

## Controle Tolerante a Falhas: Reconfiguração com Atuador Virtual Adaptativo

Mariella Maia Quadros\* Víctor Costa da Silva Campos\*\*

\* *Área de Controle e Processos Industriais, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – IFMG Campus Sabará, MG, (e-mail: mariella.quadros@ifmg.edu.br).*

\*\* *Departamento de Engenharia Eletrônica, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, MG (e-mail: kozttah@ufmg.br)*

---

**Abstract:** This paper proposes the design of an adaptive virtual actuator for linear discrete-time systems subject to actuator faults. By means of new conditions based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) and the virtual actuator adaptation law, the control reconfiguration without requiring the use of a Fault Detection and Isolation module (FDI) to compensate the different actuator faults becomes possible. Thus, in the presence of faults, the reconfigured system behaves asymptotically as the nominal system (without faults), not being subject to loss of performance and stability due to possible errors in the FDI module. Computer simulations for an open-loop stable and an unstable system are performed to verify the performance of the proposed methodology for different scenarios of actuator faults. From the analysis of the time responses obtained, it is possible to observe that the reconfigured system is able to compensate the faults and continue tracking the reference signal, with similar behavior to that of the nominal system.

**Resumo:** Este artigo propõe o projeto de um atuador virtual adaptativo para sistemas lineares discretos no tempo sujeitos a falhas de atuador. Por meio de novas condições baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs - do inglês *Linear Matrix Inequalities*) e na lei de adaptação do atuador virtual, torna-se possível a reconfiguração de controle sem a exigência de utilização de um módulo de Detecção e Isolamento de Falhas (FDI - do inglês *Fault Detection and Isolation*) para a compensação de diferentes falhas de atuador. Assim, na presença de falhas, o sistema reconfigurado se comporta assintoticamente como o sistema nominal (sem falhas), não estando sujeito à perda de desempenho e estabilidade devido a possíveis erros no módulo FDI. Simulações computacionais para um sistema estável e um instável em malha aberta são realizadas para verificar o desempenho da metodologia proposta para diferentes cenários de falhas de atuador. A partir da análise das respostas temporais obtidas, é possível observar que o sistema reconfigurado é capaz de compensar as falhas e continuar o rastreamento do sinal de referência, com comportamento semelhante ao do sistema nominal.

**Keywords:** Fault Tolerant Control; Control Reconfiguration; Fault Hiding; Virtual Actuator; Actuator Faults.

**Palavras-chaves:** Controle Tolerante a Falhas; Reconfiguração de Controle; Ocultação de Falhas; Atuador Virtual; Falhas de Atuador.

---

### 1. INTRODUÇÃO

Os componentes de um sistema de controle muitas vezes podem ser susceptíveis a falhas, causando perda de desempenho e estabilidade, riscos à segurança e perdas materiais. Portanto, torna-se essencial a utilização de metodologias de controle tolerante a falhas (FTC - do inglês *Fault Tolerant Control*) para que seja possível garantir um funcionamento adequado e seguro do sistema, mesmo após a ocorrência de falhas. Na literatura são encontradas diversas abordagens de FTC que podem ser classificadas como passivas ou ativas. As passivas (Yang and Ye, 2009; Sun et al., 2018; Stefanovski, 2019) são aquelas em que não são realizadas modificações no sistema de controle, sendo as falhas tratadas como perturbações e levadas em consideração na etapa de projeto do controlador. Por outro

lado, as metodologias ativas (Lunze and Steffen, 2006; Lunze and Richter, 2008; Bounemour et al., 2018; Pizzi et al., 2019) são desenvolvidas de modo que a malha de controle seja alterada após a ocorrência de falhas e, consequentemente, possuem a exigência de utilização de um módulo de detecção e isolamento de falhas (FDI - do inglês *Fault Detection and Isolation*) no sistema (Nakamura et al., 2017; Cosme et al., 2019).

Dentre as abordagens ativas, uma que tem se destacado é a reconfiguração de controle com ocultação de falhas, que a partir da ocorrência de falhas, modifica o sistema de controle de malha fechada, de modo que seja utilizada apenas a sua parte saudável restante (Steffen, 2005; Rotondo et al., 2018; Bessa et al., 2021; Quadros et al., 2020, 2022). Para isso, é inserido um bloco de reconfiguração entre o sistema com falhas e o controlador projetado para o sistema

nominal (sem falhas), que é capaz de modificar os sinais de controle e de saída do sistema com o objetivo de ocultar as falhas do controlador. Ou seja, as falhas são compensadas para que, do ponto de vista do controlador, o sistema com falhas se comporte como o nominal, não sendo necessário seu reprojeto. O bloco de reconfiguração é composto por sensor virtual nos casos de falhas nos sensores, por atuador virtual nos casos de falhas nos atuadores e por ambos nos casos de falhas simultâneas nos sensores e atuadores do sistema.

No entanto, para uma reconfiguração de controle com desempenho satisfatório, é necessário que o módulo FDI forneça informações precisas sobre as falhas, o que muitas vezes pode não ser obtido (Richter, 2011). Isso porque esse sistema pode apresentar falsos alarmes, erros na estimação das falhas e até mesmo não indicar uma falha que ocorreu. Diversos trabalhos da literatura consideram o fornecimento exato ao bloco de reconfiguração dos valores e durações das falhas e da indicação de quais componentes foram afetados (Tabatabaeipour et al., 2015; Quadros et al., 2020, 2022). A proposta de Rotondo et al. (2016) apresenta ligeiramente que os possíveis erros do módulo FDI podem ser tratados como perturbação e utilizadas técnicas de controle robusto para a garantia de desempenho e estabilidade.

Nesse contexto, este trabalho propõe o desenvolvimento de um novo bloco de reconfiguração composto por atuador virtual adaptativo para compensação de diferentes falhas de atuador. A ocultação de falhas possibilita a continuidade de utilização do controlador nominal sem necessidade de reprojeto. Além disso, diferentemente de outras abordagens ativas da literatura, a lei de adaptação permite descartar a exigência de inclusão de um módulo FDI adicional ao sistema de malha fechada, eliminando possíveis deterioração de desempenho e perda de estabilidade que podem ser causadas por erros no diagnóstico de falhas.

**Notações:** Ao longo deste trabalho,  $\lambda(A)$  representa os autovalores de uma matriz  $A$ ,  $\mathbb{R}^{m \times n}$  denota o conjunto de matrizes com entradas reais e dimensões  $m \times n$ ,  $*$  representa o bloco simétrico de uma matriz simétrica e  $W < 0$  ( $W \leq 0$ ) indica que  $W$  definida (semi-definida) negativa.

## 2. METODOLOGIA

Considere um sistema linear, invariante e discreto no tempo, cujo comportamento nominal é descrito por:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (1)$$

em que  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é a sequência de sinais de controle,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são as matrizes que determinam o comportamento do sistema. Quando o sistema (1) é sujeito a falhas de atuador, considera-se que ele é descrito por:

$$x_{f_{k+1}} = Ax_{f_k} + B\Phi u_{f_k}, \quad (2)$$

em que  $\Phi = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_m)$  é uma matriz diagonal desconhecida que representa o efeito das falhas nos atuadores, com  $\phi_i \in [0, 1]$  representando possíveis perdas de efetividade da entrada de controle  $i$ . Ou seja,  $\phi_i = 0$  indica uma perda total do atuador,  $\phi_i = 1$  o funcionamento nominal (sem falhas) e  $0 < \phi_i < 1$  falhas parciais.

O objetivo do artigo é desenvolver um *atuador virtual adaptativo*, que faça com que o sistema com falhas, descrito por (2), se comporte *assintoticamente* como o sistema nominal, descrito por (1). Esta abordagem é ilustrada na Figura 1, em que o conjunto composto pelo sistema com falhas e atuador virtual, denominado *Sistema Reconfigurado*, possui comportamento semelhante ao do sistema nominal.

*Idealmente*, deseja-se que o atuador virtual tenha a seguinte estrutura:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = A\tilde{x}_k + Bu_{c_k}, \\ u_{f_k} = -M(\tilde{x}_k - x_{f_k}) + Ru_{c_k} = -Mx_{\Delta_k} + Ru_{c_k}, \end{cases} \quad (3)$$

em que  $\tilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados do atuador virtual,  $u_{c_k} \in \mathbb{R}^m$  os sinais de controle fornecidos pelo controlador nominal ao atuador virtual,  $u_{f_k}$  os sinais de controle calculados pelo atuador virtual e fornecidos ao sistema,  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  as matrizes de ganho do atuador virtual e  $x_{\Delta_k} = \tilde{x}_k - x_{f_k}$  o erro entre os estados do atuador virtual e os estados do sistema, denominado estado diferença.

A dinâmica do estado diferença é dada por:

$$x_{\Delta_{k+1}} = A\tilde{x}_k + Bu_{c_k} - Ax_{f_k} - B\Phi u_{f_k}, \quad (4)$$

$$x_{\Delta_{k+1}} = Ax_{\Delta_k} + Bu_{c_k} - B\Phi u_{f_k}, \quad (5)$$

$$x_{\Delta_{k+1}} = (A + B\Phi M)x_{\Delta_k} + (B - B\Phi R)u_{c_k}. \quad (6)$$

Para o caso ideal, projeta-se  $M$  de modo que  $|\lambda(A + B\Phi M)| < 1$ , e  $R$  de modo que  $B - B\Phi R = 0$ . Assim, o atuador virtual *ideal* garante que o sistema se comporte como o nominal (sem falhas) e  $x_{\Delta} \rightarrow 0$ .

Uma abordagem muito utilizada na literatura, é a de que o conhecimento da matriz  $\Phi$  é fornecido ao *Sistema Reconfigurado* por meio de um módulo de *Deteção e Isolamento de Falhas* (FDI - do inglês *Fault Detection and Isolation*), e que as matrizes  $M$  e  $R$  são recalculadas em tempo real de acordo com esta informação (Quadros et al., 2020, 2022). Entretanto, com esse tipo de metodologia, erros no módulo FDI podem causar as perdas de desempenho e de garantia de estabilidade do sistema reconfigurado.

Dessa forma, neste trabalho, propõe-se uma abordagem de adaptação direta para o atuador virtual, de modo que a necessidade de conhecimento exato da matriz  $\Phi$  é evitada e estimativas para as matrizes  $M$  e  $R$  ideais são empregadas para a ocultação das falhas.

De forma a apresentar uma abordagem adaptativa para o atuador virtual, algumas considerações são necessárias por  $\Phi$  ser uma matriz desconhecida.

**Consideração 1.** As falhas que ocorrem no sistema são tais que  $\text{Imagem}(B\Phi) = \text{Imagem}(B)$ .

**Consideração 2.** Existe  $R$ , tal que  $B - B\Phi R = 0$ .

A primeira consideração garante que, independente de  $\Phi$ , sempre é possível escolher um  $M$  ideal de modo que  $A + B\Phi M = A + B\bar{M}$ , com  $\bar{M}$  uma matriz de projeto do atuador virtual. A segunda consideração garante que, no caso ideal, a dinâmica do estado diferença é independente dos sinais de controle  $u_{c_k}$ .

O atuador virtual **adaptativo** proposto é dado por:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = A\tilde{x}_k + Bu_{c_k}, \\ u_{f_k} = -\hat{M}_k x_{\Delta_k} + \hat{R}_k u_{c_k}, \end{cases} \quad (7)$$

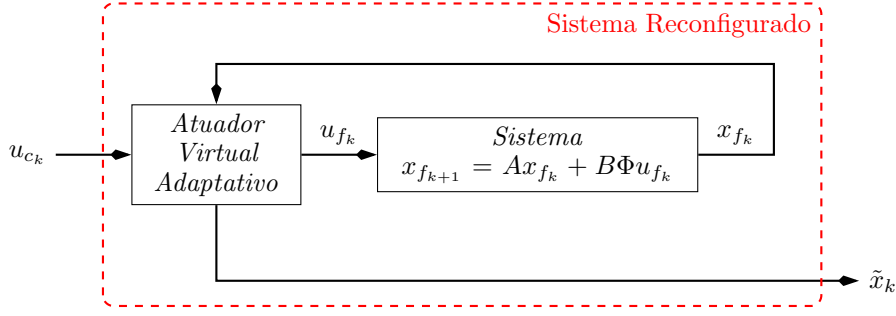


Figura 1. Diagrama de blocos do sistema com o bloco de reconfiguração. As entradas  $u_{c_k}$  e os estados  $\tilde{x}_k$  do atuador virtual passam a ser a entrada e a saída do sistema reconfigurado.

em que as matrizes estimadas  $\hat{M}_k$  e  $\hat{R}_k$  podem ser agrupadas em uma única matriz estimada  $\hat{\Theta}_k = [\hat{M}_k \ \hat{R}_k]$ , e a ação de controle calculada pelo atuador virtual pode ser representada por:

$$u_{f_k} = \hat{\Theta}_k \psi_k, \quad (8)$$

com  $\psi_k = \begin{bmatrix} -x_{\Delta_k} \\ u_{c_k} \end{bmatrix}$ . Além disso,  $\hat{\Theta}_k$  é calculado por meio da lei de adaptação (inspirada pelo trabalho Akhtar et al. (2004)):

$$\hat{\Theta}_{k+1} = \hat{\Theta}_k + \kappa \frac{B^T (x_{\Delta_{k+1}} - (A + B\bar{M}) x_{\Delta_k}) \psi_k^T}{\delta + \zeta \psi_k^T \psi_k + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}, \quad (9)$$

em que  $\zeta = \bar{\sigma}(BB^T) = \|B\|_2^2$ , e  $\bar{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\kappa \in (0, 1]$  e  $\delta > 0$  são parâmetros de projeto.

Com estas definições, é então possível enunciar o resultado principal deste artigo.

**Teorema 1.** Considere o atuador virtual adaptativo apresentado na equação (7), com (8) e (9), e o sistema com falhas descrito por (2). Se existir uma matriz simétrica e definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e um escalar  $\gamma > 0$  tal que a condição:

$$\begin{bmatrix} -\alpha^2 X & 0 & XA^T + Y^T B^T \\ * & -\gamma I & I \\ * & * & -X \end{bmatrix} \leq 0 \quad (10)$$

seja satisfeita para algum  $\alpha \in (0, 1)$ , e tomando-se  $\bar{M} = YX^{-1}$  e  $P = X^{-1}$ , então, desde que  $u_{c_k}$  seja um sinal limitado,  $u_{f_k}$  e  $\tilde{\Theta}_k$  serão limitados e  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\Delta_k} = 0$ .

**Prova.** Considerando:

$$\Theta = [M \ R], \quad \tilde{\Theta}_k = \Theta - \hat{\Theta}_k, \quad (11)$$

e conforme a *Consideração 2*, a dinâmica do estado diferença para o atuador virtual adaptativo é dada por:

$$\begin{aligned} x_{\Delta_{k+1}} &= Ax_{\Delta_k} + Bu_{c_k} - B\Phi u_{f_k} \\ &= Ax_{\Delta_k} + Bu_{c_k} - B\Phi \hat{\Theta}_k \psi_k + B\Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k - B\Phi \Theta \psi_k \\ &= Ax_{\Delta_k} + Bu_{c_k} - B\Phi \Theta \psi_k + B\Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k \\ &= Ax_{\Delta_k} + Bu_{c_k} - B\Phi [M \ R] \begin{bmatrix} -x_{\Delta_k} \\ u_{c_k} \end{bmatrix} + B\Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k \\ &= (A + B\Phi M) x_{\Delta_k} + (B - B\Phi R) u_{c_k} + B\Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k \\ &= (A + B\bar{M}) x_{\Delta_k} + B\Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k, \end{aligned} \quad (12)$$

enquanto que a dinâmica do erro de adaptação ( $\tilde{\Theta}_k$ ) pode ser escrita como:

$$\tilde{\Theta}_{k+1} = \tilde{\Theta}_k - \kappa \frac{B^T B \Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k \psi_k^T}{\delta + \zeta \psi_k^T \psi_k + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}. \quad (13)$$

Considere a seguinte função de Lyapunov candidata:

$$V_k = V(x_{\Delta_k}, \tilde{\Theta}_k) = V_x + \beta V_\Theta, \quad (14)$$

$$V_x = \ln(1 + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}), \quad \text{com } P > 0, \quad (15)$$

$$V_\Theta = \text{tr}(\tilde{\Theta}_k^T \Phi \tilde{\Theta}_k), \quad (16)$$

em que  $V_x$  é a parte relativa ao estado diferença,  $V_\Theta$  a parte relativa ao erro de adaptação e  $\beta > 0$  um escalar.

Em relação à parte relativa ao estado diferença ( $V_x$ ), pode-se escrever que sua diferença temporal,  $\Delta V_x$ , obedece as relações:

$$\Delta V_x = \ln(1 + x_{\Delta_{k+1}}^T P x_{\Delta_{k+1}}) - \ln(1 + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}) \quad (17)$$

$$= \ln\left(\frac{1 + x_{\Delta_{k+1}}^T P x_{\Delta_{k+1}}}{1 + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}\right) \quad (18)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{x_{\Delta_{k+1}}^T P x_{\Delta_{k+1}} - x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}{1 + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}\right) \quad (19)$$

$$\leq \frac{x_{\Delta_{k+1}}^T P x_{\Delta_{k+1}} - x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}{1 + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}, \quad (20)$$

em que a última desigualdade segue do fato de que  $\ln(1 + a) \leq a$ ,  $\forall a > -1$ . Se a LMI apresentada em (10) for satisfeita, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} -\alpha^2 P & 0 \\ * & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T + \bar{M}^T B^T \\ I \end{bmatrix} P [A + B\bar{M} \ I] < 0, \quad (21)$$

implicando em:

$$x_{\Delta_{k+1}}^T P x_{\Delta_{k+1}} - \alpha^2 x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k} - \gamma \psi_k^T \tilde{\Theta}_k^T \Phi B^T B \Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k \leq 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x_{\Delta_{k+1}}^T P x_{\Delta_{k+1}} - x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k} \\ \leq -(1 - \alpha^2) x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k} + \gamma \psi_k^T \tilde{\Theta}_k^T \Phi B^T B \Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Delta V_x \leq \frac{-(1 - \alpha^2) x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k} + \gamma \psi_k^T \tilde{\Theta}_k^T \Phi B^T B \Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k}{1 + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}. \quad (24)$$

Em relação à parte relativa ao erro de adaptação ( $V_\Theta$ ), sua diferença temporal,  $\Delta V_\Theta$ , obedece as relações:

$$\begin{aligned} \Delta V_{\Theta} &= \text{tr} \left( \tilde{\Theta}_{k+1}^T \Phi \tilde{\Theta}_{k+1} \right) - \text{tr} \left( \tilde{\Theta}_k^T \Phi \tilde{\Theta}_k \right) \quad (25) \\ &= \text{tr} \left( \tilde{\Theta}_k^T \Phi \tilde{\Theta}_k \right) - 2\kappa \frac{\text{tr} \left( \tilde{\Theta}_k^T \Phi B^T B \Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k \psi_k^T \right)}{\delta + \zeta \psi_k^T \psi_k + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}} \\ &\quad + \kappa^2 \frac{\text{tr} \left( \psi_k \psi_k^T \tilde{\Theta}_k^T \Phi B^T B \Phi B^T B \Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k \psi_k^T \right)}{(\delta + \zeta \psi_k^T \psi_k + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k})^2} \\ &\quad - \text{tr} \left( \tilde{\Theta}_k^T \Phi \tilde{\Theta}_k \right). \quad (26) \end{aligned}$$

Considerando que  $\Phi \leq I$ ,  $BB^T \leq \zeta I$  e  $\kappa \leq 1$  tem-se que:

$$\begin{aligned} &\kappa^2 \frac{\text{tr} \left( \psi_k \psi_k^T \tilde{\Theta}_k^T \Phi B^T B \Phi B^T B \Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k \psi_k^T \right)}{(\delta + \zeta \psi_k^T \psi_k + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k})^2} \\ &\leq \kappa^2 \frac{\psi_k^T \psi_k \left( \psi_k^T \tilde{\Theta}_k^T \Phi B^T B \Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k \right)}{(\delta + \zeta \psi_k^T \psi_k + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k})^2} \quad (27) \end{aligned}$$

$$\leq \kappa \frac{\zeta \psi_k^T \psi_k \left( \psi_k^T \tilde{\Theta}_k^T \Phi B^T B \Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k \right)}{(\delta + \zeta \psi_k^T \psi_k + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k})^2} \quad (28)$$

$$\leq \kappa \frac{\psi_k^T \tilde{\Theta}_k^T \Phi B^T B \Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k}{\delta + \zeta \psi_k^T \psi_k + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}. \quad (29)$$

Portanto, a diferença da função de Lyapunov para o erro de adaptação pode ser majorada por:

$$\Delta V_{\Theta} \leq -\kappa \frac{\psi_k^T \tilde{\Theta}_k^T \Phi B^T B \Phi \tilde{\Theta}_k \psi_k}{\delta + \zeta \psi_k^T \psi_k + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}. \quad (30)$$

Considerando o limite:

$$\psi_k^T \psi_k \leq \mu, \quad (31)$$

em que  $\mu$  representa um limite superior possível para a norma ao quadrado de  $\psi_k$ , o escalar  $\beta$  na função de Lyapunov candidata (14) é escolhido de forma que:

$$\frac{\beta \kappa}{\delta + \zeta \psi_k^T \psi_k + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}} \geq \frac{\gamma}{1 + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}} \quad (32)$$

$$\beta \kappa \geq \frac{\gamma(\delta + \zeta \psi_k^T \psi_k + 1 - 1 + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k})}{1 + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}} \quad (33)$$

$$\beta \kappa \geq \gamma + \frac{\gamma(\delta - 1 + \zeta \psi_k^T \psi_k)}{1 + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}, \quad (34)$$

que é atendido se  $\beta \geq \frac{\gamma\delta + \gamma\zeta\mu}{\kappa}$ . Dessa forma, a diferença da função de Lyapunov candidata,  $\Delta V_k = V_{k+1} - V_k$ , pode ser majorada por

$$\Delta V_k \leq \frac{-(1 - \alpha^2)x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}{1 + x_{\Delta_k}^T P x_{\Delta_k}}. \quad (35)$$

Uma vez garantido que a diferença da função de Lyapunov é semi-definida negativa (35), garante-se, desde que  $u_{c_k}$  seja limitado, que  $u_{f_k}$  e  $\tilde{\Theta}_k$  serão limitados.

Note que  $V_k$  é limitada abaixo, e como  $\Delta V_k \leq 0$ , o limite de  $V_k$  quando  $k$  tende a infinito existe:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = V_{\infty}. \quad (36)$$

Devido a isso:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \Delta V_i = \lim_{k \rightarrow \infty} V_i - V_0, \quad (37)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \Delta V_i = V_{\infty} - V_0. \quad (38)$$

Como o limite do somatório existe, então  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta V_k = 0$ . O que implica que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\Delta_k} = 0$ , e o atuador virtual garante que o sistema com falhas se comporte como o sistema nominal assintoticamente.  $\square$

### 3. EXEMPLOS

De forma a ilustrar o projeto de atuador virtual adaptativo proposto neste artigo, nesta seção são apresentados dois exemplos numéricos de aplicação em sistemas de controle em malha fechada. Os controladores utilizados são projetados apenas para os sistemas nominais (sem a ocorrência de falhas) e, com a ocorrência de falhas, o atuador virtual adaptativo deve ser capaz de fazer com que o comportamento do sistema com falhas seja próximo ao comportamento nominal após um período transitório.

**Exemplo 1.** Considere o sistema linear invariante no tempo, descrito pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Note pelas matrizes apresentadas que o sistema possui duas entradas de controle redundantes, e mesmo que uma das duas entradas de controle sofra uma falha total (e não tenha mais efeito sobre o sistema), a mesma atuação ainda pode ser atingida pelo controlador. Atendendo portanto às Considerações 1 e 2 exigidas para o projeto do atuador virtual adaptativo.

Para este sistema, é projetado um controlador para que o primeiro estado siga um sinal de referência. A lei de controle utilizada tem a forma:

$$u_k = Kx_k + K_i \sum_{j=0}^k (r_j - y_j) + Nr_k, \quad (40)$$

em que  $r_k$  é o sinal de referência, e  $y_k$  é tomado como sendo o sinal do primeiro estado do sistema. Neste exemplo, utiliza-se:

$$K = \begin{bmatrix} -0.7437 & 0.1001 \\ -0.7390 & 0.1001 \end{bmatrix}, \quad K_i = \begin{bmatrix} 0.4937 \\ 0.4890 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0.0532 \\ 0.9469 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

para as matrizes do controlador. Resolvendo a LMI apresentada no Teorema 1, com a condição extra  $X < 100I$ , para  $\alpha = 0.9$ , encontramos:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} -0.5517 & 0.1562 \\ 0.0429 & 0.003 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0.0146 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0100 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

e  $\gamma = 0.0146$ . De forma a implementar o atuador virtual adaptativo, este exemplo utiliza  $\kappa = \delta = 0.9$  na lei de adaptação. As matrizes  $\hat{M}_k$  e  $\hat{R}_k$  são inicializadas com zeros.

O sistema em malha fechada foi simulado para uma referência senoidal, considerando um cenário com o sistema nominal e sem o atuador virtual, e um cenário em que:

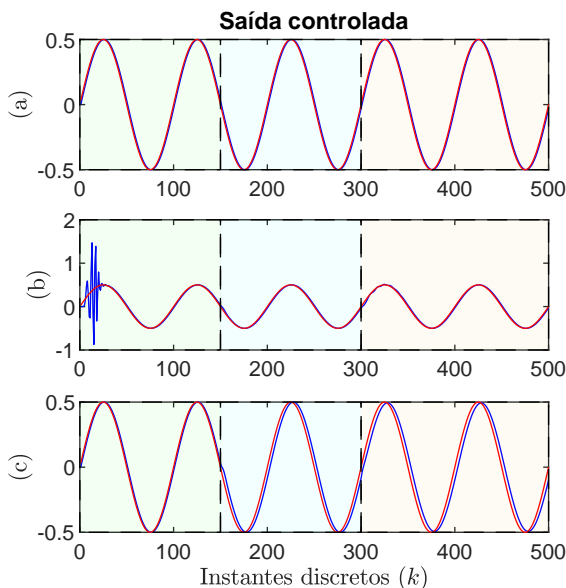


Figura 2. Comportamento da saída controlada do sistema de controle em malha fechada considerado no Exemplo 1. As linhas em **vermelho** representam o sinal de referência, enquanto que as linhas em **azul** representam a saída controlada do sistema. (a) é o comportamento nominal do sistema. (b) é o comportamento do sistema com a ocorrência de falhas e o uso do atuador virtual adaptativo proposto. (c) é o comportamento em malha fechada com a ocorrência de falhas sem o uso do atuador virtual. As três regiões coloridas, ao longo do tempo, representam as diferentes condições de falha simuladas: a primeira região tem comportamento nominal, sem falhas; a segunda região apresenta uma perda de 20% de efetividade no primeiro atuador e falha total no segundo atuador; a terceira região apresenta falha total no primeiro atuador e perda de 70% de efetividade no segundo atuador.

$$\Phi = \begin{cases} I, & k < 150, \\ \text{diag}(0.8, 0), & 150 \leq k < 300, \\ \text{diag}(0, 0.3), & k > 300, \end{cases} \quad (43)$$

para o caso com e sem a utilização do atuador virtual. Os sinais da saída controlada e referência são apresentados na Figura 2 e o sinal de erro de rastreamento (entre a referência desejada e o sinal de saída do sistema em malha fechada) é apresentado na Figura 3. Note que, após um transitório inicial e nos instantes  $k = 150$  e  $k = 300$  (correspondentes a uma mudança na atuação do sistema), o atuador virtual adaptativo faz com que o sistema se comporte como o sistema nominal.

Como o sistema deste exemplo é estável em malha aberta, e o controlador utilizado é de certa forma robusto devido à ação integral, o sistema em malha fechada ainda é capaz de seguir razoavelmente bem a referência mesmo sem o uso do atuador virtual e com a ocorrência das falhas. Note, entretanto, que o comportamento em malha fechada piora em relação ao comportamento nominal (como pode ser visto nos gráficos (c) das Figuras 2 e 3).

**Exemplo 2.** Considere o sistema linear invariante no tempo, descrito pelas matrizes

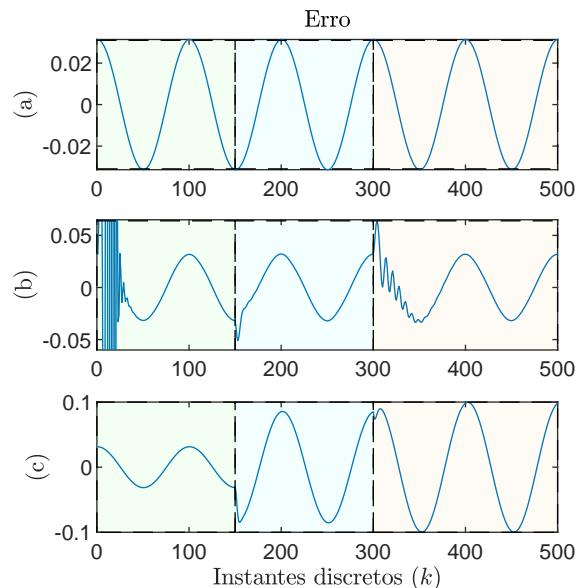


Figura 3. Comportamento do sinal de erro de rastreamento entre a referência e a saída de controle do sistema de controle em malha fechada considerado no Exemplo 1. (a) é o comportamento nominal do sistema. (b) é o comportamento do sistema com a ocorrência de falhas e o uso do atuador virtual adaptativo proposto. (c) é o comportamento em malha fechada com a ocorrência de falhas sem o uso do atuador virtual. As três regiões coloridas, ao longo do tempo, representam as diferentes condições de falha simuladas: a primeira região tem comportamento nominal, sem falhas; a segunda região apresenta uma perda de 20% de efetividade no primeiro atuador e falha total no segundo atuador; a terceira região apresenta falha total no primeiro atuador e perda de 70% de efetividade no segundo atuador.

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Assim como no exemplo anterior, o sistema possui duas entradas de controle redundantes, e mesmo que uma das duas entradas de controle sofra uma falha total (e não tenha mais efeito sobre o sistema), a mesma atuação ainda pode ser atingida pelo controlador. Atendendo portanto às Considerações 1 e 2 exigidas para o projeto do atuador virtual adaptativo.

Para este sistema, é projetado um controlador para que o segundo estado siga um sinal de referência. A lei de controle utilizada tem a forma apresentada em (40), com  $r_k$  sendo o sinal de referência, e  $y_k$  o sinal do segundo estado do sistema. Neste exemplo, utiliza-se:

$$K = \begin{bmatrix} -1.0710 & -4.6761 \\ -1.0710 & -4.6761 \end{bmatrix}, \quad K_i = \begin{bmatrix} 2.5896 \\ 2.5896 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0.0265 \\ 5.9575 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

para as matrizes do controlador. Resolvendo a LMI apresentada no Teorema 1, com a condição extra  $X < 100I$ , para  $\alpha = 0.9$ , encontra-se:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} -1.5082 & -0.0433 \\ -0.0006 & -0.0002 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0.0146 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0100 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

e  $\gamma = 0.0146$ . De forma a implementar o atuador virtual adaptativo, este exemplo emprega  $\kappa = 0.99$  e  $\delta = 1.2$  na lei de adaptação. As matrizes  $\hat{M}_k$  e  $\hat{R}_k$  são inicializadas com zeros.

O sistema em malha fechada foi simulado para uma referência triangular, considerando um cenário com o sistema nominal e sem o atuador virtual, e um cenário em que:

$$\Phi = \begin{cases} I, & k < 150, \\ \text{diag}(0.8, 0), & 150 \leq k < 300, \\ \text{diag}(0, 0.3), & k > 300, \end{cases} \quad (47)$$

para o caso com e sem a utilização do atuador virtual. Os sinais da saída controlada e referência são apresentados na Figura 4 e o sinal de erro de rastreamento (entre a referência desejada e o sinal de saída do sistema em malha fechada) é apresentado na Figura 5. Note que, após um transitório inicial e nos instantes  $k = 150$  e  $k = 300$  (correspondentes a uma mudança na atuação do sistema), o atuador virtual adaptativo faz com que o sistema se comporte próximo ao sistema nominal.

Como o sistema deste exemplo é instável em malha aberta, o sistema em malha fechada com falhas e sem o uso do atuador virtual não foi capaz de estabilizar o sistema, resultando no comportamento em malha fechada apresentado nos gráficos (c) das Figuras 4 e 5.

#### 4. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi apresentado o projeto de um *atuador virtual adaptativo* que é capaz de reconfigurar um sistema de controle de modo que as falhas de atuador sejam compensadas, com a garantia de estabilidade e desempenho satisfatório. Além disso, o sistema em malha fechada reconfigurado possui, assintoticamente, o comportamento do sistema sem a ocorrência de falhas (nominal).

Diferentemente de outros trabalhos na literatura, o atuador virtual apresentado dispensa o uso de um módulo de detecção e isolamento de falhas (módulo FDI), devido à da lei de adaptação apresentada, e portanto, não está sujeito à problemas causados por erros e imprecisões na estimação das falhas nestes módulos.

Como pode ser visto pelos exemplos apresentados, após a ocorrência de uma falha, o atuador virtual proposto é capaz de compensá-la e de se comportar como se a falha não tivesse acontecido, garantindo o desempenho e a estabilidade do sistema de controle em malha fechada. Além disso, como o atuador virtual proposto reconfigura o sistema de controle de modo que o controlador não perceba a ocorrência das falhas de atuação, este controlador pode ser sintonizado apenas para o sistema nominal (sem a preocupação da ocorrência de falhas), como ilustrado pelos exemplos apresentados.

Este trabalho focou os estudos em um caso em que o sistema é linear, e todos os estados estão disponíveis para o atuador virtual adaptativo. Trabalhos futuros terão como foco lidar com sistemas não-lineares (por meio das modelagens qLPV e fuzzy TS) e no caso em que apenas alguns sinais de saída do sistema estão disponíveis.

Além disso, serão realizados outros estudos para investigar maneiras de evitar o fenômenos de *bursting* (o fenômeno

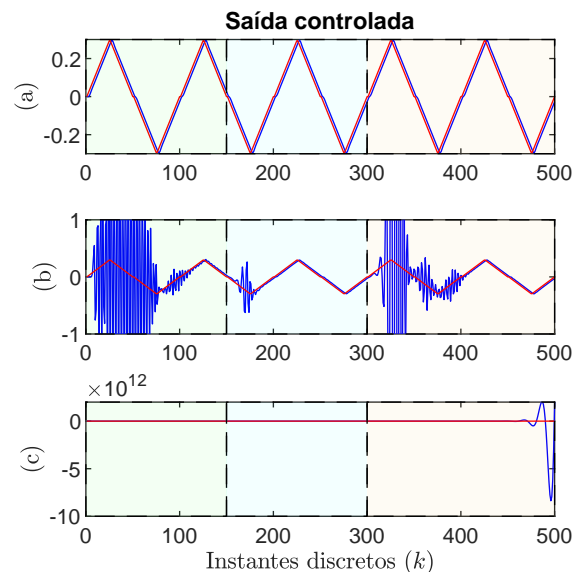


Figura 4. Comportamento da saída controlada do sistema de controle em malha fechada considerado no Exemplo 2. As linhas em **vermelho** representam o sinal de referência, enquanto que as linhas em **azul** representam a saída controlada do sistema. (a) é o comportamento nominal do sistema. (b) é o comportamento do sistema com a ocorrência de falhas e o uso do atuador virtual adaptativo proposto. (c) é o comportamento em malha fechada com a ocorrência de falhas sem o uso do atuador virtual. As três regiões coloridas, ao longo do tempo, representam as diferentes condições de falha simuladas: a primeira região tem comportamento nominal, sem falhas; a segunda região apresenta uma perda de 20% de efetividade no primeiro atuador e falha total no segundo atuador; a terceira região apresenta falha total no primeiro atuador e perda de 70% de efetividade no segundo atuador.

em que um sistema adaptativo tem uma excursão muito longe dos estados antes da convergência dos parâmetros, levando a um comportamento indesejado) e garantir um certo desempenho para a convergência da lei de adaptação.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao apoio recebido pelo IFMG Campus Sabará e IFMG Reitoria (PRPPG).

#### REFERÊNCIAS

- Akhtar, S., Venugopal, R., and Bernstein, D.S. (2004). Logarithmic lyapunov functions for direct adaptive stabilization with normalized adaptive laws. *International Journal of Control*, 77(7), 630–638. doi:10.1080/00207170410001699021.
- Bessa, I., Puig, V., and Palhares, R.M. (2021). Passivation blocks for fault tolerant control of nonlinear systems. *Automatica*, 125, 109450. doi:10.1016/j.automatica.2020.109450.
- Bounemur, A., Chemachema, M., and Essounbouli, N. (2018). Indirect adaptive fuzzy fault-tolerant tracking control for MIMO nonlinear systems with actuator and



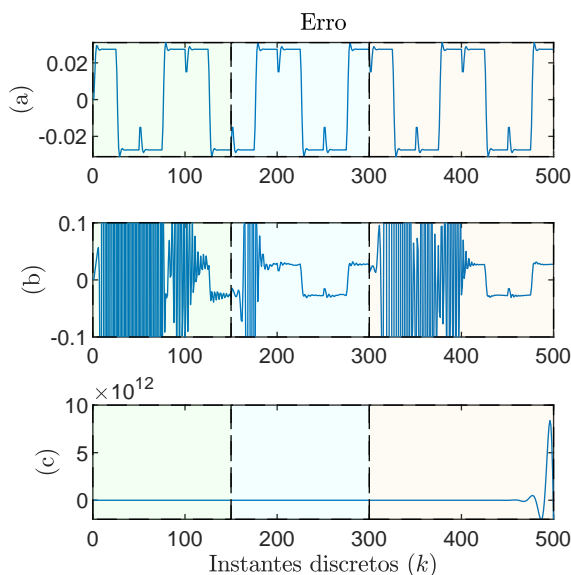


Figura 5. Comportamento do sinal de erro de rastreamento entre a referência e a saída de controle do sistema de controle em malha fechada considerado no Exemplo 2. (a) é o comportamento nominal do sistema. (b) é o comportamento do sistema com a ocorrência de falhas e o uso do atuador virtual adaptativo proposto. (c) é o comportamento em malha fechada com a ocorrência de falhas sem o uso do atuador virtual. As três regiões coloridas, ao longo do tempo, representam as diferentes condições de falha simuladas: a primeira região tem comportamento nominal, sem falhas; a segunda região apresenta uma perda de 20% de efetividade no primeiro atuador e falha total no segundo atuador; a terceira região apresenta falha total no primeiro atuador e perda de 70% de efetividade no segundo atuador.

- sensor failures. *ISA Transactions*, 79, 45–61. doi:10.1016/j.isatra.2018.04.014.
- Cosme, L.B., Caminhas, W.M., D’Angelo, M.F.S.V., and Palhares, R.M. (2019). A novel fault-prognostic approach based on interacting multiple model filters and fuzzy systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66(1), 519–528.
- Lunze, J. and Richter, J. (2008). Reconfigurable fault-tolerant control: A tutorial introduction. *European Journal of Control*, 14(5), 359–386. doi:10.3166/ejc.14.359-386.
- Lunze, J. and Steffen, T. (2006). Control reconfiguration after actuator failures using disturbance decoupling methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(10), 1590–1601. doi:10.1109/TAC.2006.882938.
- Nakamura, T.A., Palhares, R.M., Caminhas, W.M., Menezes, B.R., de Campos, M.C.M., Fumega, U., Bomfim, C.H., and Lemos, A.P. (2017). Adaptive fault detection and diagnosis using parsimonious gaussian mixture models trained with distributed computing techniques. *Journal of the Franklin Institute*, 354(6), 2543–2572.
- Pizzi, N., Kofman, E., De Doná, J.A., and Seron, M.M. (2019). Actuator fault tolerant control based on probabilistic ultimate bounds. *ISA Transactions*, 84, 20–30. doi:10.1016/j.isatra.2018.08.021.
- Quadros, M.M., Leite, V.J., and Palhares, R.M. (2022). Robust fault hiding approach for T–S fuzzy systems with unmeasured premise variables. *Information Sciences*, 589, 690–715. doi:https://doi.org/10.1016/j.ins.2021.12.129.
- Quadros, M.M., Bessa, I.V., Leite, V.J.S., and Palhares, R.M. (2020). Fault tolerant control for linear parameter varying systems: An improved robust virtual actuator and sensor approach. *ISA Transactions*, 104, 356–369. doi:10.1016/j.isatra.2020.05.010.
- Richter, J. (2011). *Reconfigurable control of nonlinear dynamical systems: A fault-hiding approach*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Berlin Heidelberg.
- Rotondo, D., Cristofaro, A., and Johansen, T. (2018). Fault tolerant control of uncertain dynamical systems using interval virtual actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(2), 611–624. doi:10.1002/rnc.3888.
- Rotondo, D., Nejjari, F., and Puig, V. (2016). Fault tolerant control of a proton exchange membrane fuel cell using Takagi–Sugeno virtual actuators. *Journal of Process Control*, 45, 12–29. doi:10.1016/j.jprocont.2016.06.001.
- Stefanovski, J.D. (2019). Fault tolerant control of descriptor systems with disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(3), 976–988. doi:10.1109/TAC.2018.2827702.
- Steffen, T. (2005). *Control reconfiguration of dynamical systems: Linear approaches and structural tests*. Springer Berlin Heidelberg.
- Sun, S., Zhang, H., Wang, Y., and Cai, Y. (2018). Dynamic output feedback-based fault-tolerant control design for T–S fuzzy systems with model uncertainties. *ISA Transactions*, 81, 32–45. doi:10.1016/j.isatra.2018.07.022.
- Tabatabaeipour, S.M., Stoustrup, J., and Bak, T. (2015). Fault-tolerant control of discrete-time LPV systems using virtual actuators and sensors. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(5), 707–734. doi:10.1002/rnc.3194.
- Yang, G. and Ye, D. (2009). Reliable  $H_\infty$  control of linear systems with adaptive mechanism. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(1), 242–247. doi:10.1109/TAC.2009.2036293.