

# Estabilidade e Estabilização Robusta de Sistemas Positivos Chaveados Variantes no Tempo na Presença de Atrasos na Função de Estados

Rodrigo Possidônio Noronha\* Ginalber Luiz de Oliveira Serra\*\*

\* Av. dos Portugueses, s/n, Bacanga, CEP: 65001-970, Universidade Federal do Maranhão, MA, (e-mail: possidonio\_789@hotmail.com).

\*\* Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, São Luís, CEP: 65030-005, Instituto Federal do Maranhão, MA (e-mail: ginalber@ifma.edu.br).

---

**Abstract:** The present paper addresses the problem of stability analysis and robust stabilization of switched linear systems with time-delay in the state function. The uncertainty class considered is of discrete-time varying polytopic type. Conditions are proposed, in the form of linear matrix inequalities, via time-varying uncertain parameter-dependent switched Lyapunov functions, to ensure the positivity, stability and robust stabilization of the dynamic system. Polytopic uncertainties are considered in the state matrix and in the matrix that weights the time-delay state function. Two example systems are employed to verify the effectiveness of the proposed conditions.

**Resumo:** O presente trabalho aborda o problema de análise de estabilidade e estabilização robusta de sistemas lineares chaveados com atraso de tempo na função de estados. A classe de incertezas considerada é do tipo politópica variante no tempo discreto. São propostas condições, na forma de desigualdades matriciais lineares, via funções de Lyapunov chaveadas dependentes de parâmetros incertos variantes no tempo, para garantir a positividade, estabilidade e estabilização robusta do sistema dinâmico. As incertezas politópicas são consideradas na matriz de estados e na matriz que pondera a função de estados com atraso de tempo. São empregados dois sistemas exemplos para verificação da eficácia das condições propostas.

**Keywords:** Linear Matrix Inequalities; Polytopic Uncertainties; Positive Systems; Robust Stabilization; Switched Systems; Time-Delay Systems.

**Palavras-chaves:** Estabilização Robusta; Desigualdades Matriciais Lineares; Incertezas Politópicas; Sistemas com Atraso de Tempo; Sistemas Chaveados; Sistemas Positivos.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Sistemas chaveados por definição são sistemas dinâmicos compostos por modos ou subsistemas que são chaveados entre si através de uma função de chaveamento (Lacerda and Agulhari, 2020). Esses sistemas possuem várias aplicações na ciência, principalmente em circuitos eletrônicos, como em osciladores (Xu et al., 2019), conversores DC/DC (Deaecto et al., 2010), e entre outros. Além disso, uma outra grande vantagem dessa classe de sistemas dinâmicos é devido a sua capacidade em representar matematicamente, através de uma família de modos, várias regiões dinâmicas de um sistema (Xiang et al., 2017). Essas motivações e entre outras tornam atraente o estudo e investigação de novas características dinâmicas de sistemas chaveados.

Por definição, sistemas chaveados são chamados positivos se a evolução temporal da função de estados não tomar valores negativos (Silva et al., 2021; Spagolla et al., 2019). Esses sistemas possuem também aplicação na ciência, como em sistemas de comunicação, biologia, física, ecologia, e

entre outros (Farina and Rinaldi, 2000). Na tentativa de incorporar complexidades aos sistemas positivos chaveados para análise de novas características dinâmicas, vários pesquisadores têm incorporado atraso de tempo ao sistema (Huang et al., 2022).

Um interessante tópico de investigação na teoria de sistemas positivos chaveados é o impacto do atraso de tempo na estabilidade do sistema dinâmico. Isso se torna ainda mais interessante na presença de incertezas paramétricas. Em Xiang et al. (2014), foi abordado o problema de estabilização de sistemas positivos chaveados com atraso de tempo variante na presença de uma função de chaveamento assíncrona. Em Li et al. (2013), foi tratado o problema de análise de estabilidade e síntese de controle baseado no ganho  $\mathcal{L}_1$  para sistemas positivos chaveados com atraso de tempo variante. Em Liu et al. (2019), foi tratada a estabilidade exponencial de sistemas positivos chaveados impulsivos com atraso de tempo variante e distribuído.

Para o caso em que o sistema positivo chaveado com atraso de tempo contém incertezas, em Zhang et al. (2014) foi tratada a estabilização na presença de incertezas intervalares e função de chaveamento com tempo de permanência. Em Wang and Liang (2020), foi abordado o problema de

---

\* O presente trabalho foi realizado com apoio da FAPEMA, Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão.

estabilização robusta para sistemas positivos chaveados de horizonte de tempo finito na presença de saturação na função de controle. Em Ma et al. (2018), foi proposta a estabilização robusta de sistemas positivos chaveados com incertezas intervalares via múltiplas funções de Lyapunov cooperativas variantes no tempo. Em Liu and Zhang (2021), foi abordado o problema de estabilização robusta de sistemas positivos chaveados por realimentação de saída na presença de incertezas politópicas invariantes no tempo.

Nesse sentido, objetivo da presente proposta é apresentar condições para análise de estabilidade e estabilização robusta de sistemas lineares positivos chaveados com atraso de tempo constante na função de estados e com incertezas politópicas variantes no tempo. Assim, esse trabalho é uma extensão de Wu et al. (2009), em que foram tratadas apenas a estabilidade e estabilização de sistemas positivos com atraso de tempo na função de estados e incertezas politópicas constantes. Nesse trabalho, a classe de incertezas considerada é do tipo politópica variante no tempo discreto e a função de chaveamento é do tipo arbitrária. As condições propostas foram obtida, na forma de desigualdades matriciais (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs), via funções de Lyapunov chaveadas e dependentes de parâmetros (FLCDP) incertos variantes no tempo discreto. Para a síntese de controle, as condições propostas foram desenvolvidas partindo de formas aumentadas das matrizes do sistema dinâmico. As incertezas politópicas variantes no tempo foram consideradas na matriz de estados chaveada e na matriz chaveada que pondera a função de estados com atraso de tempo. A síntese de controle foi avaliada em dois sistemas exemplos instáveis e não positivos. O presente artigo é organizado da seguinte forma: as preliminares são apresentadas na Seção 2; os resultados principais desse trabalho são apresentados na Seção 3; os exemplos computacionais para verificar a eficácia das condições propostas são apresentadas na Seção 4; e na Seção 5 é apresentada a conclusão do trabalho.

**Notação:**  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  representa uma matriz com  $p$  linhas e  $n$  colunas de números reais. A notação  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  representa um vetor com  $n$  linhas e 1 coluna de números reais.  $\mathbf{P} \succ \mathbf{0}$  ( $\mathbf{P} \prec \mathbf{0}$ ) representa uma matriz definida positiva (negativa).  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  ( $\mathbf{P} \geq \mathbf{0}$ ) representa uma matriz com elementos positivos (não negativos). A notação  $\mathbf{p} > \mathbf{0}$  ( $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ ) representa uma vetor com elementos positivos (não negativos). A notação  $\mathbf{P}^T$  representa uma matriz transposta. O bloco transposto de uma matriz definida em blocos é denotado por  $\star$ .

## 2. PRELIMINARES

O objetivo desta seção é apresentar os principais resultados da literatura que norteiam a solução dos problemas abordados neste trabalho.

### 2.1 Problema de Estabilidade para Sistemas Lineares Positivos na Presença de Atrasos

Seja o seguinte sistema linear no tempo discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k-d) \\ \mathbf{x}(\theta) &= \phi(\theta), \text{ para } \theta = -d, -d+1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{x} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função de estados e  $k \in \mathbb{Z}$  é o instante de tempo discreto. A matriz de estados  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

a matriz  $\mathbf{A}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $d \in \mathbb{Z}$  é o valor de atraso de tempo constante na função de estados e  $\mathbf{x}(\theta)$  é a condição inicial.

**Definição 1** (Farina and Rinaldi, 2000; Wu et al., 2009). O sistema (1) é chamado positivo se as matrizes  $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{A}_d \geq \mathbf{0}$ .

**Comentário 1.** A Definição 1 implica que se o sistema (1) for positivo, então para qualquer condição inicial  $\mathbf{x}(\theta) \geq \mathbf{0}$  implica que  $\mathbf{x}(k) > \mathbf{0}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ .

A seguir é apresentado um teorema que permite verificar se o sistema (1) é assintoticamente estável e positivo.

**Teorema 1.** O sistema (1) é assintoticamente estável e positivo se existirem matrizes diagonais definidas positivas  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{A} + \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0 & \mathbf{A}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{A}_d \\ \star & \mathbf{A}_d^T \mathbf{P}_0 \mathbf{A}_d - \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (2a)$$

e

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{A}_d \geq \mathbf{0}. \quad (2b)$$

**Prova.** Ver Wu et al. (2009).

### 2.2 Problema de Estabilização para Sistemas Lineares Positivos na Presença de Atrasos

Seja o seguinte sistema linear no tempo discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k-d) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{x}(\theta) &= \phi(\theta), \text{ para } \theta = -d, -d+1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $\mathbf{u} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a função de entrada e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada.

**Definição 2** (Wu et al., 2009). O sistema (3) é chamado positivo se as matrizes  $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A}_d \geq \mathbf{0}$  e  $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ .

**Comentário 2.** A Definição 2 implica que se o sistema (3) for positivo, então para qualquer condição inicial  $\mathbf{x}(\theta) \geq \mathbf{0}$  e controle  $\mathbf{u}(k) \geq \mathbf{0}$  implica que  $\mathbf{x}(k) > \mathbf{0}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ .

Supondo que o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  seja controlável, então é possível obter uma função de controle por realimentação de estados que estabiliza assintoticamente o sistema (3) e garante que ele seja positivo, definida como

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k), \quad (4)$$

onde  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a função de controle e  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz de ganhos de realimentação de estados.

Baseado na Definição 2 e Teorema 1, a seguir é apresentado um teorema que garante a estabilização assintótica do sistema (3) e a sua positividade.

**Teorema 2.** O sistema (3) é assintoticamente estabilizável e positivo se existirem matrizes diagonais definidas positivas  $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matriz  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_0 \mathbf{A}^T + \mathbf{V}^T \mathbf{B}^T \\ \star & -\mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_0 \mathbf{A}_d^T \\ \star & \star & -\mathbf{Q}_0 \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (5a)$$

e

$$a_{ij}q_{0jj} + \sum_{z=1}^m b_{iz}v_{zj} \geq 0, \quad (5b)$$

onde  $a_{ij} \in \mathbf{A}$ ,  $q_{0jj} \in \mathbf{Q}_0$ ,  $b_{iz} \in \mathbf{B}$ ,  $v_{zj} \in \mathbf{Z}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j, z \in \{1, \dots, m\}$ . Se as condições acima forem factíveis, então a matriz de ganhos de realimentação de estados  $\mathbf{K} = \mathbf{V}\mathbf{Q}_0^{-1}$ .

**Prova.** Ver Wu et al. (2009).

### 3. RESULTADOS PRINCIPAIS

Seja o seguinte sistema linear chaveado com incertezas politópicas variantes no tempo contendo atraso de tempo constante nos estados

$$\mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}_d\mathbf{x}(k-d) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k), \quad (6)$$

onde  $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}(\sigma(k), \boldsymbol{\alpha}(k))$ ,  $\hat{\mathbf{A}}_d = \hat{\mathbf{A}}_d(\sigma(k), \boldsymbol{\beta}(k))$  e  $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}(\sigma(k), \boldsymbol{\gamma}(k))$ . É importante notar que  $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow I$  é a função de chaveamento, que nesse trabalho é do tipo arbitrária. A função de chaveamento tem como objetivo indicar qual modo do sistema estará ativo em um determinado instante de tempo discreto  $k$ , de tal forma que ela toma valores no conjunto  $I = \{1, \dots, N\}$ , em que  $N$  é quantidade de modos do sistema (6). Os vetores de parâmetros incertos variantes no tempo  $\boldsymbol{\alpha}(k)$ ,  $\boldsymbol{\beta}(k)$  e  $\boldsymbol{\gamma}(k)$  pertencem aos seus respectivos simplex unitários, definidos como

$$\Omega_\sigma(\boldsymbol{\alpha}) := \left\{ \boldsymbol{\alpha}(k) \in \mathbb{R}^{n_\sigma} : \sum_{j=1}^{n_\sigma} \alpha_{\sigma j}(k) = 1, \alpha_{\sigma j}(k) \geq 0 \right\} \quad (7a)$$

$$\Omega_\sigma(\boldsymbol{\beta}) := \left\{ \boldsymbol{\beta}(k) \in \mathbb{R}^{n_\sigma} : \sum_{c=1}^{n_\sigma} \beta_{\sigma c}(k) = 1, \beta_{\sigma c}(k) \geq 0 \right\} \quad (7b)$$

$$\Omega_\sigma(\boldsymbol{\gamma}) := \left\{ \boldsymbol{\gamma}(k) \in \mathbb{R}^{n_\sigma} : \sum_{l=1}^{n_\sigma} \gamma_{\sigma l}(k) = 1, \gamma_{\sigma l}(k) \geq 0 \right\}, \quad (7c)$$

As matrizes do sistema (6) chaveadas com incertezas politópicas variantes no tempo são definidas como

$$\bar{\mathbf{A}}(\sigma(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) = \sum_{j=1}^{n_\sigma} \alpha_{\sigma j}(k) \mathbf{A}_{\sigma j} \quad (8a)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_d(\sigma(k), \boldsymbol{\beta}(k)) = \sum_{c=1}^{n_\sigma} \beta_{\sigma c}(k) \mathbf{A}_{d\sigma c} \quad (8b)$$

$$\bar{\mathbf{B}}(\sigma(k), \boldsymbol{\gamma}(k)) = \sum_{l=1}^{n_\sigma} \gamma_{\sigma l}(k) \mathbf{B}_{\sigma l}, \quad (8c)$$

tal que as matrizes  $\mathbf{A}_{\sigma j}$ ,  $\mathbf{A}_{d\sigma c}$  e  $\mathbf{B}_{\sigma l}$  denotam os vértices de seus respectivos politopos convexos, definidos respectivamente como

$$\mathcal{A}_\sigma = \left\{ \bar{\mathbf{A}}(\sigma(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) : \bar{\mathbf{A}}(\sigma(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) = \sum_{j=1}^{n_\sigma} \alpha_{\sigma j}(k) \mathbf{A}_{\sigma j} \right\} \quad (9a)$$

$$\mathcal{A}_{d_\sigma} = \left\{ \bar{\mathbf{A}}_d(\sigma(k), \boldsymbol{\beta}(k)) : \bar{\mathbf{A}}_d(\sigma(k), \boldsymbol{\beta}(k)) = \sum_{c=1}^{n_\sigma} \beta_{\sigma c}(k) \mathbf{A}_{d\sigma c} \right\} \quad (9b)$$

$$\mathcal{B}_\sigma = \left\{ \bar{\mathbf{B}}(\sigma(k), \boldsymbol{\gamma}(k)) : \bar{\mathbf{B}}(\sigma(k), \boldsymbol{\gamma}(k)) = \sum_{l=1}^{n_\sigma} \gamma_{\sigma l}(k) \mathbf{B}_{\sigma l} \right\}. \quad (9c)$$

É importante notar que cada modo do sistema (6) é composto de um politopo convexo, tal que o número de vértices de cada politopo convexo é igual para cada modo. Segundo Hetel et al. (2006), a combinação convexa de politopos convexos é também um politopo convexo, então (8a) - (8c) são equivalentes a

$$\hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \bar{\mathbf{A}}(i, \boldsymbol{\alpha}(k)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) \mathbf{A}_{ij} \quad (10a)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_d(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\beta}(k)) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \bar{\mathbf{A}}_d(i, \boldsymbol{\beta}(k)) = \sum_{i=1}^N \sum_{c=1}^{n_i} \xi_i(k) \beta_{ic}(k) \mathbf{A}_{d_{ic}} \quad (10b)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\gamma}(k)) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \bar{\mathbf{B}}(i, \boldsymbol{\gamma}(k)) = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^{n_i} \xi_i(k) \gamma_{il}(k) \mathbf{B}_{il}, \quad (10c)$$

onde  $\xi_i : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$  é a função indicadora, tal que  $\sum_{i=1}^N \xi_i(k) = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$ . Uma vez que, a cada instante  $k$ , apenas um modo é ativo, então o uso da função indicadora é justificado. Utilizando uma notação simplificada, o sistema (6) é equivalente a

$$\mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k))\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}_d(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\beta}(k))\mathbf{x}(k-d) + \hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\gamma}(k))\mathbf{u}(k). \quad (11)$$

#### 3.1 Resultados para o Problema de Estabilidade Assintótica

O sistema (11) com  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$  é assintoticamente estável se existir uma FLCDP tal que para

- (1)  $\tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = \tilde{\mathbf{x}}^T(k) \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) \tilde{\mathbf{x}}(k) > 0$
- (2)  $\Delta \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k+1), \boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\eta}(k+1)) - \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) < 0,$

para  $\tilde{\mathbf{x}}(k) \neq \mathbf{0}$ , e  $\tilde{V}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = 0$  para  $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0}$ , onde  $\boldsymbol{\eta}(k) = [\boldsymbol{\alpha}(k) \ \boldsymbol{\beta}(k)]$  é o vetor de parâmetros incertos variantes no tempo.

A seguir é apresentado um lema que permite verificar se o sistema (11) com  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$  é positivo e assintoticamente estável.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{P}}_1 - \hat{\mathbf{P}}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}}_d \\ \star & \hat{\mathbf{P}}_2 - \hat{\mathbf{P}}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \hat{\mathbf{P}}_3 - \hat{\mathbf{P}}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \hat{\mathbf{P}}_d - \hat{\mathbf{P}}_{d-1} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \dots & \star & \hat{\mathbf{A}}_d^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}}_d - \hat{\mathbf{P}}_d \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}. \quad (12)$$

Lema 3. O sistema (11) com  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$  é assintoticamente estável e positivo se existirem matrizes diagonais definidas positivas  $\mathbf{P}_0, \hat{\mathbf{P}}_1, \dots, \hat{\mathbf{P}}_{d-1}, \hat{\mathbf{P}}_2, \dots, \hat{\mathbf{P}}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{P}}_1 - \mathbf{P}_0 & \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}}_d \\ * & \hat{\mathbf{A}}_d^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}}_d - \hat{\mathbf{P}}_d \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (13a)$$

com  $\hat{\mathbf{P}}_1 \succ \hat{\mathbf{P}}_2, \hat{\mathbf{P}}_2 \succ \hat{\mathbf{P}}_3, \dots, \hat{\mathbf{P}}_{d-1} \succ \hat{\mathbf{P}}_d$ , e

$$\hat{\mathbf{A}} \geq \mathbf{0} \text{ e } \hat{\mathbf{A}}_d \geq \mathbf{0}. \quad (13b)$$

**Comentário 3:** Por questão de simplificação, as matrizes em (12), (13a) e (13b) são denotadas por  $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k))$ ,  $\hat{\mathbf{A}}_d = \hat{\mathbf{A}}_d(\boldsymbol{\xi}(k-d), \boldsymbol{\beta}(k-d))$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_1 = \hat{\mathbf{P}}_1(\boldsymbol{\xi}(k-1), \boldsymbol{\eta}(k-1)), \dots, \hat{\mathbf{P}}_d = \hat{\mathbf{P}}_d(\boldsymbol{\xi}(k-d), \boldsymbol{\eta}(k-d))$  e  $\hat{\mathbf{P}}_1 = \hat{\mathbf{P}}_1(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)), \dots, \hat{\mathbf{P}}_d = \hat{\mathbf{P}}_d(\boldsymbol{\xi}(k-d+1), \boldsymbol{\eta}(k-d+1))$ .

**Prova.** De acordo com Wu et al. (2009), rescrevendo o sistema (11) com  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$  na forma aumentada

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k))\tilde{\mathbf{x}}(k), \quad (14)$$

onde o vetor de estados aumentado  $\tilde{\mathbf{x}}(k) = [\mathbf{x}^T(k), \mathbf{x}^T(k-1), \dots, \mathbf{x}^T(k-d)]^T$  e a matriz de estados aumentada

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}_d(\boldsymbol{\xi}(k-d), \boldsymbol{\beta}(k-d)) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Uma vez que a função diferença ao longo da trajetória da FLCDP entre  $k+1$  e  $k$  deve ser estritamente decrescente negativa, ou seja,  $\Delta \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) < 0$ , então o sistema (11) com  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$  é assintoticamente estável se for satisfeito

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k))^T \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\eta}(k+1)) \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) - \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) \prec \mathbf{0}, \quad (16)$$

se existir uma matriz diagonal em blocos definida positiva  $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k))$ , em que  $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\eta}(k)) = \text{diag}(\mathbf{P}_0, \hat{\mathbf{P}}_1(\boldsymbol{\xi}(k-1), \boldsymbol{\eta}(k-1)), \dots, \hat{\mathbf{P}}_d(\boldsymbol{\xi}(k-d), \boldsymbol{\eta}(k-d)))$ , com

$$\hat{\mathbf{P}}_1(\boldsymbol{\xi}(k-1), \boldsymbol{\eta}(k-1)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{c=1}^{n_i} \xi_i(k-1) \eta_{ijc}(k-1) \mathbf{P}_{1_{ijc}} \quad (17a)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\mathbf{P}}_d(\boldsymbol{\xi}(k-d), \boldsymbol{\eta}(k-d)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{c=1}^{n_i} \xi_i(k-d) \eta_{ijc}(k-d) \mathbf{P}_{d_{ijc}}, \quad (17b)$$

onde  $\mathbf{P}_{1_{ijc}} \succ \mathbf{0}, \dots, \mathbf{P}_{d_{ijc}} \succ \mathbf{0}$ .

Tomando (15), (17a) e (17b), e substituindo-os em (16), é obtido em (12) a condição de estabilidade assintótica e positividade do sistema. Considerando apenas os elementos de posição de canto em (12), é obtido que

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{P}}_1 - \mathbf{P}_0 & \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}}_d \\ * & \hat{\mathbf{A}}_d^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}}_d - \hat{\mathbf{P}}_d \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad (18)$$

e considerando apenas os elementos da diagonal principal de (12), com exceção dos elementos de posição de canto, é obtido que  $\hat{\mathbf{P}}_1 \succ \hat{\mathbf{P}}_2, \hat{\mathbf{P}}_2 \succ \hat{\mathbf{P}}_3, \dots, \hat{\mathbf{P}}_{d-1} \succ \hat{\mathbf{P}}_d$ .

A condição (13b) permitiu verificar se o sistema (11) com  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{0}$  é positivo  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \boldsymbol{\eta}(k)$ . Portanto, a prova está concluída.

### 3.2 Resultados para o Problema de Estabilização Assintótica

Considerando que o par  $(\hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)), \hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\gamma}(k)))$  do sistema (11) seja controlável. Então é possível obter uma função de controle chaveada por realimentação de estados que estabiliza assintoticamente o sistema (11) e garante a sua positividade, definida como

$$\mathbf{u}(k) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(k), \quad (19)$$

onde  $\mathbf{u} : \{0, 1\} \times \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a função de controle chaveada e  $\mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz de ganhos de realimentação de estados chaveada pertencente ao  $i$ -ésimo modo do sistema chaveado.

Para que o sistema (11) seja assintoticamente estabilizável via função de controle chaveada (19), é necessário que a FLCDP satisfaça

$$(1) \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) = \tilde{\mathbf{x}}^T(k) \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) \tilde{\mathbf{x}}(k) > 0$$

$$(2) \Delta \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) = \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k+1), \boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\tau}(k+1)) - \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) < 0,$$

para  $\tilde{\mathbf{x}}(k) \neq \mathbf{0}$ , e  $\tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) = 0$  para  $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0}$ , onde  $\boldsymbol{\tau}(k) = [\boldsymbol{\alpha}(k) \ \boldsymbol{\beta}(k) \ \boldsymbol{\gamma}(k)]^T$  é o vetor de parâmetros incertos variantes no tempo. A seguir é apresentado um lema que garante a estabilização assintótica do sistema (11) e a sua positividade.

Lema 4. O sistema (11), com  $\hat{\mathbf{A}}_d \geq \mathbf{0}$ , é assintoticamente estabilizável e positivo se existirem matrizes diagonais definidas positivas  $\mathbf{Q}_0, \hat{\mathbf{Q}}_1, \hat{\mathbf{Q}}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matriz  $\tilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_d - \mathbf{Q}_0 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{B}}^T + \mathbf{Q}_0 \hat{\mathbf{A}}^T \\ * & -\hat{\mathbf{Q}}_1 & \mathbf{Q}_0 \hat{\mathbf{A}}_d^T \\ * & * & -\mathbf{Q}_0 \end{bmatrix} \prec \mathbf{0} \quad (20a)$$

e

$$a_{ij(ht)} q_{0_{hh}} + \sum_{z=1}^m b_{il(hz)} v_{i_{zt}} \geq 0, \quad (20b)$$

onde  $a_{ijht} \in \mathbf{A}_{ij}$ ,  $q_{0_{hh}} \in \mathbf{Q}_0$ ,  $b_{ijhz} \in \mathbf{B}_{il}$ ,  $v_{i_{zt}} \in \mathbf{Z}_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\forall j, l \in \{1, \dots, n_i\}$  e  $\forall h, t \in \{1, \dots, n\}$ . Se as condições acima forem factíveis, então a matriz de ganhos de realimentação de estados chaveada é dada por  $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{Q}_0^{-1}$ , onde

$$\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\xi}(k)) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \mathbf{K}_i \quad (21a)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}(\boldsymbol{\xi}(k)) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \mathbf{V}_i, \quad (21b)$$

com  $\mathbf{V}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{P}}_{\bar{1}} - \mathbf{P}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}}_d \\ \star & \hat{\mathbf{P}}_{\bar{2}} - \hat{\mathbf{P}}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \hat{\mathbf{P}}_{\bar{3}} - \hat{\mathbf{P}}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \hat{\mathbf{P}}_{\bar{d}} - \hat{\mathbf{P}}_{d-1} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \dots & \star & \hat{\mathbf{A}}_d^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}}_d - \hat{\mathbf{P}}_d \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}. \quad (22)$$

**Comentário 4:** Por questão de simplificação, as matrizes em (20a) e (22) são denotadas como  $\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \bar{\boldsymbol{\tau}}(k))$ ,  $\hat{\mathbf{A}}_d = \hat{\mathbf{A}}_d(\boldsymbol{\xi}(k-d), \boldsymbol{\beta}(k-d))$ ,  $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\gamma}(k))$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}_1 = \hat{\mathbf{Q}}_1(\boldsymbol{\xi}(k-1), \boldsymbol{\tau}(k-1)), \dots, \hat{\mathbf{Q}}_d = \hat{\mathbf{Q}}_d(\boldsymbol{\xi}(k-d), \boldsymbol{\tau}(k-d))$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}_{\bar{1}} = \hat{\mathbf{Q}}_{\bar{1}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)), \dots, \hat{\mathbf{Q}}_{\bar{d}} = \hat{\mathbf{Q}}_{\bar{d}}(\boldsymbol{\xi}(k-d+1), \boldsymbol{\tau}(k-d+1))$ .

**Prova.** Rescrevendo o sistema (11) em malha fechada na forma aumentada, é obtido que

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k))\tilde{\mathbf{x}}(k), \quad (23)$$

onde o estado aumentado é dado por  $\tilde{\mathbf{x}}(k) = [\mathbf{x}^T(k), \mathbf{x}^T(k-1), \dots, \mathbf{x}^T(k-d)]^T$  e a matriz de estados aumentada em malha fechada é dada por

$$\tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \bar{\boldsymbol{\tau}}(k)) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}_d(\boldsymbol{\xi}(k-d), \boldsymbol{\beta}(k-d)) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

onde  $\hat{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \bar{\boldsymbol{\tau}}(k)) = \hat{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\alpha}(k)) + \hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\gamma}(k))\hat{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\xi}(k))$ , tal que

$$\hat{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \bar{\boldsymbol{\tau}}(k)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \xi_i(k) \bar{\tau}_{ijl}(k) \mathbf{H}_{ijl}, \quad (25)$$

onde  $\mathbf{H}_{ijl} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{il}\mathbf{K}_i$  e  $\bar{\boldsymbol{\tau}}(k) = [\boldsymbol{\alpha}(k) \ \boldsymbol{\gamma}(k)]$ .

Uma vez que a função diferença ao longo da trajetória da FLCDP entre  $k+1$  e  $k$  deve ser estritamente decrescente negativa, ou seja,  $\Delta \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) < 0$ , então o sistema (11) é assintoticamente estabilizável se for satisfeito

$$\tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k))^T \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k+1), \boldsymbol{\tau}(k+1)) \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) - \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) \prec \mathbf{0}, \quad (26)$$

se existir uma matriz diagonal em blocos definida positiva  $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k))$ , em que  $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) = \text{diag}(\mathbf{P}_0, \hat{\mathbf{P}}_1(\boldsymbol{\xi}(k-1), \boldsymbol{\tau}(k-1)), \dots, \hat{\mathbf{P}}_d(\boldsymbol{\xi}(k-d), \boldsymbol{\tau}(k-d)))$ , com

$$\hat{\mathbf{P}}_1(\boldsymbol{\xi}(k-1), \boldsymbol{\tau}(k-1)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{c=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \xi_i(k-1) \tau_{ijcl}(k-1) \mathbf{P}_{1_{ijcl}} \quad (27a)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\mathbf{P}}_d(\boldsymbol{\xi}(k-d), \boldsymbol{\tau}(k-d)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{c=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \xi_i(k-d) \tau_{ijcl}(k-d) \mathbf{P}_{d_{ijcl}}, \quad (27b)$$

onde  $\mathbf{P}_{1_{ijcl}} \succ \mathbf{0}, \dots, \mathbf{P}_{d_{ijcl}} \succ \mathbf{0}$ .

Tomando (25), (27a) e (27b), e substituindo-os em (26), é obtido em (22) a condição para estabilização assintótica e positividade do sistema (11). Considerando apenas os elementos de posição de canto em (22), é obtido que

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{P}}_{\bar{1}} - \mathbf{P}_0 & \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}}_d \\ \star & \hat{\mathbf{A}}_d^T \mathbf{P}_0 \hat{\mathbf{A}}_d - \hat{\mathbf{P}}_d \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad (28)$$

e considerando apenas os elementos da diagonal principal de (22), com exceção dos elementos de posição de canto, é obtido que  $\hat{\mathbf{P}}_1 \succ \hat{\mathbf{P}}_{\bar{2}}, \hat{\mathbf{P}}_2 \succ \hat{\mathbf{P}}_{\bar{3}}, \dots, \hat{\mathbf{P}}_{d-1} \succ \hat{\mathbf{P}}_{\bar{d}}$

**Comentário 5.** É importante notar que em (28) há a multiplicação entre a matriz de ganhos de realimentação de estados chaveada  $\mathbf{K}_i$  e a matriz  $\mathbf{P}_0$ , tal que (28) é não linear. Para contornar essa situação, pelo complemento de Schur, (28) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\bar{1}} - \mathbf{P}_0 & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{H}}^T \mathbf{P}_0 \\ \star & -\hat{\mathbf{P}}_1 & \hat{\mathbf{A}}_d^T \mathbf{P}_0 \\ \star & \star & -\mathbf{P}_0 \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}. \quad (29)$$

Pré e pós multiplicando (29) pela transformação de congruência  $\text{diag}(\mathbf{P}_0^{-1}, \mathbf{P}_0^{-1}, \mathbf{P}_0^{-1})$ , é obtido que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_0^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{\bar{1}} \mathbf{P}_0^{-1} - \mathbf{P}_0^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_0^{-1} \hat{\mathbf{H}}^T \\ \star & -\mathbf{P}_0^{-1} \hat{\mathbf{P}}_1 \mathbf{P}_0^{-1} & \mathbf{P}_0^{-1} \hat{\mathbf{A}}_d^T \\ \star & \star & -\mathbf{P}_0^{-1} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad (30)$$

fazendo  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0^{-1}$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}_1 = \mathbf{P}_0^{-1} \hat{\mathbf{P}}_1 \mathbf{P}_0^{-1}$  e  $\hat{\mathbf{Q}}_{\bar{1}} = \mathbf{P}_0^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{\bar{1}} \mathbf{P}_0^{-1}$ , resulta em

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_{\bar{1}} - \mathbf{Q}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_0 \hat{\mathbf{H}}^T \\ \star & -\hat{\mathbf{Q}}_1 & \mathbf{Q}_0 \hat{\mathbf{A}}_d^T \\ \star & \star & -\mathbf{Q}_0 \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad (31)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_{\bar{1}} - \mathbf{Q}_0 & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{B}}^T + \mathbf{Q}_0 \hat{\mathbf{A}}^T \\ \star & -\hat{\mathbf{Q}}_1 & \mathbf{Q}_0 \hat{\mathbf{A}}_d^T \\ \star & \star & -\mathbf{Q}_0 \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}. \quad (32)$$

Por fim, a condição (20b) garante que o sistema (11) seja positivo  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \boldsymbol{\tau}(k)$ . Portanto, a prova está concluída.

**Comentário 6.** A matriz  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0^{-1}$  é definida como não chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo. Se  $\mathbf{Q}_0$  fosse chaveada com incertezas politópicas variantes no tempo, o elemento de posição (3,3) em (31) tornaria (32) uma desigualdade matricial não linear.

**Comentário 7:** Para um caso particular em que os vetores de parâmetros incertos variantes no tempo são iguais, ou seja,  $\boldsymbol{\alpha}(k) = \boldsymbol{\beta}(k) = \boldsymbol{\gamma}(k)$ , é considerado que cada modo do sistema (6) possui um único politopo convexo, tal que os vértices são descritos por  $\mathbf{A}_{ij}$ ,  $\mathbf{A}_{d_{ij}}$  e  $\mathbf{B}_{ij}$ .

#### 4. EXEMPLOS COMPUTACIONAIS

Para certificar a eficácia das condições propostas para soluções do problema de controle para a classe de sistemas tratada nesse trabalho, foram empregados exemplos acadêmicos. As condições propostas na forma de LMIs foram implementadas e solucionadas em MATLAB (R2016a) através do *parser* YALMIP (Lofberg, 2004) e *solver* SEDUMI 1.3 (Sturm et al., 2006).

#### 4.1 Exemplo 1

O sistema exemplo 1 é inspirado em um sistema linear chaveado com dois modos, que pode ser encontrado em Wu et al. (2009). Para o problema de controle tratado nesse trabalho, esse sistema foi adaptado para o caso chaveado com incertezas politópicas, através da criação de novas matrizes de forma arbitrária. Dessa forma, considere o sistema linear chaveado com incertezas politópicas

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 0,6 & 0,21 & 0,51 \\ 0,31 & 0,4 & 0,21 \\ 0,215 & 0,11 & -0,2 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 0,6 & 0,19 & 0,49 \\ 0,29 & 0,2 & 0,19 \\ 0,195 & 0,09 & -0,2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} 0,6 & 0,212 & 0,512 \\ 0,312 & 0,42 & 0,212 \\ 0,217 & 0,112 & -0,2 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} 0,6 & 0,188 & 0,488 \\ 0,288 & 0,18 & 0,188 \\ 0,193 & 0,088 & -0,2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{11} &= \begin{bmatrix} 2,1 \\ 1,1 \\ 1,1 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{12} &= \begin{bmatrix} 1,9 \\ 1 \\ 0,9 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{21} &= \begin{bmatrix} 2,12 \\ 1 \\ 1,12 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{22} &= \begin{bmatrix} 1,88 \\ 1 \\ 0,88 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{d_{11}} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,21 & 0,2 \\ 0,1 & 0,21 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{d_{12}} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,19 & 0,2 \\ 0,1 & 0,19 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{d_{21}} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,212 & 0,2 \\ 0,1 & 0,212 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{d_{22}} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,188 & 0,2 \\ 0,1 & 0,188 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Conforme pode ser verificado, o sistema (33) é assintoticamente estável e não positivo. Dessa forma, a função de controle chaveada, caso satisfeitas as condições propostas em (20a) - (20b), deve estabilizar assintoticamente e tornar positivo o sistema (33), considerando a função de chaveamento arbitrária e incertezas politópicas variantes no tempo. Uma vez que o atraso de tempo constante considerado para o sistema dinâmico do exemplo 1 é  $d = 1$ , são necessárias duas funções de Lyapunov para estabilizar assintoticamente o sistema (33) na forma aumentada, que são

$$V_0 = V_0(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_0 \mathbf{x}(k) \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_1 &= \hat{V}_1(\mathbf{x}(k-1), \boldsymbol{\xi}(k-1), \boldsymbol{\tau}(k-1)) \\ &= \mathbf{x}^T(k-1) \hat{\mathbf{Q}}_1(\boldsymbol{\xi}(k-1), \boldsymbol{\tau}(k-1)) \mathbf{x}(k-1). \end{aligned} \quad (34b)$$

Para a solução do problema de controle, os vetores de parâmetros incertos variantes no tempo foram definidos como  $\boldsymbol{\alpha}(k) = \boldsymbol{\beta}(k) = \boldsymbol{\gamma}(k)$ <sup>1</sup>. Após a solução do conjunto de LMIs (20a) - (20b), foram obtidas as seguintes matrizes de ganhos de realimentação de estados

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= [-0,1825 \quad -0,0764 \quad 0,2030] \\ \mathbf{K}_{12} &= [-0,1929 \quad -0,0467 \quad 0,2543] \\ \mathbf{K}_{21} &= [-0,1821 \quad -0,0791 \quad 0,1981] \\ \mathbf{K}_{22} &= [-0,1943 \quad -0,0429 \quad 0,2595]. \end{aligned} \quad (35)$$

Com respeito à outros valores de atraso, na Tabela 1 são apresentados os números de variáveis escalares  $N_V$  e de

<sup>1</sup>  $\boldsymbol{\alpha}(k)$  foi gerado utilizando a função `rand()` do MATLAB, com a seguinte restrição  $\alpha_{12}(k) = 1 - \alpha_{11}(k)$  e  $\alpha_{22}(k) = 1 - \alpha_{21}(k)$ .

linhas  $N_L$  de LMIs para diferentes valores de atraso de tempo constantes.

Tabela 1. Número de variáveis escalares  $N_V$  e de linhas  $N_L$  de LMIs para o exemplo 1.

d	1	2	5	10	20
$N_V$	27	39	75	135	255
$N_L$	124	148	364	664	1264

A avaliação da função de controle chaveada foi realizada considerando as condições iniciais  $\mathbf{x}(\theta)$ , para  $\theta = -1$  e  $\theta = 0$ , iguais a  $\mathbf{x}(-1) = [7 \ 7 \ 7]^T$  e  $\mathbf{x}(0) = [6 \ 6 \ 6]^T$ . É importante notar que  $\mathbf{x}(\theta) > \mathbf{0}$ , assim satisfazendo a condição apresentada para a positividade de um sistema dinâmico com respeito à condição inicial. A evolução temporal da função de chaveamento arbitrária é mostrada na Figura 1.

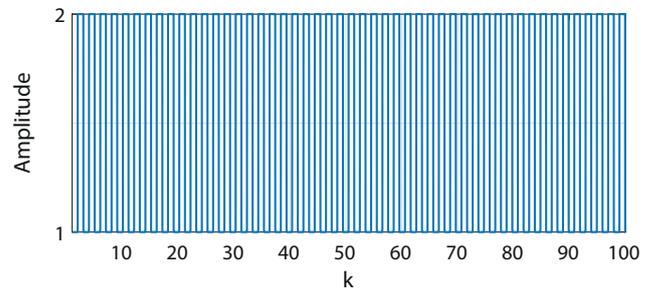


Figura 1. Evolução temporal da função de chaveamento.

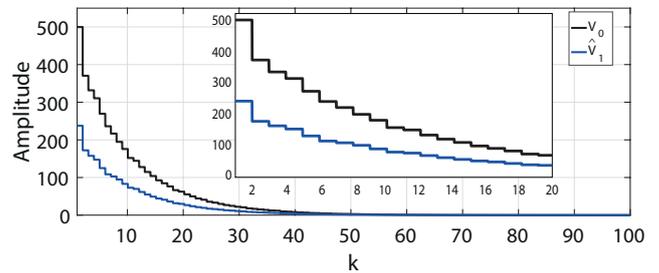


Figura 2. Evolução temporal das funções Lyapunov.

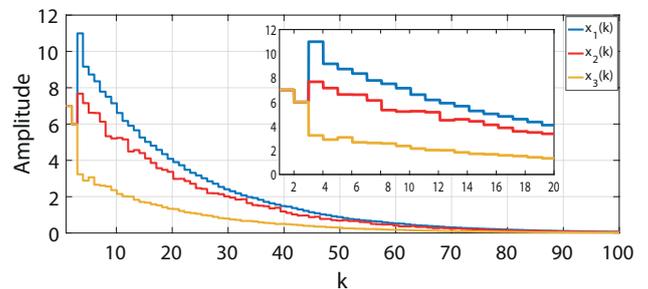


Figura 3. Evolução temporal da função de estados.

Na Figura 2 é mostrada a evolução temporal das funções de Lyapunov. É importante notar que, conforme apresentado em (28), a matriz de Lyapunov diagonal  $\mathbf{Q}_0$  e a matriz de Lyapunov diagonal chaveada  $\mathbf{Q}_{1_{ij}}$  devem ser definidas positivas, ou seja,  $\mathbf{Q}_0 \succ \mathbf{0}$  e  $\mathbf{Q}_{1_{ij}} \succ \mathbf{0}$ , para que  $V_0 > 0$  e  $\hat{V}_1 > 0$  para  $\mathbf{x}(k) \neq \mathbf{0}$ ,  $V_0 = 0$  e  $\hat{V}_1 = 0$  para

$\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \tau(k)$ . Através da Figura 2, é possível notar que essas condições foram satisfeitas. Ainda, através da Figura 2, é possível afirmar que  $\Delta V_0 < 0$  e  $\Delta \hat{V}_1 < 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \tau(k)$ . Com isso, a FLCDP aumentada  $\tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) > 0$  e  $\Delta \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) < 0$  para  $\tilde{\mathbf{x}}(k) \neq \mathbf{0}$ , e  $\tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) = 0$  para  $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \tau(k)$ . A evolução temporal da função de estados é mostrada na Figura 3, em que é possível notar que o sistema linear chaveado com incertezas politópicas variantes no tempo é positivo, ou seja,  $\mathbf{x}(k) \geq \mathbf{0} \forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \tau(k)$ . Portanto, além de garantir a positividade, a função de controle chaveada estabilizou assintoticamente o sistema (33).

#### 4.2 Exemplo 2

O sistema exemplo 2 é inspirado em um sistema linear com atraso de tempo na função de estados, que pode ser encontrado em Xu et al. (2001). Para o problema de controle tratado nesse trabalho, esse sistema foi adaptado para o caso chaveado com incertezas politópicas, através da criação de novas matrizes de forma arbitrária. Dessa forma, considere o sistema linear chaveado com incertezas politópicas

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & -0,6 \\ 0,4 & 0,5 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 1,1 & -0,7 \\ 0,8 & 0,9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} -0,9 & -0,7 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} -1 & -0,75 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{11} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,25 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{12} &= \begin{bmatrix} 0,05 & 0,2 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{21} &= \begin{bmatrix} 0,08 & 0,22 \\ 0 & 0,08 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{22} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,16 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{d11} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,15 \\ 0,15 & 0,1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{d12} &= \begin{bmatrix} 0,08 & 0,1 \\ 0,1 & 0,08 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{d21} &= \begin{bmatrix} 0,05 & 0,18 \\ 0,18 & 0,05 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_{d22} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

Conforme pode ser verificado, o sistema (36) é instável e não positivo. Dessa forma, a função de controle chaveada, caso satisfeitas as condições propostas em (20a) - (20b), deve estabilizar assintoticamente e tornar positivo o sistema (36), considerando a função de chaveamento arbitrária e incertezas politópicas variantes no tempo. Uma vez que o atraso de tempo constante considerado para o sistema dinâmico do exemplo 2 é  $d = 2$ , são necessárias três funções de Lyapunov para estabilizar assintoticamente o sistema (36) na forma aumentada, que são

$$\begin{aligned} V_0 &= V_0(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}_0 \mathbf{x}(k) \\ \hat{V}_1 &= \hat{V}_1(\mathbf{x}(k-1), \boldsymbol{\xi}(k-1), \boldsymbol{\tau}(k-1)) \\ &= \mathbf{x}^T(k-1) \hat{\mathbf{Q}}_1(\boldsymbol{\xi}(k-1), \boldsymbol{\tau}(k-1)) \mathbf{x}(k-1) \\ \hat{V}_2 &= \hat{V}_2(\mathbf{x}(k-2), \boldsymbol{\xi}(k-2), \boldsymbol{\tau}(k-2)) \\ &= \mathbf{x}^T(k-2) \hat{\mathbf{Q}}_2(\boldsymbol{\xi}(k-2), \boldsymbol{\tau}(k-2)) \mathbf{x}(k-2). \end{aligned} \quad (37)$$

Para a solução do problema de controle, os vetores de parâmetros incertos variantes no tempo foram definidos como  $\boldsymbol{\alpha}(k) = \boldsymbol{\beta}(k) = \boldsymbol{\gamma}(k)$ . Após a solução do conjunto de LMIs (20a) - (20b), foram obtidas as seguintes matrizes de ganhos de realimentação de estados chaveadas

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix} -2,8435 & 15,6601 \\ -2,1057 & -3,1080 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{12} &= \begin{bmatrix} 30,3923 & 74,4068 \\ -12,1322 & -14,1370 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{21} &= \begin{bmatrix} 17,3236 & 18,2600 \\ -1,3294 & -2,5788 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{22} &= \begin{bmatrix} 11,2268 & 10,3791 \\ 0,8428 & -0,1768 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (38)$$

Com respeito à outros valores de atraso, na Tabela 2 são apresentados os números de variáveis escalares  $N_V$  e de linhas  $N_L$  de LMIs para diferentes valores de atraso de tempo constantes.

Tabela 2. Número de variáveis escalares  $N_V$  e de linhas  $N_L$  de LMIs para o exemplo 2.

d	1	2	5	10	20
$N_V$	26	34	58	98	178
$N_L$	75	115	235	435	835

A avaliação da função de controle chaveada foi realizada considerando as condições iniciais  $\mathbf{x}(\theta)$ , para  $\theta = -2$ ,  $\theta = -1$  e  $\theta = 0$ , iguais a  $\mathbf{x}(-2) = [8 \ 8 \ 8]^T$ ,  $\mathbf{x}(-1) = [6 \ 6 \ 6]^T$  e  $\mathbf{x}(0) = [5 \ 5 \ 5]^T$ . É importante notar que  $\mathbf{x}(\theta) > \mathbf{0}$ , assim satisfazendo a condição apresentada para a positividade de um sistema dinâmico com respeito à condição inicial. A evolução temporal da função de chaveamento arbitrária é mostrada na Figura 4.

Na Figura 5 é mostrada a evolução temporal das funções de Lyapunov. É importante notar que, conforme apresentado em (28), que a matriz de Lyapunov diagonal  $\mathbf{Q}_0$  e as matrizes de Lyapunov diagonais chaveadas  $\mathbf{Q}_{1ij}$  e  $\mathbf{Q}_{2ij}$  devem ser definidas positivas, ou seja,  $\mathbf{Q}_0 \succ \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Q}_{1ij} \succ \mathbf{0}$  e  $\mathbf{Q}_{2ij} \succ \mathbf{0}$ , para que  $V_0 > 0$ ,  $\hat{V}_1 > 0$  e  $\hat{V}_2 > 0$  para  $\mathbf{x}(k) \neq \mathbf{0}$ ,  $V_0 = 0$ ,  $\hat{V}_1 = 0$  e  $\hat{V}_2 = 0$  para  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \tau(k)$ . Além disso, conforme apresentado em (28),  $\mathbf{Q}_{1ij} \succ \mathbf{Q}_{2ij}$ , tal que  $\hat{V}_1(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) - \hat{V}_2(\mathbf{x}(k-1), \boldsymbol{\xi}(k-1), \boldsymbol{\tau}(k-1)) > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \tau(k)$ . Através da Figura 5, é possível notar que essas condições foram satisfeitas. Ainda, através da Figura 5, é possível afirmar que  $\Delta V_0 < 0$ ,  $\Delta \hat{V}_1 < 0$ , e  $\Delta \hat{V}_2 < 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \tau(k)$ . Com isso, a FLCDP aumentada  $\tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) > 0$ , e  $\Delta \tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) < 0$  para  $\tilde{\mathbf{x}}(k) \neq \mathbf{0}$ , e  $\tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}(k), \boldsymbol{\xi}(k), \boldsymbol{\tau}(k)) = 0$  para  $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \tau(k)$ . A evolução temporal da função de estados é mostrada na Figura 6, em que é possível notar que o sistema linear chaveado com incertezas politópicas variantes no tempo é positivo, ou seja,  $\mathbf{x}(k) \geq \mathbf{0} \forall k \in \mathbb{Z}$  e  $\forall \tau(k)$ . Portanto, além de garantir a positividade, a função de controle chaveada estabilizou assintoticamente o sistema (36).

## 5. CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi apresentar condições para estabilidade e estabilização robusta via FLCDP para sistemas chaveados com atraso de tempo constante na função de estados. O conjunto de LMIs (20a) - (20b) foi gerado utilizando a função `rand()` do MATLAB, com a seguinte restrição  $\alpha_{12}(k) = 1 - \alpha_{11}(k)$  e  $\alpha_{22}(k) = 1 - \alpha_{21}(k)$ .

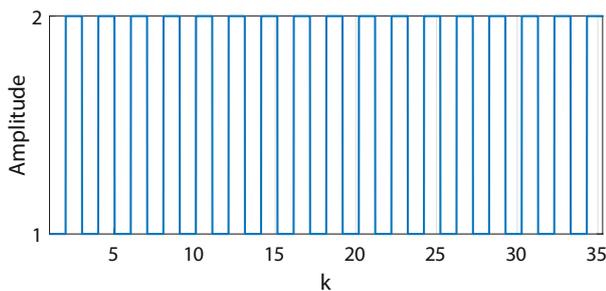


Figura 4. Evolução temporal da função de chaveamento.

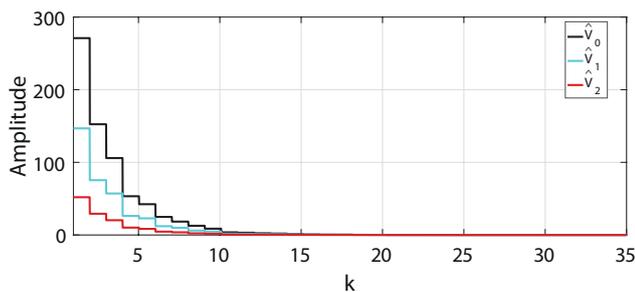


Figura 5. Evolução temporal das funções de Lyapunov.

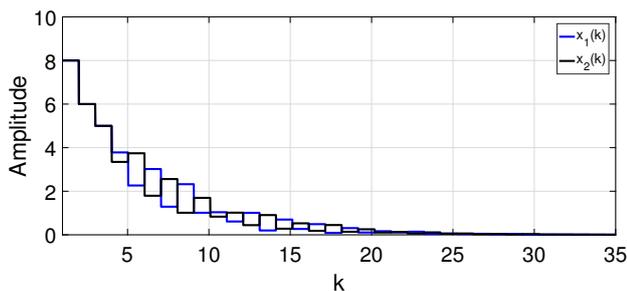


Figura 6. Evolução temporal da função de estados.

de estados. Na presença da função de chaveamento arbitrária e incertezas politópicas variantes no tempo, foi possível observar, uma vez que as condições propostas foram satisfeitas, os sistemas exemplos foram estabilizados e tornados positivos através da função de controle chaveada. Esse resultados demonstram a eficácia das condições propostas. Por fim, para trabalhos futuros, uma possível consideração é a inclusão de atraso de tempo variante.

#### REFERÊNCIAS

Deaecto, G.S., Geromel, J.C., Garcia, F.S., and Pomilio, J.A. (2010). Switched affine systems control design with application to dc-dc converters. *IET Control Theory & Applications*, 4(7), 1201–1210.

Farina, L. and Rinaldi, S. (2000). *Positive linear systems: theory and applications*, volume 50. John Wiley & Sons.

Hotel, L., Daafouz, J., and Iung, C. (2006). Robust stability analysis and control design for switched uncertain polytopic systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(9), 166–171.

Huang, T., Sun, Y., and Tian, D. (2022). Finite-time stability of positive switched time-delay systems based on linear time-varying copositive lyapunov functional. *Journal of the Franklin Institute*.

Lacerda, M.J. and Agulhari, C.M. (2020). Stability analysis of discrete-time lpv switched systems. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 6145–6150.

Li, S., Xiang, Z., and Karimi, H.R. (2013). Stability and l1-gain controller design for positive switched systems with mixed time-varying delays. *Applied Mathematics and Computation*, 222, 507–518.

Liu, J. and Zhang, T. (2021). Robust stabilization of controlled positive switched linear systems by output feedback. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021.

Liu, Z., Zhang, X., Lu, X., and Hou, T. (2019). Exponential stability of impulsive positive switched systems with discrete and distributed time-varying delays. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(10), 3125–3138.

Lofberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 284–289. IEEE.

Ma, R., Wang, X., and Liu, Y. (2018). Robust stability of switched positive linear systems with interval uncertainties via multiple time-varying linear copositive lyapunov functions. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 30, 285–292.

Silva, F.A., Pessim, P.S., and Lacerda, M.J. (2021). Controle de sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo: uma abordagem usando função de lyapunov aumentada. In *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente-SBAI*, volume 1.

Spagolla, A., Morais, C.F., Frezzatto, L., Oliveira, R.C., and Peres, P.L.D. (2019). Controle por realimentação de estados para sistemas lineares positivos chaveados discretos no tempo. In *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*, volume 1.

Sturm, J., Polik, I., and Terlaky, T. (2006). Sedumi 1.3. URL <http://sedumi.ie.lehigh.edu>, 10, 126.

Wang, J. and Liang, J. (2020). Robust finite-horizon stability and stabilization for positive switched fm-ii model with actuator saturation. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 35, 100829.

Wu, L., Lam, J., Shu, Z., and Du, B. (2009). On stability and stabilizability of positive delay systems. *Asian Journal of Control*, 11(2), 226–234.

Xiang, M., Xiang, Z., and Karimi, H.R. (2014). Stabilization of positive switched systems with time-varying delays under asynchronous switching. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 12(5), 939–947.

Xiang, W., Tran, H.D., and Johnson, T.T. (2017). Output reachable set estimation for switched linear systems and its application in safety verification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(10), 5380–5387.

Xu, C., Zhao, Y., Qin, B., and Zhang, H. (2019). Adaptive synchronization of coupled harmonic oscillators under switching topology. *Journal of the Franklin Institute*, 356(2), 1067–1087.

Xu, S., Lam, J., and Yang, C. (2001). Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay. *Systems & Control Letters*, 43(2), 77–84.

Zhang, J., Han, Z., Wu, H., and Huang, J. (2014). Robust stabilization of discrete-time positive switched systems with uncertainties and average dwell time switching. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 33(1), 71–95.