

Controle por busca extremal para rastreamento de ressonância em giroscópios do tipo HRG

Felipe Augusto Rizzi* Bruno Augusto Angelico**

* *Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, SP, (e-mail: felipe.rizzi@usp.br).*

** *Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, SP, (e-mail: angelico@lac.usp.br).*

Abstract: This work presents the development of an extremum seeking controller (ESC) based on periodic perturbation for tracking the resonance frequency in HRG gyros. For controller validation, a simulation model based on gyro motion equations is developed in Simulink environment. The behavior is analyzed for systems with one or two resonance peaks and for time-varying resonance frequencies.

Resumo: Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um controlador por busca extremal (ESC) baseado em perturbação periódica para rastreamento da frequência de ressonância em giroscópios HRG. Para validação do controlador, desenvolve-se um modelo de simulação em ambiente Simulink baseado nas equações de movimento da planta. O comportamento é analisado para plantas com uma ou duas ressonâncias e para frequências de ressonância variáveis no tempo.

Keywords: HRG; Hemispherical Resonator Gyroscope; ESC; Extremum Seeking Control; Adaptive Control; Resonance; Tracking; Simulation.

Palavras-chaves: HRG; Giroscópio Ressonador Hemisférico; ESC; Controle por Busca Extremal; Controle Adaptativo; Ressonância; Rastreamento; Simulação.

1. INTRODUÇÃO

A tecnologia de Giroscópios Ressonadores Hemisféricos (HRG - *Hemyspherical Resonator Gyroscope*) apresentou grandes avanços nas últimas décadas e constitui atualmente o estado da arte entre os giroscópios para aplicações aeroespaciais, graças ao seu tamanho reduzido, baixo ruído, alto desempenho e ausência de desgaste, de acordo com Rozelle (2009).

Seu princípio de funcionamento baseia-se em forças decorrentes da aceleração de Coriolis, descrita inicialmente pelo cientista francês Gaspard-Gustave Coriolis, em Coriolis (1835). O HRG foi concebido em 1890 quando o físico G. H. Bryan observou em Bryan (1890) que o som produzido ao se vibrar uma casca originada de uma superfície de revolução apresentava batimentos quando esta era girada ao redor do seu eixo de simetria.

Uma característica comum a todas as versões do HRG, inclusive nas versões MEMS (*Micro-electromechanical systems*) é a presença de um elemento ressonador em formato hemisférico de taça ou sino, como apresentado na figura 1.

Nas figuras 1b e 1c, são representados os modos de vibração naturais da primeira harmônica no ressonador. Note que as cristas e vales do modo de vibração 1 coincidem com os nós do modo de vibração 2 e as cristas e vales do modo de vibração 2, por sua vez, coincidem com os nós do modo de vibração 1. Desta forma, qualquer vibração executada pelo ressonador é representada como uma combinação linear dos modos 1 e 2.

Durante a operação do giroscópio HRG, excita-se o modo de vibração 1 e, com a aplicação de uma velocidade angular externa perpendicular ao plano contendo a borda do ressonador, observa-se o aparecimento de uma componente no modo de vibração 2. Desta forma, surge o interesse em utilizar técnicas, tais como o controle por busca extremal, para rastrear a frequência de ressonância dos modos, maximizando, conseqüentemente, a amplitude do sinal no modo de vibração 2 e a relação sinal-ruído do sensor.

O restante deste artigo apresenta a seguinte organização: A seção 2 apresenta as equações dinâmicas aplicáveis ao giroscópio HRG; A seção 3, detalha a técnica de controle por busca extremal (ESC) e os principais pontos no projeto do controlador; A seção 4 destina-se à apresentação dos resultados; Na seção 5, são apresentadas as conclusões do trabalho.

2. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Em Lynch (1995), as equações generalizadas para giroscópios vibratórios de Coriolis são fornecidas, considerando imperfeições e desalinhamentos das direções dos eixos naturais de vibração e amortecimento. Estas equações são as mais utilizadas na literatura, sendo incluídas nas normas IEEE (2004). Em Wei et al. (2019), as equações de movimento para uma casca esférica são deduzidas através da mecânica Lagrangiana e demonstra-se a equivalência da casca esférica a uma partícula, estabelecendo-se um modelo massa-mola amortecido bidimensional equivalente, além de métodos para detecção e controle da onda estacionária.

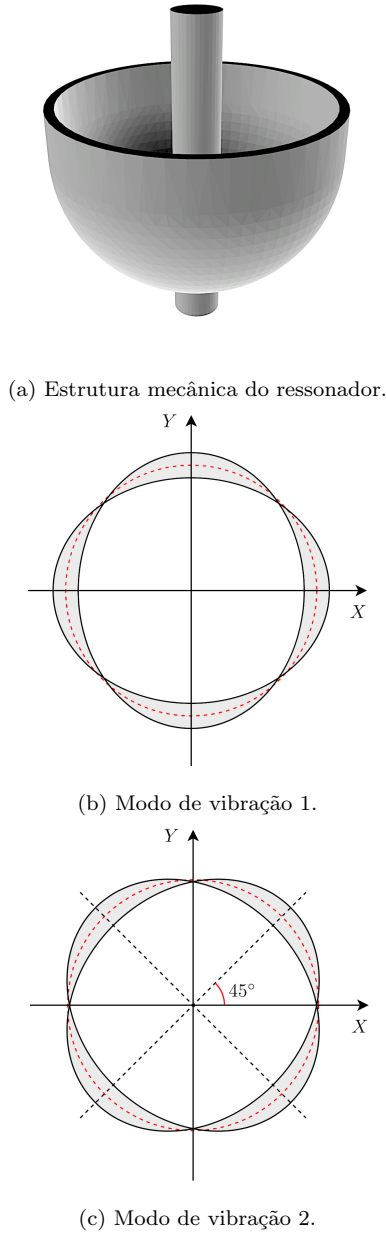


Figura 1. Ressonador e modos naturais de vibração. Nas figuras 1b e 1c, as regiões em cinza correspondem à imagem das posições ocupadas pelos pontos da borda do ressonador ao longo do tempo e as circunferências vermelhas pontilhadas representam sua posição em repouso.

A figura 2 apresenta o esquema do modelo bidimensional equivalente do ressonador, onde Ω é a velocidade angular externa na direção do eixo de simetria da casca, m é a massa da partícula equivalente, c_x e c_y são os coeficientes de amortecimento, k_x e k_y são constantes elásticas e F_x e F_y são as forças de atuação, nas direções X e Y do modelo equivalente, respectivamente. Os ângulos θ_ω e θ_τ correspondem aos desalinhamentos das direções dos eixos naturais de vibração e amortecimento, respectivamente. No caso de uma casca ideal perfeitamente simétrica, os parâmetros relativos aos eixos X e Y do modelo são idênticos.

Vale destacar que, embora as direções X e Y sejam geometricamente ortogonais no modelo equivalente, estas correspondem às vibrações dos modos 1 e 2 na figura 1, os quais apresentam um ângulo relativo de 45° .

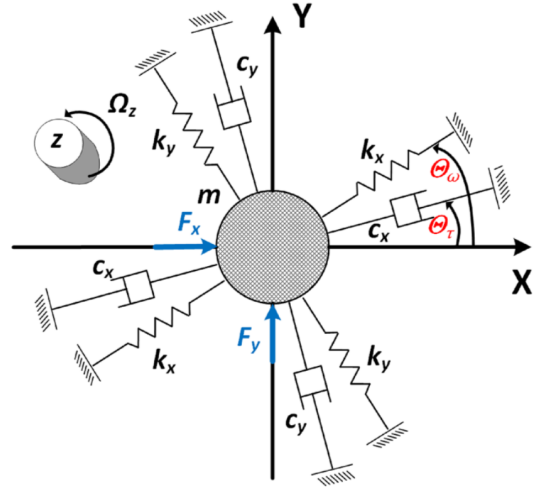


Figura 2. Oscilador bidimensional equivalente. Fonte: Zhao et al. (2021).

As equações de movimento apresentadas em Lynch (1995) e IEEE (2004) são dadas pela equação (1):

$$\begin{aligned} \ddot{x} - k(2\Omega\dot{y} + \dot{\Omega}y) + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)(\dot{x}\cos 2\theta_\tau + \dot{y}\sin 2\theta_\tau) \\ + (\omega^2 - k'\Omega^2)x - \omega\Delta\omega(x\cos 2\theta_\omega + y\sin 2\theta_\omega) = f_x + \gamma_x g_x \\ \ddot{y} + k(2\Omega\dot{x} + \dot{\Omega}x) + \frac{2}{\tau}\dot{y} - \Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)(-\dot{x}\sin 2\theta_\tau + \dot{y}\cos 2\theta_\tau) \\ + (\omega^2 - k'\Omega^2)y + \omega\Delta\omega(-x\sin 2\theta_\omega + y\cos 2\theta_\omega) = f_y + \gamma_y g_y \end{aligned} \quad (1)$$

onde $k = 0,3$ e $k' = 1$ são constantes dependentes da geometria do ressonador, $\gamma_x g_x$ e $\gamma_y g_y$ são termos dependentes das acelerações nos eixos X e Y e:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}; & \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) \\ \omega\Delta\omega &= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}; & \Delta\left(\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{k_x}{m}}; & \omega_2 &= \sqrt{\frac{k_y}{m}}; & \frac{2}{\tau_1} &= \frac{c_x}{m}; \\ \frac{2}{\tau_2} &= \frac{c_y}{m}; & f_x &= \frac{F_x}{m}; & f_y &= \frac{F_y}{m}. \end{aligned} \quad (2)$$

Considerando o caso sem desalinhamentos ($\theta_\omega = \theta_\tau = 0$) e desprezando os termos $\gamma_x g_x$ e $\gamma_y g_y$, a equação (1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{2}{\tau_1}\dot{x} + (\omega_1^2 - k'\Omega^2)x = f_x + k(2\Omega\dot{y} + \dot{\Omega}y) \\ \ddot{y} + \frac{2}{\tau_2}\dot{y} + (\omega_2^2 - k'\Omega^2)y = f_y - k(2\Omega\dot{x} + \dot{\Omega}x) \end{aligned} \quad (3)$$

A equação (3) permite compreender, de forma sucinta, a operação FTR (*force to rebalance*) do giroscópio HRG.

Neste modo de operação, implementa-se uma malha de controle (primária) responsável por manipular f_x , a fim produzir uma onda estacionária $x(t)$ de amplitude e fase constantes e rejeitando as perturbações provocadas pelos termos dependentes de Ω .

Paralelamente, uma segunda malha de controle (secundária) manipula f_y , a fim de anular $y(t)$. Desta forma, a amplitude do esforço de controle da malha secundária será proporcional a Ω , visto que $x(t)$ apresenta amplitude e fase constantes graças à malha de controle primária.

Com base na equação (3), deduz-se que, no caso ideal ($\omega_1 = \omega_2$ e $\tau_1 = \tau_2$), a excitação na frequência de ressonância do modo 1, idêntica à frequência de ressonância do modo 2, maximiza a relação sinal-ruído do sensor. No caso em que são consideradas imperfeições e desalinhamentos no modelo, a excitação na ressonância do modo 1 torna-se uma condição sub-ótima para a relação sinal-ruído. Contudo, para fins de simplificação, adotou-se a ressonância do modo 1 como métrica para o controle por busca extremal.

3. CONTROLE POR BUSCA EXTREMAL

3.1 Fundamentos teóricos

Os problemas de controle adaptativo tradicionais, tanto lineares quanto não lineares, envolvem o rastreamento de trajetórias de referência ou a estabilização ao redor de pontos de equilíbrio conhecidos, conforme Krstić and Wang (2000). O controle por busca extremal (ESC - *Extremum Seeking Control*), por sua vez, tem como objetivo o rastreamento de uma trajetória desconhecida *a priori*, definida pela otimização de uma função das saídas do sistema.

Segundo Peng et al. (2007) *Na ressonância, a frequência de uma força excitante coincide com a frequência natural do sistema, de forma que a transmissão de energia é eficiente e a amplitude de vibração se torna significativa.* Vale mencionar que a frequência de ressonância pode não ser única, pois um mesmo sistema pode apresentar diversas frequências naturais, cada qual correspondendo a um máximo local no seu gráfico de ganho da resposta em frequência. Portanto, para a abordagem do controle por busca extremal, considera-se $A(\omega)$ a função a ser otimizada, onde ω é a frequência angular de excitação e A a amplitude de $x(t)$. Um exemplo de aplicação desta técnica no rastreamento de ressonância é apresentado em Markowski et al. (1977).

O esquema de funcionamento da técnica consiste na introdução de uma perturbação senoidal com amplitude a_p e frequência f_p , muito mais lenta que a dinâmica da planta, de tal forma que relação entrada-saída possa ser representada como um mapa estático, conforme a figura 3. A grande vantagem desta abordagem é que a técnica dispensa a identificação prévia de um modelo para o sistema, permitindo a aplicação a uma maior categoria de sistemas e a sistemas lentamente variáveis no tempo.

Na figura 3 são analisados 3 possíveis cenários. Caso a frequência de excitação (ω^-) seja inferior à frequência de ressonância (ω^*), observa-se um reflexo da perturbação

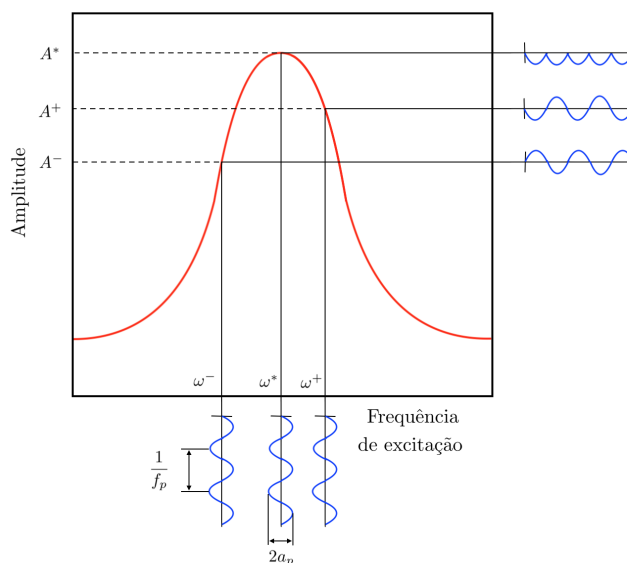


Figura 3. Mapa estático de $A(\omega)$ - perturbação senoidal na frequência de excitação e imagem na amplitude.

sobre a amplitude A^- em fase com a perturbação aplicada. Caso a frequência de excitação (ω^+) seja superior à frequência de ressonância (ω^*), observa-se um reflexo da perturbação sobre a amplitude A^+ em contra-fase com a perturbação aplicada. O terceiro caso consiste em uma excitação na frequência de ressonância ω^* , para a qual o reflexo da perturbação apresenta frequência $2f_p$.

A figura 4 apresenta o esquema de detecção de picos de $A(\omega)$ adotado neste trabalho.

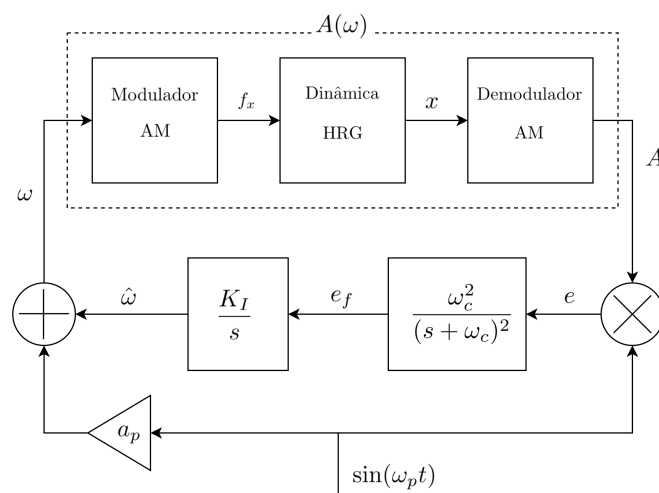


Figura 4. Esquema para detecção de picos de $A(\omega)$.

No esquema da figura 4, a perturbação senoidal $a_p \sin(\omega_p t)$, com $\omega_p = 2\pi f_p$, é somada à referência de frequência de excitação $\hat{\omega}$, produzindo a frequência de excitação efetiva ω . A frequência ω é utilizada para modulação do sinal de atuação f_x e demodulação do sinal de sensoriamento x , fornecendo como saída o sinal A , que corresponde à amplitude de x . Para ω_p suficientemente pequeno, o comportamento do conjunto composto pelo modulador AM, Dinâmica do giroscópio HRG e demodulador AM pode ser representado pelo mapa estático $A(\omega)$.

Ainda na figura 4, o sinal A é multiplicado pela perturbação $\sin(\omega_p t)$ e, posteriormente, filtrado pelo filtro passa baixas com frequência de corte ω_c , de forma que o sinal de erro e_f é igual a metade da amplitude do reflexo da perturbação em ω sobre A . A malha de controle é fechada com a adição de um controlador do tipo I com ganho de ação integral K_I responsável pela manipulação de $\hat{\omega}$.

3.2 Projeto do controlador e demodulador AM

O projeto do controlador por busca extremal envolve a escolha dos parâmetros apresentados na seção 3.1. A metodologia aplicada para a escolha de cada um dos parâmetros é apresentada nos tópicos a seguir. O projeto do demodulador AM, que não integra o controlador, também é detalhado a seguir.

Demodulador AM: O esquema da figura 5 apresenta o detalhamento da topologia do demodulador AM, onde p e q são as componentes em fase e quadratura e ω_{AM} é a frequência de corte dos filtros passa baixas utilizados.

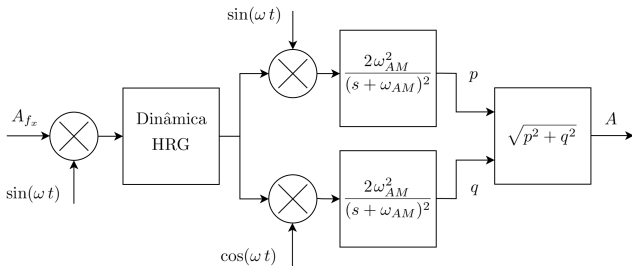


Figura 5. Esquema para modulação e demodulação AM.

O filtro passa baixas tem como função remover as componentes residuais de frequência ω e 2ω originadas do processo de demodulação. Logo, considerando uma faixa de trabalho $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$, uma possível escolha é $\omega_{AM} = 0.05\omega_{min}$.

a_p : A escolha de a_p é determinada pela precisão admissível de ω ($\Delta\omega$) e também pela precisão admissível de A (ΔA). As expressões de $\Delta\omega$ e de ΔA (no caso em que a expressão de $A(\omega)$ é conhecida), são exibidas na equação (4). No caso deste trabalho, o valor de ΔA foi obtido via simulação.

$$\Delta\omega = a_p \quad (4)$$

$$\Delta A(\omega) = A(\omega^*) - \min(A(\omega^* + a_p), A(\omega^* - a_p))$$

Outro fator a ser observado é a linearidade da perturbação sobre A , ou seja, a_p deve ser suficientemente pequeno para que o reflexo da perturbação sobre a amplitude seja aproximadamente senoidal quando $\hat{\omega} \neq \omega^*$. No caso de um sistema real, também deve ser escolhido um valor mínimo para a_p que permita extrair o reflexo da perturbação sobre a amplitude mesmo na presença do ruído intrínseco do sensor.

ω_p : O valor de ω_p é escolhido de forma que a relação entre ω e A possa ser aproximada pelo mapa estático $A(\omega)$. Na ausência de um modelo analítico representando a dinâmica entre ω e A , realiza-se uma varredura de ω_p e,

por meio da análise da defasagem entre a perturbação em ω e a perturbação em A , apresentada na figura 6, escolhe-se ω_p que introduza uma defasagem baixa.

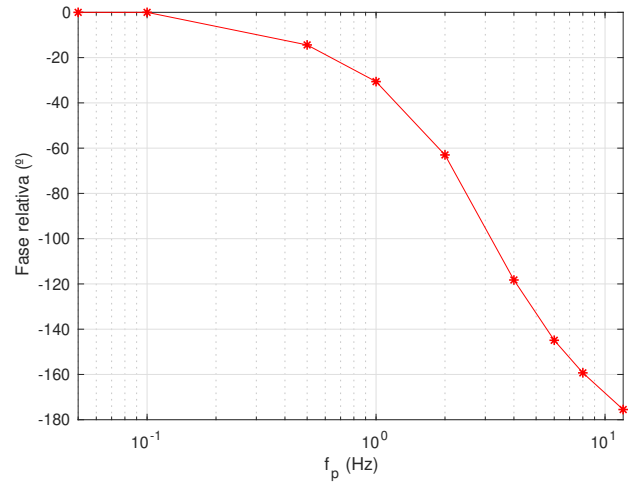


Figura 6. Defasagem entre a perturbação em ω e a perturbação em A .

ω_c : Na escolha de ω_c , leva-se em conta que o filtro passa baixas é responsável pela atenuação das componentes residuais de frequência ω_p e $2\omega_p$ originadas da demodulação do reflexo da perturbação sobre a amplitude, de maneira análoga ao filtro passa baixas no demodulador AM. Assim, uma possível escolha é $\omega_c = 0.05\omega_p$.

K_I : Para escolha de K_I , parte-se novamente da hipótese de que o sinal ω é muito mais lento do que a dinâmica do sistema e do demodulador AM e considera-se também que ω é mais lento do que a dinâmica do filtro passa baixas do demodulador da perturbação. Desta forma, segue que a dinâmica de $\tilde{\omega} = \omega - \omega^*$ pode ser descrita pela equação (5).

$$\dot{\tilde{\omega}} = K_i a_p \left. \frac{\partial A(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\tilde{\omega} + \omega^*} \quad (5)$$

Note que, no caso de uma ressonância única, o modelo da equação (5) é globalmente estável e converge para o ponto de equilíbrio $\omega = \omega^*$, o que é demonstrado com a função de Lyapunov apresentada na equação (6). Uma prova da estabilidade do método para casos mais gerais é fornecida em Krstić and Wang (2000).

$$V(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2} \tilde{\omega}^2 > 0$$

$$\dot{V}(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega} \dot{\tilde{\omega}} = \tilde{\omega} K_i a_p \left. \frac{\partial A(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\tilde{\omega} + \omega^*} < 0 \quad (6)$$

A seleção do ganho K_I deve assegurar, portanto, as hipóteses sobre a dinâmica de ω , o que é garantido para $K_i a_p \max_{\omega} \left(\frac{\partial A(\omega)}{\partial \omega} \right) \ll \omega_c$.

Uma alternativa viável para acelerar a convergência para ω^* sem comprometimento da estabilidade é a adoção de uma função de saturação sobre e_f , de tal forma que o

ganho K_i possa ser aumentado respeitando a condição $K_i a_p \max_{\omega} \left(\text{sat} \left(\frac{\partial A(\omega)}{\partial \omega} \right) \right) \ll \omega_c$, com sat a função de saturação adotada.

4. RESULTADOS

Para projeto e análise de desempenho do controlador por busca extremal, foram utilizadas duas plantas de teste, as quais correspondem aos casos com um ou dois picos de ressonância. Os parâmetros das plantas são exibidos na tabela 1. A determinação dos parâmetros seguiu a metodologia apresentada na seção 3.2.

Tabela 1. Parâmetros das plantas.

Parâmetro	1 ressonância	2 ressonâncias
ω_1	11303,45 rad/s	11278,30 rad/s
ω_2	11309,73 rad/s	11341,15 rad/s
τ_1	0,03686 s	0,03694 s
τ_2	0,4019 s	0,04008 s
θ_{ω}	5°	22°
θ_{τ}	4°	22°

Os parâmetros do controlador desenvolvido são exibidos na tabela 2.

Tabela 2. Parâmetros do controlador.

Parâmetro	Valor
ω_{AM}	565,49 rad/s
a_p	1,26 rad/s
ω_p	6,28 rad/s
ω_c	0,314 rad/s
K_I	13
sat	$[-2, 2] \times 10^{-3}$

As figuras 7 e 8 apresentam, respectivamente, o mapa $A(\omega)$, e a evolução de $\hat{\omega}$ para simulações com condições iniciais distintas, no caso planta com ressonância única.

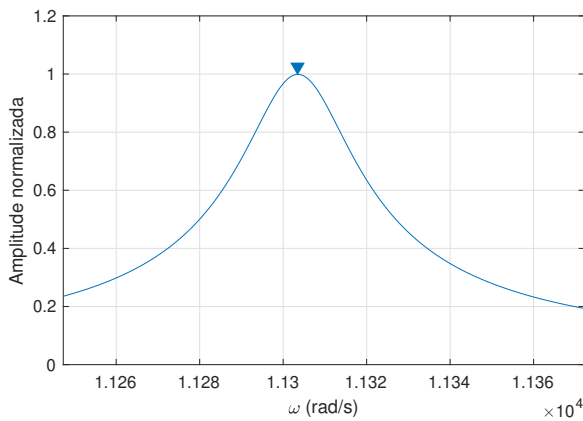


Figura 7. Mapa $A(\omega)$ para planta com uma ressonância - pico de ressonância em $\omega^* = 11303,45$ rad/s.

As figuras 9 e 10 apresentam, respectivamente, o mapa $A(\omega)$, e a evolução de $\hat{\omega}$ para simulações com condições iniciais distintas, no caso planta com duas ressonâncias.

Nas figuras 7 e 8, observa-se que a frequência de excitação convergiu sempre para o valor da frequência de ressonância, independente do seu valor inicial. Já nas figuras 9 e 10, o ponto de equilíbrio para o qual a frequência de excitação convergiu diferiu de acordo com o valor inicial.

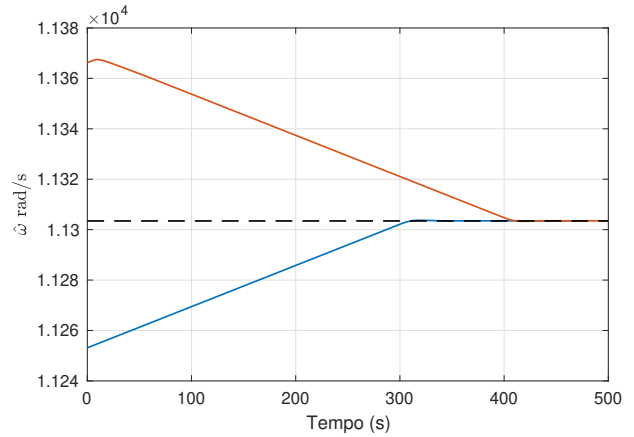


Figura 8. Simulações para detecção de pico com condições iniciais distintas, planta com uma ressonância. A linha pontilhada corresponde à frequência de ressonância.

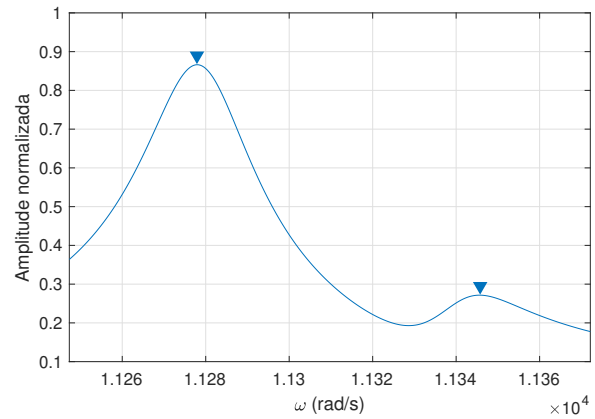


Figura 9. Mapa $A(\omega)$ para planta com duas ressonâncias - picos de ressonância em $\omega_A^* = 11277,90$ rad/s e $\omega_B^* = 11345,76$ rad/s.

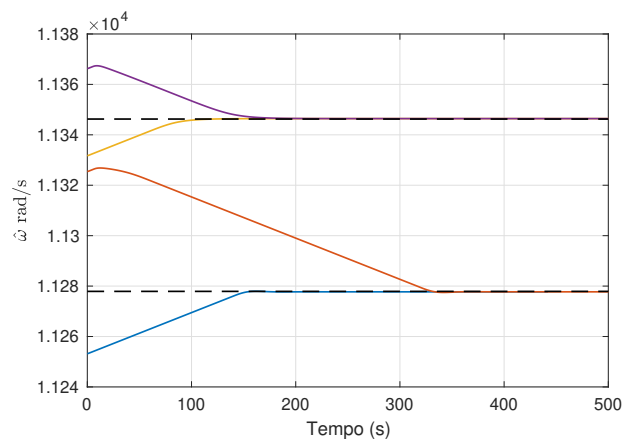


Figura 10. Simulações para detecção de pico com condições iniciais distintas, planta com duas ressonâncias. As linhas pontilhadas correspondem às frequências de ressonância.

De fato, com base na equação (5), constata-se a presença de dois pontos de equilíbrios estáveis (máximos locais), entre os quais existe um ponto de equilíbrio ω^{**} instável (mínimo local), para a planta com duas ressonâncias. Assim, os intervalos $(-\infty, \omega^{**})$ e (ω^{**}, ∞) correspondem às bacias de atração da primeira e segunda frequências de ressonância, respectivamente.

A figura 11 exibe a sobreposição das curvas de $\hat{\omega}$ e ω_1 durante uma simulação com o parâmetro ω_1 variando lentamente no tempo, no caso da planta com duas ressonâncias.

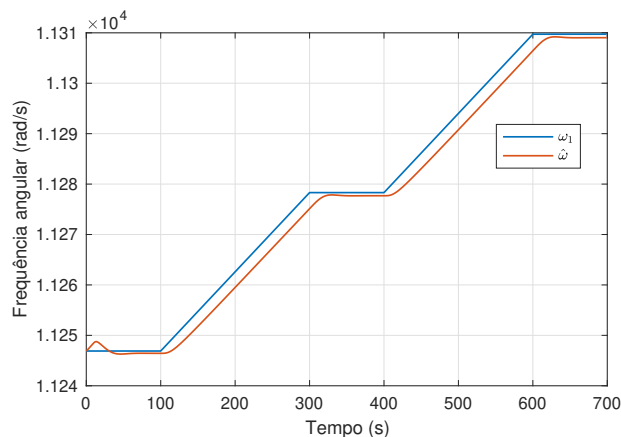


Figura 11. Comportamento do controlador por busca extremal para ressonância variável no tempo.

A partir das curvas na figura 11, observa-se que $\hat{\omega}$ acompanha o parâmetro ω_1 , que tem valor próximo da ressonância primária. Nos trechos com ω_1 constante, constata-se que o controlador atingiu o valor da frequência de ressonância e nos demais trechos, observou-se a existência de um erro de rastreamento constante, o que é um comportamento característico dos controladores do tipo *I* para referências e perturbações em forma de rampa.

5. CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, apresentou-se o desenvolvimento de um controlador por busca extremal para rastreamento de ressonância em giroscópios do tipo HRG.

Inicialmente, apresentou-se um resumo sobre o histórico desta tecnologia de giroscópios, seguido por uma seção com um modelo matemático e justificativas para a aplicação do controlador por busca extremal.

Em seguida, realizou-se uma revisão dos fundamentos teóricos embasando este tipo de controle e apresentou-se uma descrição detalhada dos pontos chave para escolha dos parâmetros do controlador.

Finalmente, avaliou-se o comportamento do controlador, em ambiente de simulação, para duas plantas, representando as categorias de plantas que apresentam uma e duas ressonâncias, respectivamente. Também foi simulado o comportamento do controlador no rastreamento de uma ressonância variante no tempo. Em todos os casos, observou-se um comportamento coerente com o esperado.

Futuros desdobramentos deste trabalho incluem a análise e otimização do desempenho do controlador, o estudo de

outras possíveis métricas de otimização e a construção de um protótipo com implementação do algoritmo em hardware embarcado.

REFERÊNCIAS

- Bryan, G.H. (1890). On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, pt. III*.
- Coriolis, G.G. (1835). *Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*. Bachelier.
- IEEE (2004). Ieee standard specification format guide and test procedure for coriolis vibratory gyros. *IEEE Std 1431-2004*, 1–78. doi:10.1109/IEEEESTD.2004.95744.
- Krstić, M. and Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 36(4), 595–601. doi:10.1016/S0005-1098(99)00183-1. URL [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00183-1](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00183-1).
- Lynch, D. (1995). Vibratory gyro analysis by the method of averaging. *Proceedings of the 2nd St. Petersburg Conference on Gyroscopic Technology and Navigation*.
- Markowski, J., MacDonald, A.D., and Stuchly, S.S. (1977). The dynamic response of a resonant frequency tracking system. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 26(3), 231–237. doi:10.1109/tim.1977.4314542. URL <https://doi.org/10.1109/tim.1977.4314542>.
- Peng, Z., Lang, Z., and Billings, S. (2007). Resonances and resonant frequencies for a class of nonlinear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3-5), 993–1014. doi:10.1016/j.jsv.2006.09.012. URL <https://doi.org/10.1016%2Fj.jsv.2006.09.012>.
- Rozelle, D.M. (2009). The hemispherical resonator gyro: From wineglass to the planets. *Spacefl. Mech.* 2009, 6446.
- Wei, Z., Yi, G., Huo, Y., Qi, Z., and Xu, Z. (2019). The synthesis model of flat-electrode hemispherical resonator gyro. *Sensors*, 19(7), 1690. doi:10.3390/s19071690. URL <https://doi.org/10.3390/s19071690>.
- Zhao, W., Yang, H., Liu, F., Su, Y., and Li, C. (2021). High sensitivity rate-integrating hemispherical resonator gyroscope with dead area compensation for damping asymmetry. *Scientific Reports*, 11(1). doi:10.1038/s41598-020-80885-y. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-020-80885-y>.