for T-S fuzzy time-delay systems: Delta operator and input-output methods. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 45(2), 229–241.

Li, L. and Tanaka, K. (2021). Relaxed sum-of-squares approach to stabilization of polynomial fuzzy systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 19(8), 2921–2930.

Lopes, A.N.D., Leite, V.J.S., Silva, L.F.P., and Guelton, K. (2020). Anti-windup TS fuzzy PI-like control for discrete-time nonlinear systems with saturated actuators. *International Journal of Fuzzy Systems*, 22(1), 46–61.

Nguyen, A.T., Coutinho, P., Guerra, T.M., Palhares, R., and Pan, J. (2020). Constrained output-feedback control for discrete-time fuzzy systems with local nonlinear models subject to state and input constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 51(9), 4673–4684.

Palanimuthu, K., Kim, H.S., and Joo, Y.H. (2022). TS fuzzy sliding mode control for double-fed induction generator-based wind energy system with a membership function-dependent \mathcal{H}_∞ approach. *Information Sciences*, 596, 73–92.

Peng, C., Wu, M., Xie, X., and Wang, Y.L. (2018). Event-triggered predictive control for networked nonlinear systems with imperfect premise matching. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(5), 2797–2806.

Sung, H.C., Park, J.B., Joo, Y.H., and Lin, K.C. (2012). Robust digital implementation of fuzzy control for uncertain systems and its application to active magnetic bearing system. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 10(3), 603–612.

Tanaka, K. and Wang, H.O. (2001). *Fuzzy Control Systems Design And Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons, New York.

Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis (2nd Ed.)*. Prentice-Hall, Inc., USA.

Xie, W.B., Sang, S., Lam, H.K., and Zhang, J. (2020). A polynomial membership function approach for stability analysis of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 29(8), 2077–2087.

Yang, X., Lam, H.K., and Wu, L. (2019). Membership-dependent stability conditions for type-1 and interval type-2 t–s fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 356, 44–62.

Zhang, X., Wang, C., Li, D., Zhou, X., and Yang, D. (2011). Robust stability of impulsive Takagi-Sugeno fuzzy systems with parametric uncertainties. *Information Sciences*, 181(23), 5278–5290.

Zhou, H., Lam, H.K., Xiao, B., and Zhong, Z. (2021). Dissipativity-based filtering of time-varying delay interval type-2 polynomial fuzzy systems under imperfect premise matching. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*.