

Controle Extremal Multivariável Estocástico com Atrasos de Entrada e Saída

Paulo Cesar Souza da Silva* Paulo César Pellanda*
Tiago Roux Oliveira**

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa,
Instituto Militar de Engenharia (IME), Rio de Janeiro – RJ, Brasil,
(e-mail: cesar.paulo151@hotmail.com, pellanda@ime.eb.br).

** Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ),
Rio de Janeiro – RJ, Brasil,
(e-mail: tiagoroux@uerj.br)

Abstract: This paper proposes the control design and analysis for a multivariable Gradient-based stochastic extremum seeking under delays. Multi-input systems with output delay and time delays in the input channels are dealt with. The phase compensation of the stochastic dither signals and a new predictor based on the estimate of the unknown Hessian are presented and incorporated in the closed-loop, allowing to achieve exponential stability and convergence to a small neighborhood of the unknown extremum point. This result is rigorously reached by using backstepping transformation and averaging in infinite dimensions. A numerical example is shown to illustrate the effectiveness of the proposed predictor-based stochastic extremum seeking for time-delay compensation.

Resumo: Neste artigo, é proposto o projeto e análise do controlador extremal multivariável estocástico baseado no método Gradiente na presença de atrasos. São tratados sistemas de múltiplas entradas com atrasos nos canais de entrada e atraso de saída. A compensação de fase dos sinais de perturbação estocásticos e um novo preditor baseado na estimativa da Hessiana desconhecida são apresentados e incorporados ao sistema em malha fechada, garantindo a estabilidade exponencial e a convergência a uma pequena vizinhança do ponto de extremo. Este resultado é rigorosamente alcançado utilizando a transformação *backstepping* e a teoria da média em dimensões infinitas. Um exemplo numérico ilustra o desempenho do controle extremal estocástico para compensação de atrasos.

Keywords: Delays; Predictor; Extremum Seeking; Gradient Method; Backstepping Transformation; Averaging Theory.

Palavras-chaves: Atrasos; Preditor; Controle Extremal; Método Gradiente; Transformação *Backstepping*; Teoria da Média.

1. INTRODUÇÃO

O controle extremal (*Extremum Seeking Control* – ESC) pode ser definido como um método adaptativo de otimização em tempo real, independente do modelo (Krstic e Wang, 2000) e que visa determinar o ponto extremo de um mapeamento não-linear (Krstic, 2009) apresentando um mínimo ou máximo no problema de controle.

Apesar de existir um número extenso de trabalhos e artigos recentes abordando o controle extremal com avanços teóricos e aplicações (Krstic, 2014; Adetola e Guay, 2007; Ghaffari et al., 2012; Oliveira et al., 2011; Krstic e Wang, 2000; Guay e Zhang, 2003; Ferreira et al., 2020; Aminde et al., 2019; Dibo, 2019; Aminde et al., 2020), não existem na literatura trabalhos que examinem rigorosamente o problema de ESC multivariável estocástico (Liu e Krstic, 2012) baseado no algoritmo do tipo Gradiente com inserção de atraso de saída e atrasos nos canais de entrada (Oliveira et al., 2017; Holness et al., 2019).

Além disso, vale comentar que as principais vantagens do controlador extremal estocástico sobre o controlador extremal determinístico (com sinais de excitação determinísticos) são a possibilidade de se escapar dos extremos locais, bem como a garantia de uma taxa de convergência mais rápida (Liu e Krstic, 2012). O ESC está relacionado com uma boa taxa de convergência, enquanto os atrasos, quando são inseridos no sistema em malha fechada e simplesmente ignorados, restringem severamente a taxa de convergência do sistema como um todo ou levam o mesmo à instabilidade, uma vez que, da literatura, sabe-se que o controle extremal não é robusto à presença de atrasos (Oliveira et al., 2017).

Em (Oliveira et al., 2015), propõe-se uma solução para o controle extremal multivariável com atrasos iguais na entrada de um mapeamento quadrático via realimentação por preditor (Oliveira et al., 2020), com a apresentação de duas abordagens para construção do preditor através de estimativas do modelo baseadas em perturbações. A primeira

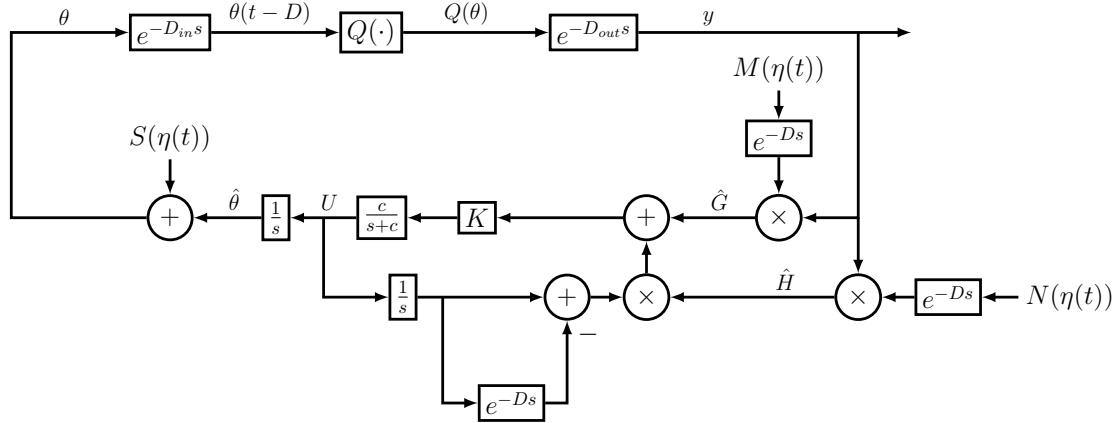


Figura 1. Diagrama de blocos do esquema básico de previsão para compensação de atrasos de entrada e saída no mapeamento $Q(\theta)$. Os sinais (vetores) \hat{G} e \hat{H} são o gradiente e a Hessiana estimados, respectivamente.

baseia-se no método do Gradiente para a otimização, cuja estimativa da Hessiana (Ghaffari et al., 2012) é feita com a finalidade de implementar um preditor que compense os efeitos dos atrasos. A segunda se baseia no algoritmo de Newton (Oliveira e Krstic, 2015), cuja estimativa da inversa da Hessiana é realizada com o intuito de se obter uma taxa de convergência independente dos parâmetros desconhecidos do mapeamento.

Em (Oliveira et al., 2017), o resultado estende-se para atrasos múltiplos e distintos aplicados na entrada, tanto para o algoritmo do Gradiente quanto para o algoritmo de Newton, acarretando em um projeto de preditor complexo, com análise de estabilidade realizada através de sucessivas transformações *backstepping* e aplicando-se a teoria da média em dimensões infinitas (Hale e Lunel, 1990; Lehman, 2002). Por outro lado, Silva e Oliveira (2021) apresentam um esquema alternativo de controle extremal baseado no método do Gradiente multivariável estocástico com múltiplos e distintos atrasos nos canais de entrada, que **não** exige a transformação *backstepping*.

Neste trabalho, propõe-se uma solução para o problema aberto de controle extremal estocástico na presença de atraso de saída e atrasos de entrada, empregando o algoritmo multivariável do tipo Gradiente (Krstic, 2014; Ghaffari et al., 2012) fundamentado na proposta de realimentação por preditor com a estimativa da Hessiana, bem como a análise de estabilidade, que são alcançadas via transformação *backstepping* (Krstic, 2009) e a teoria da média em dimensões infinitas (Hale e Lunel, 1990; Lehman, 2002).

A vantagem de se usar a abordagem *backstepping* é a possibilidade de mostrar que o subsistema de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) de transporte que representa os atrasos é estável em tempo finito com entrada nula (e o subsistema restante tem alguma propriedade ISS – *Input-to-State Stability*). Essa abordagem, portanto, não limita a taxa e o tipo de convergência exponencial do subsistema da EDP, como é feito em (Silva e Oliveira, 2021). Basicamente a transformação *backstepping* pode converter o subsistema em malha fechada da EDP em uma EDP que é estável em tempo finito. Assim, a alocação finita do espectro continua preservada.

Notação: As derivadas parciais de $u(x, t)$ são denotadas por $u_t(x, t)$ e $u_x(x, t)$ ou, ocasionalmente, por $\partial_t u_{av}(x, t)$ e $\partial_x u_{av}(x, t)$, para se referir ao operador do sinal médio $u_{av}(x, t)$. Admitindo-se um sistema não linear genérico $\dot{x} = f(t, x, \epsilon)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t, x, \epsilon)$ é periódico com período T , isto é, $f(t+T, x, \epsilon) = f(t, x, \epsilon)$, então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, é possível obter o modelo médio dado por $\dot{x} = f_{av}(x_{av})$, com $f_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x_{av}, 0) d\tau$, onde $x_{av}(t)$ denota a versão média do estado $x(t)$ (Khalil, 2002). Conforme definido em (Khalil, 2002), uma função vetorial $f(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^n$ é dita de ordem $O(\epsilon)$ dentro do intervalo $[t_1, t_2]$ se existem constantes positivas k e ϵ^* tais que $|f(t, \epsilon)| \leq k\epsilon$, $\forall \epsilon \in [0, \epsilon^*]$ e $\forall t \in [t_1, t_2]$. Por vezes, estimativas para as constantes k e ϵ^* serão fornecidas, podendo-se quantificar a correspondente aproximação $O(\epsilon)$. Caso contrário, $O(\epsilon)$ será satisfeito sendo uma ordem da relação de magnitude válida para ϵ suficientemente pequeno.

2. BUSCA EXTREMAL COM ATRASOS

O ESC multivariável apresenta aplicação na qual o objetivo é maximizar ou minimizar a saída $y \in \mathbb{R}$ de um mapeamento estático não-linear $y = Q(\theta)$ desconhecido através da variação em tempo-real do vetor de entrada $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]$. Neste caso, considera-se o atraso $D \geq 0$ constante e conhecido no caminho de atuação ou no sistema de medição, tal que a saída medida é dada por:

$$y(t) = Q(\theta(t - D)). \quad (1)$$

Os resultados encontrados neste artigo podem ser diretamente estendidos ao caso de entrada atrasada, uma vez que qualquer atraso de entrada pode ser direcionado para a saída do mapeamento estático. O caso no qual os atrasos de entrada D_{in} e de saída D_{out} ocorrem simultaneamente também pode ser tratado assumindo-se que o atraso total a ser neutralizado seja $D = D_{in} + D_{out}$, com $D_{in}, D_{out} \geq 0$. Em particular, o atraso D_{in} precisa ser o mesmo para todos os canais de entrada do vetor $\theta \in \mathbb{R}^n$.

Sem perda de generalidade, assume-se o problema de busca pelo máximo de tal forma que o valor de θ que maximiza y é denotado por θ^* . Por simplicidade, considera-se que o mapeamento *não-linear quadrático* é da forma:

$$y(\theta) = y^* + \frac{1}{2}(\theta - \theta^*)^T H(\theta - \theta^*), \quad (2)$$

cujo ponto de extremo é $y^* \in \mathbb{R}$ e $H = H^T < 0$ é a matriz Hessiana desconhecida $n \times n$ do mapeamento estático.

Seja $\hat{\theta}$ a estimativa de θ^* e

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^* \quad (3)$$

o erro de estimativa. Da Figura 1, obtém-se

$$G(t) = M(\eta(t))y(t), \quad \theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(\eta(t)), \quad (4)$$

O propósito do ESC é estimar θ^* a partir da saída y . Para isso, definem-se os sinais de perturbação senoidais (chamados de *dither*) $S(\eta(t))$ e $M(\eta(t)) \in \mathbb{R}^n$ como:

$$S(\eta(t)) = \left[a_1 \text{sen}(\eta_1(t)) \dots a_n \text{sen}(\eta_n(t)) \right]^T, \quad (5)$$

$$M(\eta(t)) = \left[\frac{2}{a_1} \text{sen}(\eta_1(t)) \dots \frac{2}{a_n} \text{sen}(\eta_n(t)) \right]^T, \quad (6)$$

com amplitudes $a_i, i = 1, 2, \dots, n$. O subscrito i indica a i -ésima entrada do vetor $\eta_i(t)$. Os elementos do vetor de perturbação gaussiana estocástica $\eta(t)$ são sequenciais e mutuamente independentes, de tal maneira que $\mathbb{E}\{\eta(t)\} = 0, \mathbb{E}\{\eta_i^2(t)\} = \sigma_i^2$ e $\mathbb{E}\{\eta_i(t) \eta_j(t)\} = 0, \forall i \neq j$, com $\mathbb{E}\{\cdot\}$ indicando o valor esperado do sinal. Também, assume-se que a função densidade de probabilidade do vetor de perturbação é simétrica em torno da média.

Perturbações senoidais estocásticas são empregadas via processo de movimento browniano padrão $W_{\omega t}$ (também conhecido como processo de Wiener) sobre o limite de um círculo (Liu e Krstic, 2012; Mills e Krstic, 2018). Para satisfazer a propriedade de Markov, não há diferença em previsões futuras baseadas apenas no estado atual do processo. Desse modo, refere-se ao processo de Markov como um processo estocástico, que satisfaz a propriedade de Markov com respeito a sua filtragem natural. O sinal de entrada é construído da seguinte maneira:

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(\eta(t)), \quad (7)$$

no qual $\hat{\theta}$ representa a estimativa de θ^* e

$$\eta_i(t) = \omega \pi (1 + \text{sen}(W_{\omega t}^i)) \quad (8)$$

representa um processo de Markov homogeneamente ergódico com frequência ω não-nula. Os termos $W_{\omega t}^i$ denotam diferentes processos de Wiener mutuamente independentes para cada canal e $\omega > 0$. Utilizando-se a escala de tempo $\tau = \omega t$ e o cálculo estocástico baseado em Ito (Liu e Krstic, 2012), obtém-se:

$$d\eta_i = -\frac{\pi}{2} \text{sen}(W_{\tau}^i) d\tau + \pi \cos(W_{\tau}^i) dW_{\tau}^i. \quad (9)$$

2.1 Análise da Média sem Compensação por Preditor

Se a lei de realimentação $U = KG(t)$ do controle extremal baseado no algoritmo Gradiente clássico for aplicada, pode-se reescrever $\dot{\theta} = \hat{\theta} = KG(t)$, onde $K > 0$ é uma matriz diagonal $n \times n$ positiva. A partir das equações (1) e (4), o sistema em malha fechada pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\dot{\theta} = KM\eta(t)Q(\theta^* + S(\eta(t)) + \tilde{\theta}(t-D)), \quad (10)$$

no parâmetro da variável de erro (3). Para o caso do mapeamento quadrático não linear (2), a partir de (Oliveira et al., 2017; Ghaffari et al., 2012) considera-se Π como:

$$\Pi = 2\pi \times LCM \left\{ \frac{1}{\omega_i} \right\} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (11)$$

onde LCM representa o mínimo múltiplo comum e, usando as seguintes identidades:

$$\frac{1}{\Pi} = \int_0^{\Pi} M(\sigma)Q^*d\sigma = 0, \quad (12)$$

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} \frac{M(\sigma)}{2} (\tilde{\theta} + S(\sigma))^T H (\tilde{\theta} + S(\sigma)) d\sigma = H\tilde{\theta}, \quad (13)$$

da equação (10), obtém-se:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = KH\tilde{\theta}_{av}(t-D) \quad (14)$$

com um equilíbrio $\tilde{\theta}_{av}^e = 0$ do sistema médio não necessariamente estável para valores arbitrários de atraso D , o que reforça a necessidade de empregar a predição $U(t) = KG(t+D), \forall t \geq 0$ para estabilizar o sistema.

2.2 Realimentação por Preditor com Estimativa da Hessiana

A ideia do preditor (Oliveira et al., 2015) consiste em compensar o atraso pela realimentação do estado futuro $G(t+D)$ ou $G_{av}(t+D)$ no sistema médio equivalente. A versão média do sinal (4) é dada por:

$$G_{av} = H\tilde{\theta}_{av}(t-D), \quad (15)$$

gerado pelo seguinte sistema médio:

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t-D) = U_{av}(t-D), \quad (16)$$

desde que

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = U(t-D), \quad (17)$$

com $U \in \mathbb{R}^n$ e $U_{av} \in \mathbb{R}^n$. Resultando em:

$$\dot{G}_{av} = HU_{av}(t-D). \quad (18)$$

Considere a matriz diagonal $K > 0$ como o ganho de estabilização para o sistema não atrasado, deseja-se ter uma lei de controle da seguinte maneira

$$U_{av}(t) = KG_{av}(t+D), \quad \forall t \geq 0, \quad (19)$$

o que parece ser não implementável, pois exige valores futuros do estado. No entanto, aplicando a fórmula da variação das constantes para (15), expressa-se o estado futuro como:

$$G_{av}(t+D) = G_{av}(t) + H \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma) d\sigma, \quad (20)$$

que fornece o estado futuro $G_{av}(t+D)$ em termos do sinal de controle médio $U_{av}(\sigma)$ da janela causal de tempo $[t-D, t]$. Isso produz (vide Figura 1) a seguinte lei de realimentação:

$$U_{av}(t) = K \left[G_{av}(t) + H \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma) d\sigma \right]. \quad (21)$$

Portanto, a partir de (20) e (21), a lei de realimentação média (19) pode ser obtida realmente como desejada. Conseqüentemente,

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t) = KG_{av}(t+D), \quad \forall t \geq 0. \quad (22)$$

Dessa maneira, a partir de (15), chega-se a:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}(t)}{dt} = KH\tilde{\theta}_{av}(t), \quad \forall t \geq D, \quad (23)$$

com um equilíbrio $\tilde{\theta}_{av}^e = 0$ exponencialmente atrativo, uma vez que $KH < 0$ no projeto de controle. Ou seja, o sistema atua como se o atraso estivesse ausente após D segundos.

Na próxima seção, mostra-se que os objetivos de controle podem ainda ser alcançados se uma modificação simples, que utiliza um filtro passa-baixas, é aplicada ao controlador baseado em preditor. Neste caso, propõe-se a seguinte versão filtrada do preditor de dimensão infinita para a compensação do atraso (Krstic, 2008):

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ K \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (24)$$

onde $K > 0$ e $c > 0$ é suficientemente grande. A versão média do sinal (19) é um sinal filtrado de (16). Esta filtragem passa-baixas é particularmente necessária na análise de estabilidade quando o teorema da média em dimensões infinitas (Hale e Lunel, 1990; Lehman, 2002) é invocado, já que não existem resultados de teorema da média para sistemas com atrasos na saída/entrada. Dessa maneira, manipula-se matematicamente o sistema, inserindo o filtro e transformando atrasos de saída em atrasos distribuídos no estado, assim como a variável de estado do sistema em malha fechada. Note que na equação (24), utiliza-se uma notação mista tempo-frequência com o domínio do tempo representado pela variável t e o domínio da transformada de Laplace pela variável s .

A realimentação do preditor (24) é em dimensão infinita porque a integral envolve o histórico de controle ao longo do intervalo $[t-D, t]$. Por outro lado, é baseado em média (baseado em perturbação) porque \hat{H} é atualizado de acordo com a estimativa da Hessiana H desconhecida:

$$\hat{H}(t) = N(\eta(t))y(t), \quad (25)$$

satisfazendo a seguinte propriedade da média

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\sigma)y d\sigma = H, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \quad (26)$$

demonstrada em (Ghaffari et al., 2012) se um mapeamento quadrático não-linear como em (2) é considerado. Assim sendo, a versão média de $H(t)$ é dada por $\hat{H}_{av}(t) = (Ny)_{av}(t) = H$ e $G_{av}(t) = H\tilde{\theta}_{av}$.

Os elementos da matriz $n \times n$ de demodulação de $N(\eta(t))$ para a geração da estimativa da Hessiana são dados por:

$$N_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{16}{a_i^2} \left(\sin^2(\eta_i(t)) - \frac{1}{2} \right), & i = j \\ \frac{4}{a_i a_j} \sin(\eta_i(t)) \sin(\eta_j(t)), & i \neq j. \end{cases} \quad (27)$$

3. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

O Teorema 1, a seguir, sintetiza as propriedades de estabilidade/convergência do sistema realimentado em malha fechada. Os operadores $\mathbf{E}\{\cdot\}$ e $\mathbf{P}\{\cdot\}$ denotam, respectivamente, o valor esperado e a probabilidade dos sinais.

Teorema 1 Considere o sistema em malha fechada da Figura 1 com atrasos iguais na entrada e um mapeamento não-linear localmente quadrático (2). Existe $c^* > 0$ tal que,

$\forall c \geq c^*, \exists \omega^*(c)$ de maneira tal que, $\forall \omega \geq \omega^*$, o sistema atrasado em malha fechada (17) e (24), com $G(t)$ em (4), $\hat{H}(t)$ em (25), e o estado $\tilde{\theta}(t-D)$, $U(\tau)$, $\forall \tau \in [t-D, t]$, tem uma única solução periódica exponencialmente estável em t de período $\Pi = 2\pi/\omega$, denotada por $\tilde{\theta}^\Pi(t-D)$, $U^\Pi(\tau)$, $\forall \tau \in [t-D, t]$, satisfazendo, $\forall t \geq 0$:

$$\mathbf{E} \left\{ |\tilde{\theta}^\Pi(t-D)|^2 + [U^\Pi(t)]^2 + \int_{t-D}^t [U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \right\}^{1/2} \leq O(1/\omega). \quad (28)$$

Além disso,

$$\lim_{(1/\omega) \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| \right\} = O(a + 1/\omega), \quad (29)$$

$$\lim_{(1/\omega) \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| \right\} = O(a^2 + 1/\omega^2), \quad (30)$$

sendo que $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$.

A prova é apresentada nas Seções 3.1 a 3.8, a seguir.

3.1 Sistema Médio EDO-EDP

De acordo com Krstic (2009), o atraso em (17) pode ser representado empregando uma EDP de transporte como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = u(0, t), \quad (31)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (32)$$

$$u(D, t) = U(t), \quad (33)$$

onde a solução de (32)-(33) é

$$u(x, t) = U(t + x - D), \quad (34)$$

no qual t é o tempo, D é o atraso e x o estado que permite a representação do sistema de EDO (Equações Diferenciais Ordinárias)-EDP acima.

3.2 Sistema em Malha Fechada

Primeiro, conecta-se (3) e (4) em (2). Então, a saída é dada da seguinte maneira:

$$y(t) = y^* + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}(t-D) + S(t-D))^T H (\tilde{\theta}(t-D) + S(t-D)). \quad (35)$$

Conectando (4) e (25) em (24) e representando o integrando em (24) por meio da EDP de transporte, encontra-se:

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ K \left[G(t) + \hat{H} \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (36)$$

$$G(t) = \frac{2}{a} \sin(\eta(t-D))y(t), \quad (37)$$

$$\hat{H}(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\eta(t))y(t). \quad (38)$$

Finalmente, substituindo (36) em (33), pode-se reescrever (31)-(33) como:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = u(0, t), \quad (39)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (40)$$

$$u(D, t) = \frac{c}{s+c} \left\{ K \left[G(t) + \hat{H} \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (41)$$

com solução

$$u_{av}(x, t) = U_{av}(t+x-D). \quad (42)$$

3.3 Modelo Médio do Sistema em Malha Fechada

De maneira semelhante ao cálculo realizado em (Ghaffari et al., 2012), as duas seguintes propriedades de média podem ser obtidas caso um mapeamento quadrático como em (36) seja considerado:

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} M(\lambda) y d\lambda = H \tilde{\theta}_{av}(t-D) \quad (43)$$

e

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\lambda) y \bar{u} d\lambda = H \int_0^D u_{av}(\sigma, t) d\sigma, \quad (44)$$

onde $\bar{u}(t) = \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma$, enquanto que $\tilde{\theta}_{av}(t-D)$ e $u_{av}(\sigma, t)$ indicam as versões médias de $\tilde{\theta}(t-D)$ e $u(\sigma, t)$, respectivamente.

Agora, denotando-se

$$\tilde{\vartheta}(t) = \tilde{\theta}(t-D) \quad (45)$$

e usando (24), a versão média do sistema (31)-(33) é

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = u_{av}(0, t), \quad (46)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_x u_{av}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt} u_{av}(D, t) = -c u_{av}(D, t) + c K H \left[\tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right] \quad (48)$$

onde o filtro $c/s+c$ também foi representado na forma de espaço de estado.

3.4 Transformação Backstepping, sua Inversa e o Sistema Alvo

Considera-se a seguinte transformação *backstepping* de dimensão infinita do estado atrasado

$$w(x, t) = u_{av}(x, t) - K H \left[\tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^x u_{av}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (49)$$

que mapeia o sistema linearizado (39)-(41) em

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = K H \tilde{\vartheta}_{av}(t) + w(0, t), \quad (50)$$

$$\partial_t w(x, t) = \partial_x w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (51)$$

$$\partial_t u_{av}(D, t) = -c w(D, t). \quad (52)$$

Note que (50) é ISS com respeito a $w(0, t)$ e que (51)-(52) é estável em tempo finito à medida que $c \rightarrow +\infty$, isto é, $w(D, t) \rightarrow 0$.

Empregando (31), deriva-se parcialmente o estado transformado $w(x, t)$ em (49) em relação ao tempo t e considera-se $x = D$ tal que

$$\partial_t w(D, t) = \partial_t u_{av}(D, t) - K H u_{av}(D, t). \quad (53)$$

Além disso, considere a transformação inversa de (49)

$$u_{av}(x, t) = w(x, t) + K H \left[e^{KHx} \tilde{\vartheta}_{av} + \int_0^x e^{KH(x-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (54)$$

Substituindo-se (52) e (54) em (53):

$$\begin{aligned} \partial_t w(D, t) &= -c w(D, t) - K H w(D, t) \\ &- (K H)^2 \left[e^{K H D} \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \int_0^D e^{K H (D-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

3.5 Funcional de Lyapunov

Dado o seguinte funcional de Lyapunov

$$\begin{aligned} V(t) &= \tilde{\vartheta}_{av}(t)^T P \tilde{\vartheta}_{av}(t) + \frac{a}{2} \int_0^D (1+x) w(x, t)^T w(x, t) dx \\ &+ \frac{1}{2} w(D, t)^T w(D, t), \end{aligned}$$

onde $P = P^T > 0$ é a solução da equação de Lyapunov

$$P(KH) + (KH)^T P = -Q, \quad (56)$$

para $Q = Q^T > 0$, e o parâmetro $a > 0$ é escolhido da seguinte forma:

$$a = 4 \frac{\lambda_{max} P^2}{\lambda_{min}(Q)}, \quad (57)$$

onde λ_{min} e λ_{max} são autovalores mínimos e máximos das matrizes correspondentes. Mostra-se que

$$\dot{V}(t) \leq -\mu V(t) \quad (58)$$

para algum $\mu > 0$ apropriado. Portanto, O sistema em malha fechada é exponencialmente estável no sentido de norma completa do estado:

$$\sqrt{|\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + w(D, t)^T w(D, t) + \int_0^D w(x, t)^T w(x, t) dx}, \quad (59)$$

i.e., na variável transformada $(\tilde{\vartheta}_{av}, w)$.

3.6 Estabilidade Exponencial do Sistema Médio

Para obter a estabilidade exponencial no sentido de norma

$$\sqrt{|\tilde{\vartheta}_{av}(t)|^2 + u_{av}^2(D, t) + \int_0^D u_{av}^2(x, t) dx}, \quad (60)$$

precisa-se demonstrar que

$$\alpha_1 \Psi(t) \leq V(t) \leq \alpha_2 \Psi(t), \quad (61)$$

para α_1 e α_2 sendo números positivos apropriados e

$$\Psi(t) := |\tilde{\theta}_{av}(t-D)|^2 + U_{av}^2(t) + \int_{t-D}^t (U_{av}(\tau))^2 d\tau. \quad (62)$$

Isso é realizado utilizando uma abordagem similar àquela em (Krstic, 2009, Theorem 1). Assim, obtém-se:

$$\Psi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (63)$$

que completa a prova da estabilidade exponencial para o sistema médio nas variáveis originais $(\tilde{\theta}_{av}(t-D), u_{av}(x, t))$.

3.7 Invocando o Teorema da Média

Reescrevendo as equações (17) e (24), o sistema em malha fechada é obtido como:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = U(t-D), \quad (64)$$

$$\dot{U}(t) = -cU(t) + c \left\{ k \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (65)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t-D) \\ U(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -cU(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kU(t-D) \\ ckG(t) + ck\hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \end{bmatrix}. \quad (66)$$

A partir das equações (64) e (65), define-se o vetor de estado da seguinte forma:

$$\mathbf{z}^\epsilon(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t-D) \\ U(t) \end{bmatrix}, \quad (67)$$

que permite expressar (65) na forma de uma equação diferencial funcional estocástica

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{z}^\epsilon(\tau) = G(\mathbf{z}_\tau^\epsilon) + \epsilon F(\tau, \mathbf{z}_\tau^\epsilon, \eta(\tau), \epsilon), \quad (68)$$

no qual $\epsilon := 1/\omega$. Portanto, uma vez que $\eta(\tau)$ é um processo de Markov homogeneamente ergódico (assumindo valores no espaço de fase Y) com medida invariante $\mu(d\eta)$ e propriedade de ergodicidade exponencial, $\mathbf{z}_t^\epsilon(\delta) = \mathbf{z}^\epsilon(t+\delta)$ para $-D \leq \delta \leq 0$ e $G: \mathbf{C}_2([-D, 0]) \rightarrow \mathbf{R}^2$, bem como a função Lipschitz $F: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{C}_2([-D, 0]) \times Y \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ com $F(\tau, 0, \eta, \epsilon) = 0$ são mapeamentos contínuos e $\mathbf{C}_2([-D, 0])$ denotando a classe de funções vetoriais contínuas de dimensão 2 no intervalo $[-D, 0]$, pode-se aplicar o teorema da média de (Katafygiotis e Tsarkov, 1999) para concluir o resultado exponencial de p -estabilidade (com $p=2$) do sistema aleatório inicial considerando ϵ suficientemente pequeno ($\epsilon \rightarrow 0$) e obter assim a desigualdade (28).

3.8 Convergência Assintótica para um Resíduo

Define-se o tempo de parada (Liu e Krstic, 2010):

$$\tau_\epsilon^{\Delta(\epsilon)} := \inf \{ t \geq 0 : |\mathbf{z}^\epsilon(t)| > M|\mathbf{z}^\epsilon(0)|e^{-\lambda t} + O(\epsilon) \} \quad (69)$$

como a primeira vez em que a norma do vetor de erro deixa de satisfazer a propriedade de decaimento exponencial.

Além disso, aparecem as constantes da seguinte forma: $M > 0$, $\lambda > 0$ e a função $T(\epsilon): (0, 1) \rightarrow \mathbf{N}$. Dessa maneira, a norma do vetor erro $|\mathbf{z}^\epsilon(t)|$ converge para um valor menor do que o valor residual $\Delta(\epsilon) = O(\epsilon)$. Trata-se de uma convergência exponencial e rápida que pode se dar de duas formas: *almost surely (a.s.)* e *in probability*:

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \{ t \geq 0 : |\mathbf{z}^\epsilon(t)| > M|\mathbf{z}^\epsilon(0)|e^{-\lambda t} + \Delta \} = \infty, \text{ a.s.}, \quad (70)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\{ |\mathbf{z}^\epsilon(t)| \leq M|\mathbf{z}^\epsilon(0)|e^{-\lambda t} + \Delta, \forall t \in [0, T(\epsilon)] \} = 1, \quad (71)$$

com $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\epsilon) = \infty$. De (70), fica claro que $\tau_\epsilon^{\Delta(\epsilon)}$ se aproxima de infinito à medida que ϵ tende a zero. De forma similar, em (71), a função determinística $T(\epsilon)$ tende

a infinito à medida que ϵ vai a zero. Segue de (70) e (71) que a convergência exponencial é satisfeita dentro de um intervalo de tempo arbitrariamente longo. Qualquer componente do vetor erro converge para um valor menor que $\Delta(\epsilon) = O(\epsilon)$, particularmente o componente $\tilde{\theta}(t)$. Então, pode-se dizer que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| \right\} = O(\epsilon)$. A partir das equações (3) e (7), chega-se a

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + a \text{sen}(\eta(t)). \quad (72)$$

Uma vez que o primeiro termo no lado direito de (72) é da ordem de $O(\epsilon)$ e o segundo termo é da ordem de $O(a)$, chega-se à equação (29). Finalmente, a partir de (2) e (29), obtém-se (30). \square

4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Com o objetivo de avaliar a compensação do atraso no ESC estocástico multivariável, considera-se o seguinte mapeamento estático não linear:

$$Q(\theta) = 5 + \frac{1}{2} \left(2(\theta_1)^2 + 4(\theta_2 - 1)^2 + 4\theta_1(\theta_2 - 1) \right), \quad (73)$$

com atrasos $D_{in} = 25$ e $D_{out} = 25$. Os pontos de extremo são $\theta^* = (0, 1)$ e $y^* = 5$ e a Hessiana desconhecida do mapeamento é $H = - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. A seguir, são apresentadas simulações numéricas do preditor (24) para os seguintes valores: $a_1 = a_2 = 0.22$, $c = 20$ e $K = 0.005 \mathbf{I}$, em que $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ é a matriz identidade de ordem 2.

Pela Figura 2, verifica-se a preservação da estabilidade do sistema em malha fechada e a convergência da entrada da planta para a vizinhança do valor ótimo $\theta^* = (0, 1)$ quando nenhum atraso é considerado. Na Figura 3, observa-se que a saída da planta convergiu para a vizinhança do valor desejado $y^* = 5$.

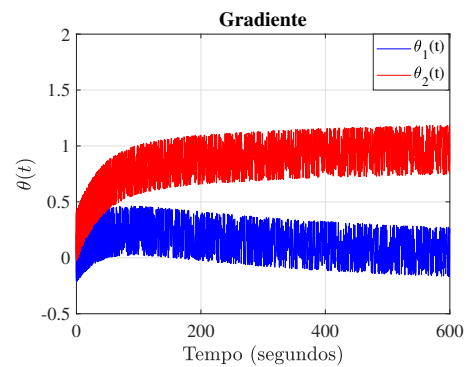


Figura 2. Entrada $\theta(t)$ do algoritmo Gradiente multivariável estocástico sem atrasos.

Pelos resultados das Figuras 4 e 5, verifica-se que o controle extremal não é robusto na presença de atrasos de entrada ou saída, levando o sistema em malha fechada à instabilidade, conforme já demonstrado na literatura (Oliveira et al., 2017).

Pela Figura 6, confere-se a preservação do sistema em malha fechada e a convergência da entrada da planta para a vizinhança do valor ótimo $\theta^* = (0, 1)$ quando o esquema proposto baseado em preditor é empregado.

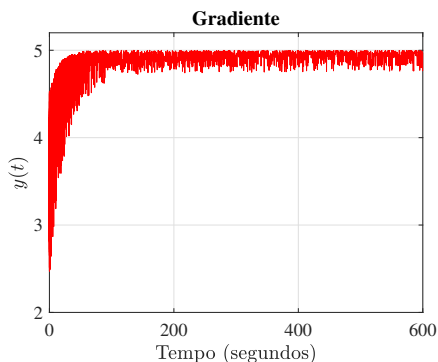


Figura 3. Saída $y(t)$ do algoritmo Gradiente multivariável estocástico sem atrasos.

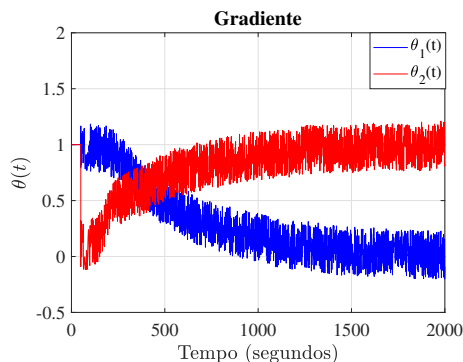


Figura 6. Entrada $\theta(t)$ do algoritmo Gradiente multivariável estocástico com atrasos mais preditor.

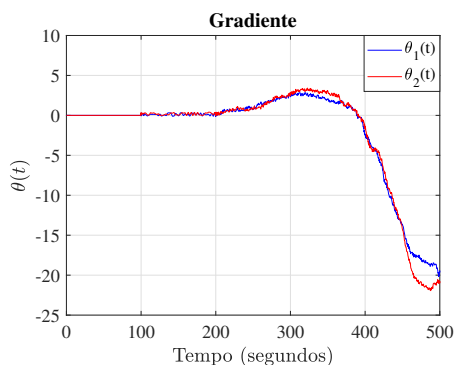


Figura 4. Entrada $\theta(t)$ do algoritmo do Gradiente multivariável estocástico com atrasos sem preditor.

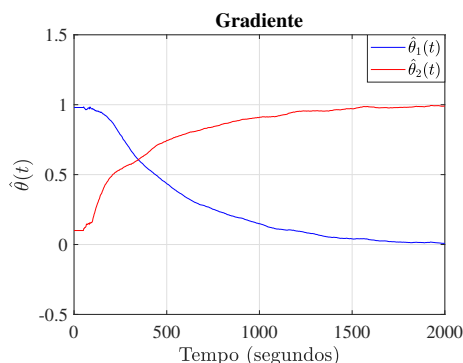


Figura 7. Estimativa $\hat{\theta}(t)$ do algoritmo Gradiente multivariável estocástico com atrasos mais preditor.

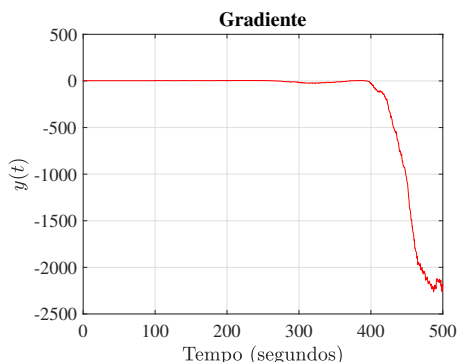


Figura 5. Saída $y(t)$ do algoritmo Gradiente multivariável estocástico com atrasos sem preditor.

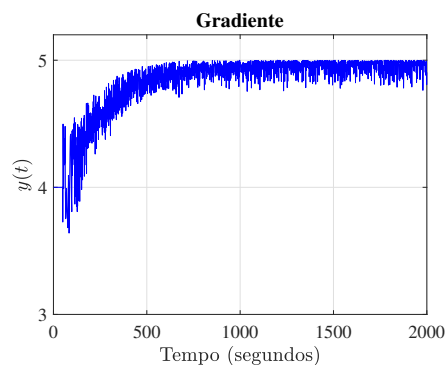


Figura 8. Saída $y(t)$ do algoritmo Gradiente multivariável estocástico com atrasos mais preditor.

Na Figura 8, observa-se que o atraso total inserido foi devidamente compensado pelo preditor, a estabilidade do sistema em malha fechada foi completamente preservada ao longo do tempo e a saída da planta convergiu para a vizinhança do valor desejado $Q^* = 5$. Observa-se, na Figura 9, a atenuação do sinal de controle $U(t)$ à medida que a saída do mapeamento tende à vizinhança de seu valor ótimo y^* . Pela Figura 10, nota-se que a estabilidade do sistema em malha fechada foi preservada e as estimativas da matriz Hessiana convergem para a vizinhança ótima desejada.

5. CONCLUSÃO

Neste artigo, foi proposto um novo esquema de controle extremal estocástico baseado no algoritmo Gradiente para

otimização multiparamétrica em tempo real na presença de atrasos de entrada e saída. A lei de controle aqui definida para compensação dos múltiplos atrasos usa realimentação baseada em preditor com estimativa da Hessiana baseada em perturbações, associada ao ajuste adequado dos sinais estocásticos (de excitação). A nova abordagem preserva a estabilidade exponencial e a convergência da saída do sistema à uma pequena vizinhança do ponto de extremo, mesmo na presença de atrasos. Realizou-se uma rigorosa demonstração de estabilidade via transformação *backstepping* e teorema da média em dimensões infinitas. Os resultados numéricos mostram os desafios e vantagens de lidar com a inserção dos atrasos no sistema e a posterior implementação do preditor no algoritmo do tipo Gradiente para a compensação dos atrasos.

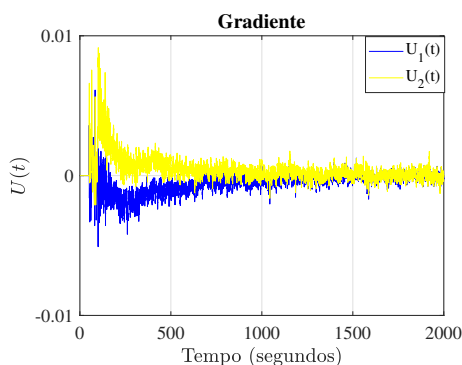


Figura 9. Sinal de Controle $U(t)$ do algoritmo do Gradiente multivariável estocástico com atrasos mais predictor.

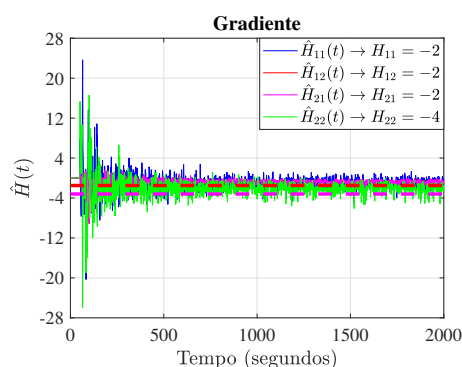


Figura 10. Convergência do valor $\hat{H}(t)$ da estimação da matriz Hessiana. O tracejado vermelho corresponde a $H_{11} = H_{12} = H_{21} = -2$ e o tracejado lilás corresponde a $H_{22} = -4$.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Os autores agradecem o CNPq e a FAPERJ pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

Adetola, V. e Guay, M. (2007). Guaranteed parameter convergence for extremum-seeking control of nonlinear systems. *Automatica*, 43, 105–110.

Aminde, N., Oliveira, T.R., e Hsu, L. (2019). Controle extremal cíclico multivariável via função de monitoração. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 1, 1700–1706.

Aminde, N., Oliveira, T.R., e Hsu, L. (2020). Controle multivariável para busca extremal cíclica usando modos deslizantes e função de chaveamento periódica. *Congresso Brasileiro de Automatica*, 2(1).

Dibo, A.L. (2019). *Controle extremal para mapeamentos estáticos e dinâmicos com sinal de Hessiana desconhecido*. Master's thesis, PEL/UERJ.

Ferreira, D.C., Oliveira, T.R., e Krstic, M. (2020). Otimidade inversa em controle extremal do tipo newton com atrasos. *Congresso Brasileiro de Automatica*, 2(1).

Ghaffari, A., Krstic, M., e Nesic, D. (2012). Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, 48, 1759–1767.

Guay, M. e Zhang, T. (2003). Adaptive extremum seeking control of nonlinear dynamic systems with parametric uncertainties. *Automatica*, 39, 1283–1293.

Hale, J.K. e Lunel, S.M.V. (1990). Averaging in infinite dimensions. *Journal of Integral Equations and Applications*, 2, 463–494.

Holness, E., Oliveira, T.R., e Tsubakino, D. (2019). Controle extremal multivariável simplificado para atrasos distintos de entrada. *XIV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 1, 3153–3158.

Katafygiotis, L. e Tsarkov, Y. (1999). Averaging and stability of quasilinear functional differential equations with markov parameters. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 12, 1–15.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Krstic, M. (2008). Lyapunov tools for predictor feedback for delays systems: Inverse optimality and robustness to delays mismatch. *Automatica*, 44, 2930–2935.

Krstic, M. (2009). *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhauser.

Krstic, M. (2014). *Extremum Seeking Control*, in T.Samad and J. Baillieul, *Encyclopedia of Systems and Control*. Springer.

Krstic, M. e Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamics systems. *Automatica*, 36, 595–601.

Lehman, B. (2002). The influence of delays when averaging slow and fast oscillations systems: Overview. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 19, 201–215.

Liu, S.J. e Krstic, M. (2010). Stochastic averaging in continuous time and its applications in to extremum seeking. *IEEE Trans. Autom. Control*, 55, 2235–2250.

Liu, S.J. e Krstic, M. (2012). *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*. Springer.

Mills, G. e Krstic, M. (2018). Maximizing map sensitivity and higher derivatives via extremum seeking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63, 3237–3247.

Oliveira, T.R., Hsu, L., e Peixoto, A.J. (2011). Output-feedback global tracking for unknown control direction plants with applications to extremum-seeking control. *Automatica*, 47, 2029–2038.

Oliveira, T.R. e Krstic, M. (2015). Newton-based extremum seeking under actuator and sensor delays. *IFAC Workshop on Time Delay Systems*, 48, 304–309.

Oliveira, T.R., Krstic, M., e Tsubakino, D. (2015). Multi-parameter extremum seeking with output delays. *American Control Conference*, 152–158.

Oliveira, T.R., Krstic, M., e Tsubakino, D. (2017). Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62, 1911–1926.

Oliveira, T.R., Krstic, M., e Tsubakino, D. (2020). A simplified multivariable gradient extremum seeking for distinct input delays with delay-independent convergence rates. *American Control Conference (ACC)*, 608–613.

Silva, P.C.S. e Oliveira, T.R. (2021). Controle extremal multivariável estocástico com atrasos distintos de entrada. *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 1(1).