

Cômputo da norma e controle ℓ_1 de sistemas lineares discretos no tempo por meio de LMIs^{*}

Ariádne L. J. Bertolin Ricardo C. L. F. Oliveira Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP,
Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas, SP, Brasil.
(e-mail: {ariberto, ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br)

Abstract: This work presents new contributions to the computation of a bound to the ℓ_1 norm and to the synthesis of dynamic output feedback controllers assuring a bound to the ℓ_1 norm for discrete-time linear systems through linear matrix inequalities. Starting from sufficient stability conditions for an auxiliary system, a locally convergent iterative method is proposed for the computation of a bound to the ℓ_1 norm of the impulse response of the original system, with direct extension to deal with uncertain parameters and for the synthesis of output feedback dynamic controllers of a given order. Differently from the existent techniques for ℓ_1 analysis and control, the proposed method dispenses the usual one-dimensional search and considers as optimization variables the parameters of the controller, handling structural constraints without additional conservatism. Numerical examples illustrate the performance of the proposed approach.

Resumo: Este trabalho apresenta novas contribuições para o cômputo de um limitante da norma ℓ_1 e para a síntese de controladores de realimentação dinâmica de saída que asseguram um limitante da norma ℓ_1 para sistemas lineares discretos no tempo por meio de desigualdades matriciais lineares. A partir de condições suficientes para a estabilidade de um sistema auxiliar, um método iterativo com convergência local é proposto para o cálculo de um limitante para a norma ℓ_1 da resposta ao impulso do sistema original, com extensão direta para tratar sistemas incertos e síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída de uma dada ordem. Diferentemente das técnicas existentes para análise e controle com critério ℓ_1 , o método proposto prescinde da usual busca unidimensional e trata como variáveis de otimização os parâmetros do controlador, incorporando restrições de estrutura sem conservadorismo adicional. Exemplos numéricos ilustram o desempenho da abordagem proposta.

Keywords: Discrete-time linear systems, ℓ_1 norm, Dynamic output feedback, Linear Matrix Inequalities (LMIs).

Palavras-chaves: Sistemas lineares discretos no tempo, norma ℓ_1 , Realimentação dinâmica de saída, Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs).

1. INTRODUÇÃO

A construção de certificados de estabilidade e o cômputo de critérios de desempenho para sistemas lineares são assuntos de interesse central na área de teoria de controle. Nesse sentido, a teoria de Lyapunov é, provavelmente, uma das principais ferramentas utilizadas, pois fornece condições que podem ser resolvidas por programação semi definida e desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) (Boyd et al., 1994), que são classes de problemas de otimização tratadas por algoritmos eficientes (complexidade polinomial) e de convergência global, disponíveis em pacotes computacionais (Gahinet et al., 1995; Löfberg, 2004; Sturm, 1999).

Condições de estabilidade formuladas com o auxílio da teoria de Lyapunov permitem calcular limitantes para as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , que representam, em geral, correlações de medidas de

energia entre os sinais de saída e de entrada do sistema estudado. O cálculo de limitantes das normas baseados em medidas de pior caso ou de valor absoluto, como o ganho induzido ℓ_∞ (pico a pico) ou norma ℓ_1 da resposta ao impulso do sistema, geralmente demanda um tratamento mais complexo, podendo ser computado por condições de estabilidade derivadas da programação linear (Dahleh and Diaz-Bobillo, 1995; McDonald and Pearson, 1991; Vidyasagar, 1986).

O controle baseado na norma ℓ_1 tem como atrativo poder incorporar as especificações de pior caso desejadas diretamente no domínio do tempo. Um exemplo prático são os sistemas de posicionamento de alta precisão de um servomecanismo de disco rígido (Vincent et al., 1996; Abedor et al., 1996). Contudo, projetos de síntese que minimizam a amplificação de pior caso (Blanchini and Sznaiar, 1995; Dahleh and Diaz-Bobillo, 1995; Dahleh and Pearson, Jr., 1987) podem resultar em controladores de ordem elevada. Como alternativa para contornar essas dificuldades, foi proposta em Vincent et al. (1996); Bu et al. (1996) a norma estrela (em inglês, *star norm*), que fornece um limitante superior para a norma ℓ_1 e pode ser computada a partir de problemas de otimização envolvendo

^{*} Apoiado pelas agências brasileiras: Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP (processo 2019/10947-1), CNPq e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) — Código de Financiamento 001.

LMIs combinadas com a busca de um parâmetro escalar. Veja também Rieber et al. (2008); Sánchez-Peña and Sznajder (1998).

Neste trabalho, um método alternativo é proposto para o cômputo da norma estrela de sistemas lineares discretos no tempo. A partir de uma condição suficiente para a estabilidade de um sistema auxiliar, um algoritmo iterativo é construído para o cálculo do limitante da norma ℓ_1 . Em cada iteração, um procedimento convexo de otimização na forma de LMIs é resolvido, sem a necessidade de realizar a usual busca unidimensional dos métodos da literatura. Nas LMIs, as matrizes do sistema aparecem de forma afim, permitindo a extensão direta da estratégia de análise para a síntese de controladores dinâmicos de realimentação de saída de uma dada ordem. O artigo pode ser visto como a contrapartida discreta de Bertolin et al. (2021), que tratou o problema de cálculo da norma \mathcal{L}_1 e controle por realimentação estática de estado e de saída para sistemas lineares contínuos no tempo. Uma das vantagens da formulação é poder tratar restrições estruturais no controlador, como por exemplo descentralização, sem impor conservadorismo adicional. Exemplos ilustram o desempenho do método proposto quando comparado com outras técnicas da literatura.

Notação

Para uma matriz simétrica $X > 0$ ($X < 0$) significa que X é definida positiva (negativa). Para matrizes ou vetores (T) indica o transposto, $\text{He}(X) = X + X^T$, $\text{diag}(X_1, \dots, X_n)$ representa uma matriz bloco diagonal formada pelas matrizes quadradas (ou elementos) X_1, \dots, X_n , e $\lambda_i(X)$ denota um dos autovalores da matriz X . O símbolo $*$ representa um termo simétrico em matrizes formadas por blocos. As matrizes identidade e zero são denotadas, respectivamente, por I e 0 . Ao longo do texto as dimensões das matrizes podem ser omitidas por simplicidade (sendo inferidas a partir do contexto). Assim como em Vincent et al. (1996), a norma infinito de um sinal vetorial $v(k) \in \mathbb{R}^n$ é definida como: $\|v\|_\infty = \sup_k \sqrt{v(k)^T v(k)}$, e ℓ_∞ denota a classe de sinais com norma infinito limitada.

2. PRELIMINARES

Considere o sistema discreto invariante no tempo

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \\ z(k) = Cx(k) + Dw(k), \end{cases} \quad (1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ representa o estado, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ uma entrada externa e $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída de referência. As matrizes A , B , C e D são reais e têm dimensões apropriadas.

O objetivo desta seção é apresentar condições que permitam computar um limitante superior (custo garantido) para a norma ℓ_1 da resposta ao impulso do sistema (neste trabalho, chamada com algum abuso de norma ℓ_1 do sistema (1)). Para isso, considere o operador linear $H: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$, em que a entrada é representada por $w(k)$. A norma induzida $\ell_\infty\text{-ind}$ (ou ganho ℓ_∞) de H é definida como o pior caso da amplificação pico a pico de H , ou seja,

$$\|H\|_{\infty\text{-ind}} = \sup_{\|w\|_\infty \leq 1} \|Hw\|_\infty.$$

O valor de $\|H\|_{\infty\text{-ind}}$, também conhecido como ganho pico-a-pico ou índice ℓ_1 do sistema, pode ser calculado também a partir da matriz de respostas ao impulso $[h_{ij}(k)]$

$$\|H\|_{\infty\text{-ind}} = \max_{1 \leq i \leq n_z} \sum_{j=1}^{n_w} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_{ij}(k)|.$$

Diferentemente do cálculo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , largamente exploradas na literatura, o cômputo da norma ℓ_1 não possui um tratamento em termos de programação convexa. Uma das possíveis maneiras de contornar este problema é trabalhar com um limitante superior para a norma ℓ_1 , dado pela norma estrela, que pode ser calculada por meio do procedimento de otimização apresentado a seguir, adaptado de Vincent et al. (1996).

Lema 1. Sejam um escalar dado $\alpha \in (0, \kappa)$, e A Schur estável, com

$$\kappa = 1 - (\max_i |\lambda_i(A)|)^2$$

e $S = S^T$ uma matriz definida positiva solução do problema convexo de otimização

$$\min \text{tr}(S) \quad (2a)$$

$$\frac{1}{1-\alpha} ASA^T - S + \frac{1}{\alpha} BB^T < 0. \quad (2b)$$

Então, para S solução de (2), o sistema (1) é assintoticamente estável com norma ℓ_1 limitada por γ solução do problema convexo de otimização ($\sigma > 0$ é uma variável livre)

$$\min \gamma \quad \begin{bmatrix} \sigma S^{-1} & 0 & C^T \\ * & (1-\sigma)I & D^T \\ * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (3)$$

As condições do Lema 1 são resolvidas em duas etapas, cada uma baseada na solução de um problema convexo de otimização. Observe que a restrição (2b) é LMI apenas se o valor de α for fixo, e (3) é convexo para uma matriz S dada. Dessa maneira, o γ mínimo é normalmente computado por meio de uma busca unidimensional em α . Além disso, a factibilidade da condição (2) com $S = S^T > 0$ garante $(\alpha^{-1}A)S(\alpha^{-1}A)^T - S < 0$, isto é, que a matriz $\alpha^{-1}A$ é Schur, delimitando o intervalo admissível para $\alpha \in (0, \kappa)$. Os resultados apresentados na sequência do trabalho utilizam o lema de Finsler, reproduzido abaixo por conveniência.

Lema 2. (de Oliveira and Skelton (2001)). Considere as matrizes $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$, com $\text{posto}(\mathcal{B}) < \ell$ e $\mathcal{B}\mathcal{B}_\perp = 0$. As seguintes condições são equivalentes:

- i) $\xi^T \mathcal{Q} \xi < 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^\ell, \xi \neq 0$, tal que $\mathcal{B}\xi = 0$;
- ii) $\mathcal{B}_\perp^T \mathcal{Q} \mathcal{B}_\perp < 0$;
- iii) $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0$;
- iv) $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ tal que $\mathcal{Q} + \mathcal{X}\mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0$.

3. CÔMPUTO DO LIMITANTE DA NORMA ℓ_1

Para valores fixos de $0 < \sigma < 1$ e α , e a matriz A do sistema (1) Schur estável com $\alpha < \kappa$, o cômputo de um custo garantido para a norma ℓ_1 pode ser realizado por meio do lema proposto a seguir.

Lema 3. O sistema linear (1) é assintoticamente estável com norma ℓ_1 limitada por γ se existirem matrizes $\mathcal{Y}_i, \mathcal{X}_i, i = 1, \dots, 4$, um escalar $\gamma > 0$ e uma matriz definida positiva $P = P^T$, tais que

$$\begin{bmatrix} P & P & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & P & B \\ * & * & * & \alpha I \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{Y}_2 \\ \mathcal{Y}_3 \\ \mathcal{Y}_4 \end{bmatrix} [-(\alpha/2)I \quad -I \quad A^T \quad 0] \right) > 0, \quad (4a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & (1-\sigma)I & D^T \\ * & * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{X}_3 \\ \mathcal{X}_4 \end{bmatrix} [(\sigma/2)I \ -I \ 0 \ C^T] \right) > 0. \quad (4b)$$

Prova: Comparando a condição (4a) com *iv*) do Lema 2, identifica-se a matriz \mathcal{B}_1 e, adotando

$$\mathcal{B}_{1\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -(\alpha/2)I & A^T & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

tem-se, pela condição *ii*) do Lema 2,

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha)P & PA^T & 0 \\ * & P & B \\ * & * & \alpha I \end{bmatrix} > 0 \quad (5)$$

ou, por complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha)P & PA^T \\ * & P - (1/\alpha)BB^T \end{bmatrix} > 0. \quad (6)$$

Com mais um complemento de Schur, obtém-se a condição abaixo, que é equivalente à condição (2) com $S = P$,

$$-\frac{1}{1-\alpha}APA^T + P - \frac{1}{\alpha}BB^T > 0.$$

De modo similar, a condição (4b) está na forma *iv*) do Lema 2 com $\mathcal{B}_2 = [(\sigma/2)I \ -I \ 0 \ C^T]$. Adotando como base para o espaço nulo de \mathcal{B}_2 a matriz

$$\mathcal{B}_{2\perp} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ (\sigma/2)I & 0 & C^T \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

tem-se a condição

$$\begin{bmatrix} \sigma P & 0 & PC^T \\ * & (1-\sigma)I & D^T \\ * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0.$$

Aplicando $\text{diag}(P^{-1}, I, I)$ como transformação de congruência, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \sigma P^{-1} & 0 & C^T \\ * & (1-\sigma)I & D^T \\ * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0$$

que é equivalente à condição (3) com $S = P$, finalizando a prova. \square

Note que as condições do Lema 3 são LMIs apenas se os valores de σ e α forem fixos. Dessa forma, um dos objetivos deste trabalho é oferecer uma alternativa ao procedimento de duas etapas com busca linear do Lema 1 para o cálculo da norma estrela. O próximo teorema fornece uma solução para o problema, propondo uma condição na qual as matrizes do sistema aparecem de forma afim, o que favorece a extensão para um procedimento de síntese.

Teorema 1. Sejam as matrizes $\bar{Y}_i, \bar{X}_i, i = 1, \dots, 5$ com \bar{Y}_5 e \bar{X}_5 de posto completo. Se existirem matrizes Y, X , matrizes definidas positivas $P = P^T, S = S^T$, e os escalares positivos $\alpha \leq 1, \gamma$ e σ tais que

$$\mathcal{Q}_1 + \text{He} \left(\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} \underbrace{[\bar{Y}_1 \ \bar{Y}_2 \ \bar{Y}_3 \ \bar{Y}_4 \ \bar{Y}_5]}_{\bar{Y}} \right) > 0, \quad (7)$$

$$\mathcal{Q}_2 + \text{He} \left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \underbrace{[\bar{X}_1 \ \bar{X}_2 \ \bar{X}_3 \ \bar{X}_4 \ \bar{X}_5]}_{\bar{X}} \right) > 0, \quad (8)$$

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{bmatrix} P & P & 0 & 0 & -(\alpha/2)I \\ * & 0 & 0 & 0 & -I \\ * & * & P & B & A \\ * & * & * & \alpha I & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 & (\sigma/2)I \\ * & 0 & 0 & 0 & -I \\ * & * & (1-\sigma)I & D^T & 0 \\ * & * & * & \gamma^2 I & C \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

são verificadas, então certifica-se a estabilidade do sistema (1) com norma ℓ_1 limitada por γ .

Prova: Observe que as condições (7) e (8) estão na forma *iv*) do lema de Finsler (Lema 2) e, portanto, são equivalentes, respectivamente, às condições

$$\begin{bmatrix} P & P & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & P & B \\ * & * & * & \alpha I \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} (\bar{Y}_5^{-1}\bar{Y}_1)^T \\ (\bar{Y}_5^{-1}\bar{Y}_2)^T \\ (\bar{Y}_5^{-1}\bar{Y}_3)^T \\ (\bar{Y}_5^{-1}\bar{Y}_4)^T \end{bmatrix} [-(\alpha/2)I \ -I \ A^T \ 0] \right) > 0,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & (1-\sigma)I & D^T \\ * & * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} (\bar{X}_5^{-1}\bar{X}_1)^T \\ (\bar{X}_5^{-1}\bar{X}_2)^T \\ (\bar{X}_5^{-1}\bar{X}_3)^T \\ (\bar{X}_5^{-1}\bar{X}_4)^T \end{bmatrix} [(\sigma/2)I \ -I \ 0 \ C^T] \right) > 0.$$

Essas desigualdades são equivalentes às desigualdades do Lema 3. Além disso, como a factibilidade de (7) assegura que $\alpha^{-1}A$ é Schur, o valor resultante de α é garantidamente menor que κ . Portanto, o sistema (1) é assintoticamente estável e γ é um custo garantido para a norma ℓ_1 . \square

O Teorema 1 apresenta vantagens em relação aos lemas 1 e 3 no cálculo do custo garantido γ do sistema (1). Primeiramente, utiliza-se α como uma variável de otimização do problema, não sendo, portanto, necessária a realização de buscas unidimensionais. Além disso, as variáveis P, α, σ e as matrizes do sistema aparecem de maneira *afim* nas condições, sendo possível a extensão direta para procedimentos de síntese. Por fim, as duas condições do teorema são resolvidas simultaneamente.

Por outro lado, note que as duas desigualdades (7) e (8) são LMIs apenas porque \bar{Y} e \bar{X} são matrizes fixas. Consequentemente, os resultados obtidos por meio dessas condições suficientes podem ser conservadores, devido à falta de uma regra geral para a escolha de matrizes adequadas $\bar{Y}_i, i = 1, \dots, 4$. Seguindo a estratégia proposta em Felipe and Oliveira (2021), uma possível alternativa para resolver esse problema é a introdução de relaxações, como apresentado no próximo teorema.

Teorema 2. Sejam $\bar{Y} = [0 \ I \ 0 \ 0 \ I]$, $\bar{X} = [-I \ I \ 0 \ 0 \ I]$ e

$$\bar{A} = \rho^{-1}A, \quad \bar{B} = \rho^{-1}B, \quad \bar{C} = \rho^{-1}C, \quad (9)$$

em que ρ é um escalar positivo. Então, as condições do Teorema 1, testadas com \bar{A} , \bar{B} e \bar{C} no lugar de A , B e C , respectivamente, fornecem uma solução factível para um valor de ρ suficientemente grande.

Prova: Fixando $Y_1 = (\alpha/2)I$, $Y_2 = Y_5 = (1/2)I$, $Y_4 = Y_3 = 0$ e $P = (1 - \alpha/2)I$ (note que $P > 0$, pois $\alpha < 1$) na condição (7), obtém-se

$$\begin{bmatrix} (1 - \alpha/2)I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & (1 - \alpha/2)I & \rho^{-1}B & \rho^{-1}A \\ * & * & * & \alpha I & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} > 0.$$

Considerando ρ grande o suficiente, tem-se

$$\begin{bmatrix} (1 - \alpha/2)I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & (1 - \alpha/2)I & 0 & 0 \\ * & * & * & \alpha I & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} > 0,$$

que sempre é atendida para $\alpha \in (0, \kappa)$ (notar que $\kappa < 1$). Portanto, a primeira parte da prova está concluída.

Na condição (8), fixando $-X_1 = X_5 = (\sigma/4)I$, $X_2 = (1 - \sigma/4)I$ e $X_3 = X_4 = 0$, $\sigma = \alpha$, com $P = (1 - \alpha/2)I$, tem-se

$$\begin{bmatrix} (\alpha/2)I & -(\alpha/2)I & 0 & 0 & 0 \\ * & (2 - \alpha/2)I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & (1 - \alpha)I & D^T & 0 \\ * & * & * & \gamma^2 I & (1/\rho)C \\ * & * & * & * & (\alpha/2)I \end{bmatrix} > 0$$

ou, com o complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} (\alpha/2)I & -(\alpha/2)I & 0 & 0 \\ * & (2 - \alpha/2)I & 0 & 0 \\ * & * & (1 - \alpha/2)I & D^T \\ * & * & * & \gamma^2 I - (2/(\alpha\rho^2))CC^T \end{bmatrix} > 0$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} (\alpha/2)I & -(\alpha/2)I & 0 \\ * & (2 - \alpha/2)I & 0 \\ * & * & (1 - \alpha)I - D^T(\gamma^2 I - (2/(\alpha\rho^2))CC^T)^{-1}D \end{bmatrix} > 0.$$

Para γ e ρ suficientemente grandes a condição acima é simplificada em

$$\begin{bmatrix} (\alpha/2)I & -(\alpha/2)I & 0 \\ * & (2 - \alpha/2)I & 0 \\ * & * & (1 - \alpha)I \end{bmatrix} > 0,$$

que, com o complemento de Schur, implica $2I - \alpha I > 0$ que sempre está atendida para valores de $\alpha \in (0, \kappa)$, terminando a prova. \square

O Teorema 1 sempre produz uma solução factível adotando as inicializações propostas pelo Teorema 2 devido ao parâmetro ρ , que tem a função de ser um fator de relaxação nas matrizes A , B e C do sistema. Esse parâmetro aparece de forma linear na condição, e pode ser minimizado como função objetivo para que γ seja um custo garantido válido para o sistema original ($\rho = 1$). Caso isso não ocorra, para uma solução factível do Teorema 1 (com um determinado valor de ρ), as matrizes resultantes X_i^T e Y_i^T podem ser utilizadas como novos valores para \bar{X}_i e \bar{Y}_i , assim gerando uma nova solução factível. Isso é possível pois as condições (7) e (8) estão estruturadas na forma

iv) do Lema de Finsler, ou seja, $\mathcal{Q} + \text{He}(\mathcal{X} \mathcal{B}) < 0$. Assim, como $\text{He}(\mathcal{X} \mathcal{B}) = \text{He}(\mathcal{B}^T \mathcal{X}^T)$, a escolha $\mathcal{B} = \mathcal{X}^T$ garante solução factível em um novo teste, assegurando um valor de ρ não maior que o anterior.

O procedimento iterativo é apresentado no Algoritmo 1 (o índice $(\cdot)_{it}$ representa o valor da variável na iteração it). O método é dividido em duas fases: na primeira os parâmetros de entrada são it_{max} , que define um critério de parada, e \bar{Y} e \bar{X} , matrizes iniciais exigidas pelo Teorema 1. O algoritmo permanece na fase 1 enquanto ρ for maior do que 1. Se nenhum valor de $\rho \leq 1$ for encontrado até it_{max} ser atingido, o método não é capaz de fornecer um custo garantido para o sistema. Caso contrário, avança-se para a segunda fase, em que o valor de γ é minimizado a cada iteração até que a diferença dos custos garantidos obtidos em duas iterações subsequentes seja menor que uma tolerância ε (parâmetro de entrada). Infelizmente, não há garantia de convergência para $\rho \leq 1$ na primeira fase (depende das escolhas iniciais de \bar{Y} e \bar{X}).

Algoritmo 1

```

1: Inicialização:  $it_{max}$ , tolerância  $\varepsilon$ ;
2:  $it \leftarrow 0$ , fase  $\leftarrow 1$ ;
3: Inicializa  $\bar{Y}_i$  e  $\bar{X}_i$  de acordo com o Teorema 2;
4:  $A \leftarrow A/\rho$ ,  $B \leftarrow B/\rho$  e  $C \leftarrow C/\rho$ ;
5:  $\mu \leftarrow \gamma^2$ ;
6: Enquanto  $it < it_{max}$  Resolva
7:    $it \leftarrow it + 1$ ;
8:   Se fase = 1 Então
9:     minimize  $\rho$  sujeito a (7) e (8)
10:    Se  $\rho \leq 1$  Então
11:       $\rho = 1$ ; fase  $\leftarrow 2$ ;
12:    Fim Se
13:    Senão Se fase = 2 Então
14:      minimize  $\mu$  sujeito a (7) e (8)
15:       $\gamma_{it} \leftarrow \sqrt{\mu}$ ;
16:      Se  $|\gamma_{it} - \gamma_{(it-1)}| < \varepsilon$  Então
17:        Retorna  $\gamma_{it}$ ;
18:      Fim Se
19:    Fim Se
20:     $\bar{Y} \leftarrow Y^T$ ;  $\bar{X} \leftarrow X^T$ ;
21: Fim Enquanto

```

Visando uma melhor convergência do algoritmo proposto, o próximo teorema propõe outra possibilidade de construção das condições iniciais factíveis para o Teorema 1, alternativa ao Teorema 2.

Teorema 3. Seja $\bar{\sigma}$ uma solução para o Lema 1 com $\alpha = (1/2)\kappa$, e $\mathcal{Y}_i, \mathcal{X}_i, i = 1, \dots, 4$ soluções do Lema 3 com $\sigma = \bar{\sigma}, P = P^T > 0$ e $\gamma > 0$. As escolhas

$$\bar{Y} = [\mathcal{Y}_1^T \ \mathcal{Y}_2^T \ \mathcal{Y}_3^T \ \mathcal{Y}_4^T \ -I], \quad \bar{X} = [\mathcal{X}_1^T \ \mathcal{X}_2^T \ \mathcal{X}_3^T \ \mathcal{X}_4^T \ -I]$$

garantem que o Teorema 1 fornece uma solução factível.

Prova: A prova é imediata a partir da equivalência entre as desigualdades (7) e (8), e as desigualdades (4a) e (4b), respectivamente, com as escolhas $\bar{Y}_5 = -I$ e $\bar{X}_5 = -I$. \square

Note que utilizar as condições iniciais propostas pelo Teorema 3 demanda um esforço computacional adicional, comparado com a escolha proposta no Teorema 2, devido à necessidade de se resolver as LMIs (4) para obter \mathcal{Y} e \mathcal{X} . Em contrapartida, o Algoritmo 1 pode começar diretamente na fase 2 (a relaxação do parâmetro ρ não é necessária), sempre fornecendo um custo garantido γ para o sistema.

Como principal contribuição deste trabalho, a próxima seção trata da extensão das condições de análise para sintetizar controladores realimentação dinâmica de saída de ordem fixa.

4. CONTROLADOR DINÂMICO ℓ_1

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_u u(k) + Bw(k) \\ z(k) = Cx(k) + D_u u(k) + Dw(k) \\ y(k) = C_y x(k) + D_y w(k) \end{cases} \quad (10)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ representa o estado, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ uma entrada externa, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída controlada, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída medida e $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle. As matrizes $A, B, B_u, C, C_y, D, D_u$ e D_y são reais e têm dimensões apropriadas.

O objetivo é projetar um controlador dinâmico de ordem fixa que minimize um limitante para a norma ℓ_1 do sistema (10), com a realização de espaço de estados dada por

$$\begin{cases} x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c y(k) \\ u(k) = C_c x_c(k) + D_c y(k) \end{cases} \quad (11)$$

em que $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o estado do controlador e A_c, B_c, C_c e D_c são matrizes reais com dimensões apropriadas. Conectando o controlador (11) com a planta (10), produz-se a seguinte dinâmica em malha fechada

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = A_{cl} \bar{x}(k) + B_{cl} w(k), \\ z(k) = C_{cl} \bar{x}(k) + D_{cl} w(k), \end{cases}$$

com $\bar{x} = [x^T \ x_c^T]^T$ e

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} B + B_u D_c D_y \\ B_c D_y \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$C_{cl} = [C + D_u D_c C_y \ D_u C_c], \quad D_{cl} = D + D_u D_c D_y.$$

Conforme enfatizado na seção anterior, as condições do Teorema 1 apresentam todas as matrizes do sistema de forma afim, ou seja, não multiplicam nenhuma outra variável. Como consequência, o problema de controle pode ser tratado diretamente, pois as matrizes do controlador também aparecem de maneira afim nas matrizes de malha fechada do sistema. Com relação às matrizes de inicialização do Teorema 1, note que o Teorema 3 não pode ser utilizado para sistemas instáveis em malha aberta. Contudo, é possível viabilizar o uso do Teorema 3 com o seguinte artifício: computa-se um ganho de realimentação de estados K que estabiliza a matriz A (eventualmente considerando um critério de desempenho). Em seguida aplica-se o Teorema 3 considerando $A + B_u K$ no lugar de A , e fixa-se $A_c = 0$ (é Schur) e $B_c = C_c = D_c = 0$.

Aumentando a ordem do controlador

Uma característica importante ao projetar controladores de uma determinada ordem é garantir que o aumento da ordem não traga resultados piores (em termos de algum critério). Dessa forma, se para uma determinada ordem n_c , o controlador obtido garante estabilidade em malha fechada e um certo valor do limitante da norma ℓ_1 , então a ordem $n_c + 1$ deveria fornecer um valor igual ou inferior. O Algoritmo 1, como apresentado, não possui essa propriedade. Para sanar essa deficiência, uma nova inicialização é proposta para o Teorema 1, outra contribuição deste trabalho. Com o objetivo de projetar um novo controlador de ordem $n_c + p$ tal que $\gamma_{n_c+p} \leq \gamma_{n_c}$, considere um controlador de ordem p conectado em paralelo ao controlador de ordem n_c , conforme ilustrado na Figura 1.

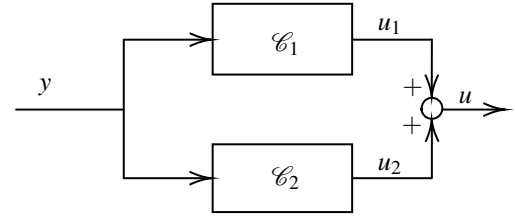


Fig. 1. Conexão em paralelo entre dois controladores \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 .

Considere que o controlador de ordem p possui uma estrutura fixa, de forma que a condição de síntese do Teorema 1, verificada para n_c , permaneça factível para $n_c + p$. Por exemplo, considere a matriz dinâmica do controlador de ordem p como $A_c = \zeta I_p$, $-1 < \zeta < 1$ (garantindo a estabilidade Schur), e todas as demais matrizes do controlador iguais a zero. Essas escolhas produzem as seguintes matrizes em malha fechada associadas ao controlador de ordem $n_c + p$

$$\tilde{A}_{cl} = \begin{bmatrix} A_{cl} & 0 \\ 0 & \zeta I \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_{cl} = \begin{bmatrix} B_{cl} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_{cl}^T = \begin{bmatrix} C_{cl}^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_{cl} = D_{cl}. \quad (13)$$

O próximo teorema mostra que as condições do Lema 3, verificadas sempre que o Teorema 1 tem solução, podem ser factíveis com as matrizes (13) e escolhas particulares das variáveis de decisão do Teorema 1. Este é o primeiro passo para construir um controlador viável de ordem $n_c + p$ utilizando o Teorema 1.

Teorema 4. Sejam as matrizes $A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl}$, e os escalares α, γ e σ soluções do Teorema 1 para a ordem n_c . Então as condições

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & \tilde{P} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \tilde{P} & \tilde{B}_{cl} \\ * & * & * & \alpha I \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_3 \\ \tilde{Y}_4 \end{bmatrix} [-(\alpha/2)I \ -I \ \tilde{A}_{cl}^T \ 0] \right) > 0, \quad (14a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \tilde{P} & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & (1-\sigma)I & \tilde{D}_{cl}^T \\ * & * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ \tilde{X}_4 \end{bmatrix} [(\sigma/2)I \ -I \ 0 \ \tilde{C}_{cl}^T] \right) > 0 \quad (14b)$$

são garantidamente factíveis para um controlador de ordem $n_c + p$, com as matrizes de malha fechada resultantes $\tilde{A}_{cl}, \tilde{B}_{cl}, \tilde{C}_{cl}$ e \tilde{D}_{cl} dadas em (13).

Prova: As condições (14) são equivalentes às condições (4), que são factíveis sempre que o Teorema 1 tem solução. Observe que as condições (14), com as escolhas

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \beta I \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y}_i = \begin{bmatrix} Y_i & 0 \\ 0 & \delta_i I \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \tilde{X}_i = \begin{bmatrix} X_i & 0 \\ 0 & v_i I \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2$$

$$\tilde{Y}_4 = [Y_4 \ 0], \quad \tilde{X}_3 = [X_3 \ 0], \quad \tilde{X}_4 = [X_4 \ 0],$$

em que P, Y_i e $X_i, i = 1, \dots, 4$, são as soluções do Teorema 1 obtidas para a ordem n_c e $\beta, \delta_i, i = 1, 2, 3$ e $v_i, i = 1, 2$ são escalares a determinar. Aplicando transformações de congruência em (14a) e (14b) para intercambiar colunas e linhas, tem-se

$$\text{diag}(\Theta_{n_c}, \Upsilon) + \text{diag}(\Omega_Y, \Psi_\delta) > 0, \quad (15)$$

$$\text{diag}(\Phi_{n_c}, \Xi) + \text{diag}(\Omega_X, \Psi_v) > 0 \quad (16)$$

com

$$\Theta_{n_c} = \begin{bmatrix} P & P & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & P & B_{cl} \\ * & * & * & \alpha I \end{bmatrix}, \quad \Phi_{n_c} = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -(1-\sigma)I & D_{cl}^T \\ * & * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \beta I & 0 & \beta I \\ \star & \beta I & 0 \\ \star & \star & 0 \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} 0 & \beta I \\ \star & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_\delta = \begin{bmatrix} -\alpha\delta_1 I & (\zeta\delta_1 - (\alpha/2)\delta_3)I & -(\delta_1 + (\alpha/2)\delta_2)I \\ \star & 2\zeta\delta_3 I & -(\delta_3 - \zeta\delta_2)I \\ \star & \star & -2\delta_2 I \end{bmatrix},$$

$$\Psi_v = \begin{bmatrix} \sigma v_1 I & ((\sigma/2)v_2 - v_1)I \\ \star & -2v_2 I \end{bmatrix},$$

$$\Omega_Y = \begin{bmatrix} -(\alpha/2)\text{He}(Y_1) & -Y_1 - (\alpha/2)Y_2^T & Y_1 A_{cl} - (\alpha/2)Y_3^T & -(\alpha/2)Y_4^T \\ \star & -\text{He}(Y_2) & Y_2 A_{cl} - Y_3^T & -Y_4^T \\ \star & \star & \text{He}(Y_3^T A_{cl}) & A_{cl} Y_4^T \\ \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_X = \begin{bmatrix} (\sigma/2)\text{He}(X_1) & -X_1 + (\sigma/2)X_2^T & (\sigma/2)X_3^T & X_1 C_{cl}^T + (\sigma/2)X_4^T \\ \star & -\text{He}(X_2) & -X_3^T & -X_4^T + X_2 C_{cl}^T \\ \star & \star & 0 & X_3 C_{cl}^T \\ \star & \star & \star & \text{He}(X_4 C_{cl}^T) \end{bmatrix},$$

que, com a estrutura bloco-diagonal de (15) e (16), são verificadas se os blocos diagonais forem factíveis, ou seja

$$\Theta_{n_c} + \Omega_Y > 0, \quad \Phi_{n_c} + \Omega_X > 0, \quad (17)$$

$$\Upsilon + \Psi_\delta > 0, \quad \Xi + \Psi_v > 0. \quad (18)$$

As condições em (17) são verificadas por hipótese (existência do controlador factível de ordem n_c). Nas condições (18), fazendo as escolhas $\zeta = 0$, $\delta_1 = -2\beta$, $\delta_2 = -(2\beta/\alpha)$, $\delta_3 = 0$, $v_1 = (\beta/2)$ e $v_2 = -(2\beta/\sigma)$ têm-se, respectivamente,

$\text{diag}((1 + 2\alpha)\beta, \beta I, (4\beta/\alpha)I) > 0$, $\text{diag}(\sigma\beta I, (2\beta/\sigma)I) > 0$ que são factíveis para qualquer β positivo. \square

Os resultados do Teorema 4 permitem calcular uma solução factível para as condições do Lema 3 construída em termos de um controlador conhecido de ordem n_c acrescido de p novas variáveis de estado. Como consequência, seguindo a prova do Teorema 1, as escolhas abaixo (com \tilde{Y} e \tilde{X} soluções de (14)) garantem a factibilidade de (7)-(8)

$$\bar{Y} = [\tilde{Y}^T - I], \quad \bar{X} = [\tilde{X}^T - I]. \quad (19)$$

Como observação final, ao buscar por controladores dinâmicos usando o Algoritmo 1, a relaxação proposta pelo Teorema 2 (divisão das matrizes A , B e C pelo parâmetro ρ) tende a produzir um efeito indesejável nas matrizes do controlador, com A_c , B_c e C_c próximos de zero para $n_c > 0$. Embora esse fenômeno não seja um problema em princípio, observa-se nos experimentos numéricos que os resultados costumam ser conservadores. Para remediar este fato, uma representação diferente para o vetor de estado aumentado é proposta, como mostrado abaixo

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0 \\ R_1 & -I_{n_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, \quad R_1 = [I_{n_c} \quad 0_{n_c \times (n_x - n_c)}].$$

5. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Nesta seção, o Algoritmo 1 (A1) é aplicado em exemplos numéricos para ilustrar o desempenho do método proposto. A implementação foi realizada no Matlab 9.10 (R2021a) usando o parser Yalmip (Löfberg (2004)) e o resolvidor Mosek (Andersen and Andersen (2000)), em um computador com o sistema operacional Windows 11 e processador Core i7. Os parâmetros de entrada considerados foram $\dot{u}_{max} = 50$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e \bar{X} e \bar{Y} definidas segundo os teoremas 2 (T2) ou 3 (T3) ou, para síntese, por meio da condição (19), com \tilde{Y} e \tilde{X} obtidos a partir do Teorema 4 (T4). Para um melhor comportamento numérico na

primeira fase do algoritmo, impõe-se o limitante $\mu < 100$. Além disso as variáveis X e Y foram consideradas estruturadas, com $X_{(1,2)}$ e $Y_{(1,2)}$ simétricas, $X_{(4,5)}$ e $Y_{(3,5)}$ arbitrárias e X_3 e Y_4 nulas (outras estruturas com distintas complexidades, como diagonal ou escalar, poderiam ser consideradas, fornecendo resultados diferentes).

Cômputo da norma ℓ_1

Neste primeiro experimento, um limitante superior da norma ℓ_1 de uma base de dados de sistemas dinâmicos é calculado utilizando A1 com as duas possíveis inicializações de \bar{X} e \bar{Y} dadas por T2 ou T3. Os resultados são comparados com as condições de Vincent et al. (1996) (V96) com busca linear no parâmetro $\alpha \in (0, \kappa)$, que foi baseada no teste sequencial de 1000 pontos igualmente espaçados dentro dessa faixa. Testar menos (mais) pontos aumenta (diminui) o conservadorismo da solução.

A base de dados¹ é formada por sistemas lineares estáveis (isto é, com matrizes A Schur) como em (1), sendo elaborada a partir dos seguintes passos: As matrizes A , B , C e D são criadas com elementos aleatórios (utilizando uma distribuição normal) tais que a matriz A seja Schur com maior autovalor em módulo pertencente à faixa $[0, 1, 0, 8]$. Para as dimensões das matrizes foram consideradas 10 diferentes combinações de $n_x \in \{3, 6, 9\}$, $n_w \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $n_z \in \{1, 2, 4\}$ com 10 sistemas cada (total de 90 sistemas).

Os resultados são mostrados na Tabela 1 em que, para avaliar a acurácia, computa-se a média da diferença relativa percentual $\gamma_{rel} = 100(\gamma_{V96} - \gamma_{A1})/\gamma_{V96}$, sendo γ_{V96} (γ_{A1}) a norma computada por V96 (A1). A complexidade numérica é estimada em termos do tempo computacional médio t (em segundos) demandado pelo resolvidor e do número de iterações médio i_{med} de A1. A coluna %f indica a porcentagem de sistemas em que A1 foi capaz de fornecer um custo garantido, isto é, chegou na fase 2.

Analisando a Tabela 1 pode-se notar que as condições iniciais propostas em T3 produzem melhores resultados do que T2 em total de sistemas detectados como estáveis (quando A1 sai da fase 1 e passa para a fase 2), e que T2 não consegue computar as normas para algumas dimensões. Além do desempenho superior em termos de acurácia, T3 fornece uma diferença relativa média bem menor se comparado a T2, em todos os casos ficando abaixo de 1%.

Note que uma vantagem de A1 em relação a V96 é a não necessidade da busca linear em α , que em muitos casos pode ser exaustiva computacionalmente, embora resulte quase sempre em limitantes mais acurados. Por exemplo, em apenas um caso da tabela (associados aos sistemas de maior dimensão) o tempo computacional demandado por A1_{T2} foi superior ao de V96. Contudo, o principal interesse de A1 é permitir uma extensão direta para tratar o problema de controle, como ilustra o próximo experimento.

Controle ℓ_1

Exemplo 2: Considere o sistema instável adaptado de Bu et al. (1996) dado por

¹ A base de dados está disponível em <https://www.fee.unicamp.br/profs/ricfow/programs/CBA2022/baseCBA2022.zip>

Tabela 1. Comparação dos limitantes da norma ℓ_1 entre V96 e A1 (inicializado com T2 ou T3). γ_{rel} é diferença relativa (média) entre os custos computados por V96 e A1, $\%f$ é a porcentagem (média) de sistemas em que A1 produziu um limitante para a norma, it_{med} é o número (médio) de iterações demandado por A1 e t é o tempo (médio) computacional em segundos.

Sistemas			A1 _{T2}				A1 _{T3}				V96
n_x	n_w	n_z	$\%f$	γ_{rel} (%)	t (s)	it_{med}	$\%f$	γ_{rel} (%)	t (s)	it_{med}	t (s)
3	1	1	50	0,36	0,36	43	100	0,16	0,16	15	3,85
	1	2	70	2,32	0,36	43	100	0,12	0,09	11	3,87
	2	1	60	1,14	0,38	44	100	0,50	0,17	17	4,08
	2	2	60	1,21	0,38	43	100	0,33	0,19	20	4,09
6	1	1	50	5,23	2,06	48	100	0,39	1,25	20	6,19
	1	2	50	1,32	2,08	48	100	0,20	1,79	28	6,21
	2	1	50	2,13	2,39	47	100	0,19	1,27	24	6,15
	3	4	20	0,17	2,46	50	100	0,40	2,30	26	7,22
9	1	1	50	16,79	9,16	50	100	0,48	7,08	22	10,87

$$A = \begin{bmatrix} 2,7 & -23,5 & 4,6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -2,5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C_y^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \quad D_u = 1, \quad D_y = 0,1.$$

O objetivo é estabilizar o sistema utilizando como critério de desempenho a norma ℓ_1 e comparar com o controlador dinâmico de ordem completa proposto em Rieber et al. (2008) (R08). Primeiramente, para a inicialização de A1 com o Teorema 3 (baseada em uma matriz dinâmica estável), computou-se o ganho estabilizante de realimentação de estados que minimiza o critério ℓ_1 por meio de uma busca linear em α , utilizando as condições de Sánchez-Peña and Sznaiar (1998). A partir de um controlador factível de ordem n_c , utiliza-se o Teorema 4 para a inicialização do algoritmo na busca por um controlador de ordem $n_c + 1$ (A1_{T3,4}), até chegar ao controlador de ordem completa. Os valores de custo garantido ℓ_1 obtidos por A1 para diferentes ordens do controlador e o menor valor obtido com o controlador dinâmico pelas condições R08 são mostrados na Tabela 2. Pode-se observar que A1 provê custos próximos do valor de R08, inclusive com controladores de ordem reduzida $n_c = \{1, 2\}$, em tempos computacionais bem menores que o exigido pelo método R08 (devido à busca unidimensional). As matrizes das realizações dos controladores dinâmicos obtidos por A1 são dadas a seguir.

- $n_c = 1$ ($\alpha = 0,243$ e $\gamma = 1,57$):
 $A_c = -0,788, B_c = 2,156, C_c = -0,016, D_c = -0,933.$
- $n_c = 2$ ($\alpha = 0,239$ e $\gamma = 1,36$):
 $A_c = \begin{bmatrix} 0,618 & -0,010 \\ 0,020 & -0,804 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0,015 \\ 2,172 \end{bmatrix},$
 $C_c = [0,001 \ -0,015], D_c = -0,935.$
- $n_c = 3$ ($\alpha = 0,235$ e $\gamma = 1,36$):
 $A_c = \begin{bmatrix} 0,610 & 3,270 & 0,003 \\ -0,096 & -0,723 & -0,002 \\ 0,021 & 0,064 & -0,795 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} -0,023 \\ 0,013 \\ 2,160 \end{bmatrix},$
 $C_c = [0,001 \ 0,002 \ -0,013], D_c = -0,937.$

Exemplo 3: Considere o modelo de um sistema massa-mola adaptado de (Iwasaki, 1996)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -((k_1+k_2)/m_1) & k_2/m_1 & -c_0/m_1 & 0 \\ k_2/m_2 & -k_2/m_2 & 0 & -c_0/m_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Tabela 2. Valores mínimos γ do limitante da norma ℓ_1 obtidos por A1_{T3,4} e Rieber et al. (2008) (R08), com tempo t (em segundos) e número de iterações it , para $n_c = \{0, 1, 2, 3\}$ ('-' denota que um controlador factível não foi encontrado).

n_c	A1 _{T3,4}				R08
	0	1	2	3	3
γ	-	1,57	1,36	1,35	1,34
$t(s)$	0,82	1,01	0,34	0,62	21,18
it	50	50	10	11	-

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = D_u = 1, \quad D_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

em que $m_1 = 2, m_2 = 1$ são as massas (kg), e $k_1 = 4, k_2 = 0,5$ e $c_0 = 1$ são as constantes elásticas (N/m) e de amortecimento (Ns/m), respectivamente. O sistema foi discretizado com tempo de amostragem de 0,1s. O objetivo é utilizar A1_{T3,4} para computar um controlador dinâmico de realimentação de saída, de ordem $n_c = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, que produza um sistema em malha fechada com menor limitante da norma ℓ_1 e comparar com o controlador dinâmico de ordem completa de Rieber et al. (2008) (R08), que realiza uma busca linear para obter o menor valor de custo garantido ℓ_1 . Os resultados, mostrados na Tabela 3, ilustram novamente o bom desempenho de A1_{T3}.

Tabela 3. Valores mínimos γ do limitante da norma ℓ_1 obtidos por A1_{T3,4} e Rieber et al. (2008) (R08), com tempo t (em segundos) e número de iterações it , para $n_c = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

n_c	A1 _{T3,4}					R08
	0	1	2	3	4	4
γ	1,30	1,04	0,84	0,50	0,47	0,39
$t(s)$	1,40	0,83	1,79	2,70	3,26	12,24
it	50	50	50	35	35	-

Extensão para tratar sistemas incertos

Além de prover controladores de ordem reduzida sem a busca escalar, graças ao fato de as condições propostas apresentarem separadas as matrizes do sistema dinâmico e a matriz de Lyapunov, de maneira afim, a extensão do método para considerar

incertezas politópicas é imediata. Note que o controlador dinâmico de ordem completa de Rieber et al. (2008) não permite a extensão direta para tratar modelos incertos.

Considere o modelo matemático do *Exemplo 3*, com o parâmetro c_0 incerto, $c_0 \in [0,5 \ 1,5]$, e a matriz de saída C_y sujeita a uma possível falha parcial de sensor, $C_{y1} = C_y$, $C_{y2} = 0.5C_y$, resultando em um sistema politópico com 4 vértices. As condições (7) e (8), nesse caso, com \bar{Y}_i e \bar{X}_i , $i = 1, \dots, 5$ dadas, tornam-se LMIs dependentes de parâmetros que podem ser tratadas considerando-se a matriz de Lyapunov e as variáveis X_i e Y_i como polinômios homogêneos de graus arbitrários, seguindo a metodologia proposta em Oliveira and Peres (2007). Neste trabalho, esse procedimento foi realizado com o auxílio do *parser* ROLMIP (Agulhari et al., 2019) (todas as variáveis foram consideradas com dependência afim nos parâmetros incertos), para chegar-se a um conjunto de LMIs programável.

Os resultados do algoritmo A1 são mostrados na Tabela 4, com custos garantidos obtidos para todas as ordens $n_c = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ consideradas.

Tabela 4. Valores mínimos γ do limitante da norma ℓ_1 obtidos por A1_{T3,4} com tempo t (em segundos) e número de iterações it , para $n_c = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

	A1 _{T3,4}				
n_c	0	1	2	3	4
γ	2,64	2,38	2,37	2,06	2,05
$t(s)$	7,59	3,44	5,21	35,79	8,54
it	50	9	11	26	13

6. CONCLUSÃO

Este trabalho propôs uma abordagem iterativa baseada em LMIs para o cálculo de um limitante da norma ℓ_1 de sistemas lineares discretos no tempo. Além de excluir a busca linear em α , a técnica proposta possui como vantagem a possibilidade de realizar projetos de controladores dinâmicos de diferentes ordens. As matrizes do controlador são tratadas diretamente como variáveis de otimização do problema, o que facilita incorporar restrições de estrutura ou de limitação de magnitude dos elementos do controlador. Exemplos mostraram resultados acurados com menor esforço computacional em comparação com outros métodos da literatura.

REFERÊNCIAS

Abedor, J., Nagpal, K., and Poolla, K. (1996). A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 6, 899–927.

Agulhari, C.M., Felipe, A., Oliveira, R.C.L.F., and Peres, P.L.D. (2019). Algorithm 998: The Robust LMI Parser — A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 45(3), 36:1–36:25. <http://rolmip.github.io>.

Andersen, E.D. and Andersen, K.D. (2000). The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang (eds.), *High Performance Optimization*, volume 33 of *Applied Optimization*, 197–232. Springer US. <http://www.mosek.com>.

Bertolin, A.L.J., Oliveira, R.C.L.F., and Peres, P.L.D. (2021). Método iterativo para cômputo da norma e controle \mathcal{L}_1 de

sistemas lineares contínuos no tempo. In *XV SBAI*, 1591–1597. Online.

Blanchini, F. and Sznaier, M. (1995). Persistent disturbance rejection via static-state feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 40(6), 1127–1131.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

Bu, J., Sznaier, M., and Holmes, M.S. (1996). A linear matrix inequality approach to synthesizing low order ℓ_1 controllers. In *Proc. 35th IEEE Conf. Decision Control*, 1875–1880. Kobe, Japan.

Dahleh, M.A. and Diaz-Bobillo, I.J. (1995). *Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Dahleh, M.A. and Pearson, Jr., J.B. (1987). ℓ_1 -optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 32(4), 314–322.

de Oliveira, M.C. and Skelton, R.E. (2001). Stability tests for constrained linear systems. In S.O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, 241–257. Springer-Verlag, New York, NY.

Felipe, A. and Oliveira, R.C.L.F. (2021). An LMI-based algorithm to compute robust stabilizing feedback gains directly as optimization variables. *IEEE Trans. Autom. Control*, 66(9), 4365–4370.

Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A.J., and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works, Natick, MA.

Iwasaki, T. (1996). Robust performance analysis for systems with structured uncertainty. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 6, 85–99.

Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, 284–289. Taipei, Taiwan. <http://yalmip.github.io>.

McDonald, J.S. and Pearson, J.B. (1991). ℓ_1 -optimal control of multivariable systems with output norm constraints. *Automatica*, 27(2), 317–329.

Oliveira, R.C.L.F. and Peres, P.L.D. (2007). Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(7), 1334–1340.

Rieber, J.M., Scherer, C.W., and Allgöwer, F. (2008). Robust ℓ_1 performance analysis for linear systems with parametric uncertainties. *Int. J. Control*, 81(5), 851–864.

Sánchez-Peña, R.S. and Sznaier, M. (1998). *Robust Systems: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY.

Sturm, J.F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optim. Method Softw.*, 11(1–4), 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.

Vidyasagar, M. (1986). Optimal rejection of persistent bounded disturbances. *IEEE Trans. Autom. Control*, 31(6), 527–534.

Vincent, T., Abedor, J., Nagpal, K., and Khargonekar, P.P. (1996). Discrete-time estimators with guaranteed peak-to-peak performance. In *Proc. 13th IFAC World Congr.*, 4470–4475. San Francisco, CA, USA.