

Proposta de uma Fórmula Fechada para Análise da Família de Funções de Janela Nuttall no Domínio da Transformada Fracionária de Fourier

Maykon R.P. da Silva, Flávio G.C. Rocha

Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação,
Universidade Federal de Goiás, GO,
(e-mail: maykonrenan@discente.ufg.br, flaviogcr@ufg.br).

Abstract: Window functions are widely used in several applications involving signal processing and telecommunications. Nuttall windows are classic functions of literature, where they are based on an expression of sum of cosines. In the frequency domain, it has the advantage of having a large attenuation of the side lobes, which reduces spectral leakage, however, it has a large width of the main lobe, which causes distortions in the signal spectrum. To circumvent this problem, a mathematical model is proposed where a closed form expression is derived for the Nuttall window functions using the Fractional Fourier Transform (FrFT). The proposed approach has a parameter that controls the width of the main lobe and at the same time maintains the reduced size of the side lobes. A closed formula is obtained for the analysis of this family of functions and the results presented show that the adjustment of the width of the main lobe in the fractional domain of Fourier expands the application horizon of Nuttall windows.

Resumo: As funções de janela são amplamente utilizadas em diversas aplicações envolvendo processamento de sinais, sistemas de controle digitais e telecomunicações. As janelas Nuttall são funções clássicas da literatura baseadas em uma expressão de soma de cossenos e tem como vantagem possuir, no domínio da frequência, uma grande atenuação dos lóbulos laterais, o que reduz o vazamento espectral, entretanto, possui uma grande largura do lóbulo principal, o que causa distorções no espectro do sinal. Neste artigo, propõe-se aplicar a Transformada Fracionária de Fourier (FrFT) à família de funções de janela Nuttall. A abordagem proposta possui um parâmetro que controla a largura do lóbulo principal e ao mesmo tempo mantém o tamanho reduzido dos lóbulos laterais. Obtém-se uma fórmula fechada para a análise dessa família de funções e os resultados apresentados mostram que o ajuste da largura do lóbulo principal no domínio fracionário de Fourier amplia o horizonte de aplicações das janelas Nuttall.

Keywords: Spectral Leakage, Nuttall Windows, FRFT, Spectral Analysis

Palavras-chaves: Vazamento Espectral, Janelas Nuttall, FRFT, Análise Espectral

1. INTRODUÇÃO

A técnica de janelamento consiste em uma função matemática com uma amplitude que varia suave e gradualmente em direção a zero nas bordas (Harris, 1978). A resposta em frequência de uma função de janela é composta pelo lóbulo principal e pelos lóbulos laterais. Aplicar uma função de janela a um sinal no domínio do tempo, corresponde a multiplicar ponto a ponto a janela com o sinal e, portanto, aplicar uma convolução entre o espectro do sinal e o espectro da janela no domínio da frequência. O lóbulo principal da função de janela representa a frequência de interesse do sinal, enquanto os lóbulos laterais representam os efeitos do Vazamento Espectral (*Spectral Leakage*) (Gautam et al., 1995; Prabhu, 2013).

Funções de janela são amplamente utilizadas em processamento de sinais para aplicações em análise e estimativa de sinais, projeto de filtros digitais, sinais de áudio, processamento de imagens, classificação de dados cósmicos,

radars, *beamforming* e sistemas OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) (Prabhu, 2013; Antoniou, 2006; Torbet et al., 1999; Allen and Ghavami, 2005; Bergen and Antoniou, 2004; Guan et al., 2017; Hammoodi et al., 2019). Por este motivo, muitas funções de janela foram e ainda continuam sendo propostas com o objetivo de atender às mais diversas aplicações (Kaiser and Schafer, 1980; Lynch, 1997; Bergen and Antoniou, 2004; Tang and Su, 2018; Stanković, 2018; Koester and Chen, 2019; Li et al., 2020).

Neste trabalho, propõe-se uma abordagem matemática onde deriva-se fórmula fechada para a análise do comportamento das funções de janela Nuttall no domínio fracionário de Fourier. A FrFT tem como vantagem ser um algoritmo flexível, já que possui um parâmetro de ajuste (β), possibilitando qualquer função ou sinal ser transformado para um domínio intermediário entre tempo e frequência. Espera-se que essa flexibilidade proporcionada pela FrFT mantenha ou potencialize as vantagens das janelas Nuttall

e reduza suas desvantagens, como por exemplo, a largura do lóbulo principal.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta uma breve descrição sobre funções de janela e suas características no domínio da frequência; a Seção 3 apresenta uma breve descrição sobre a Transformada Fracionária de Fourier, suas características e aplicações; a Seção 4 apresenta uma abordagem matemática para análise da família de janelas Nuttall no domínio fracionário de Fourier; a Seção 5 avalia o desempenho da abordagem proposta por meio da análise espectral; a Seção 6 apresenta as conclusões obtidas.

2. FUNÇÕES DE JANELA E SEUS PARÂMETROS ESPECTRAIS

As funções de janela são usadas na análise harmônica para reduzir os efeitos indesejáveis relacionados ao vazamento espectral. Todas as funções de janela são projetadas para reduzir a amplitude dos lóbulos laterais do espectro produzido pelo algoritmo da FFT (*Fast Fourier Transform*). Embora a aplicação da função de janela atenuie os lóbulos laterais, ela faz com que o lóbulo principal se amplie, distorcendo o sinal, o que dificulta a análise e o estudo das características do sinal no domínio da frequência (Harris, 1978; Gautam et al., 1995; Prabhu, 2013).

Uma função de janela pode ser do tipo fixa ou ajustável. As janelas fixas têm apenas um parâmetro independente (comprimento da janela) responsável por controlar a largura do lóbulo principal. Janelas ajustáveis possuem dois ou mais parâmetros independentes, o comprimento da janela, como em janelas fixas e um ou mais parâmetros adicionais que podem controlar a atenuação dos lóbulos laterais (Prabhu, 2013). Em (Harris, 1978) e (Gautam et al., 1995) é apresentada uma revisão completa das funções de janela clássicas da literatura e suas propriedades espectrais.

A Figura 1 apresenta o gráfico de Densidade Espectral de Potência (PSD – *Power Spectral Density*) para a função de janela Retangular. Além disso, são apresentados alguns parâmetros espectrais que são amplamente utilizados como métrica de desempenho na análise espectral, além de auxiliar na seleção da janela apropriada para uma aplicação específica. Os parâmetros das funções da janela que são geralmente usados para a avaliação são os seguintes (Harris, 1978; Gautam et al., 1995; Prabhu, 2013): (HMLW – *Half Main Lobe Width*) é a frequência em que a amplitude do lóbulo principal, ao decair, se torna igual à maior amplitude dos lobos laterais; (MSLL – *Maximum Side Lobe Level*) é a amplitude máxima do lóbulo lateral; (SLFOR – *Side Lobe Fall-Off Rate*) é a taxa de atenuação dos lóbulos laterais.

3. TRANSFORMADA FRACIONÁRIA DE FOURIER

Em matemática, na área de análise harmônica, a Transformada Fracionária de Fourier (FrFT – *Fractional Fourier Transform*) é uma família de transformações lineares que generalizam a transformada de Fourier (Ozaktas et al., 1999). Pode-se deduzi-la como a transformada de Fourier para a m -ésima potência, onde m não precisa ser um número inteiro, portanto, pode-se transformar uma função e/ou sinal em qualquer domínio intermediário entre

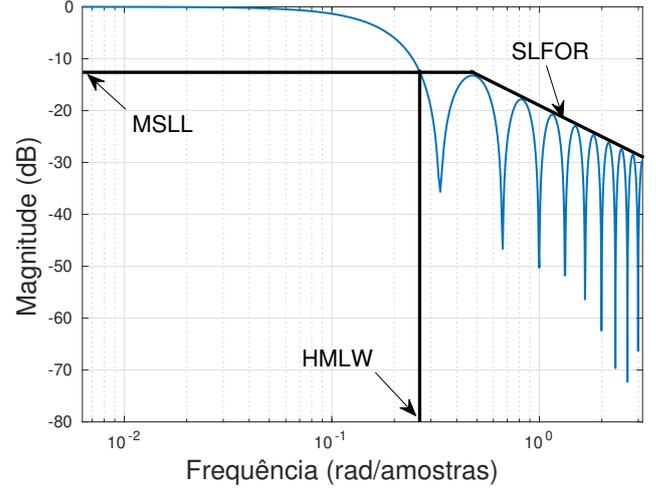


Figura 1. Densidade espectral de potência da janela Retangular e seus parâmetros espectrais.

tempo e frequência. Suas aplicações vão desde a análise de sinais, análise de funções de janela, projeto de filtros digitais, recuperação de fases, reconhecimento de padrões e sistemas de comunicação e processamento de imagens (Ozaktas et al., 1999; Kumar et al., 2011; Goel and Singh, 2018; de Oliveira Neto and Lima, 2017; Sejdić et al., 2011; Tao et al., 2011; Gomez et al., 2020; Trivedi and Kumar, 2020). No geral, a FrFT é uma valiosa ferramenta de processamento de sinais. Espera-se que suas aplicações práticas cresçam significativamente nos próximos anos, e que a FrFT ofereça muitas vantagens em relação à análise tradicional de Fourier.

A transformada fracionária de Fourier é um operador linear definido como:

$$X_\alpha(u) = \mathcal{F}_\alpha(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)K_\alpha(t, u)dt, \quad (1)$$

se α não for múltiplo de π , $K_\alpha(t, u)$ é dado por:

$$K_\alpha(t, u) = \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\left[\frac{t^2+u^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)\right]}. \quad (2)$$

A FrFT é denotada por \mathcal{F}_α , onde $\alpha = \beta\pi/2$, é o ângulo de rotação e β é um número real. Para $\alpha = \pi/2$, a FrFT se reduz à transformada de Fourier convencional; para $\alpha = -\pi/2$, ela equivale à transformada de Fourier inversa; para os demais casos, a função é igual ao impulso (Ozaktas et al., 1999).

4. MODELO MATEMÁTICO PARA ANÁLISE DAS FUNÇÕES DE JANELAS NUTTALL NO DOMÍNIO FRACIONÁRIO DE FOURIER

A família de janelas Nuttall são funções matemáticas derivadas de soma de cossenos de três ou quatro termos. As janelas Nuttall são funções de janela fixas que tem como principal característica uma grande atenuação dos lóbulos laterais em virtude dos valores dos seus coeficientes (a_n , para $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$) que multiplicam cada termo da expressão soma-cosseno (Nuttall, 1981; Prabhu, 2013). Entretanto, por terem uma baixa amplitude nos lóbulos laterais, isso reflete em uma grande largura do

lóbulo principal. Para mitigar esse problema, propõe-se uma abordagem matemática onde será analisado o comportamento das janelas Nuttall no domínio fracionário de Fourier. O objetivo de utilizar a abordagem proposta, é controlar a largura do lóbulo principal ajustando-se o parâmetro β da FrFT entre 0 e 1 (para $\beta = 1$, a abordagem proposta resume-se à janela Nuttall clássica). A função de janela Nuttall no domínio do tempo é dada por:

$$w(t) = a_0 + a_1 \cos(2\pi t) + a_2 \cos(4\pi t) + a_3 \cos(6\pi t), \quad |t| \leq \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Reescrevendo (3) na fórmula de Euler, tem-se:

$$w(t) = a_0 + a_1 \frac{e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}}{2} + a_2 \frac{e^{i4\pi t} + e^{-i4\pi t}}{2} + a_3 \frac{e^{i6\pi t} + e^{-i6\pi t}}{2}, \quad |t| \leq \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Aplicando a FrFT dada por (1) em (4), tem-se:

$$\begin{aligned} W_\alpha(u) &= a_0 \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\ &+ \frac{a_1}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\ &+ \frac{a_1}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\ &+ \frac{a_2}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{i4\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\ &+ \frac{a_2}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i4\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\ &+ \frac{a_3}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{i6\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\ &+ \frac{a_3}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i6\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt. \quad (5) \end{aligned}$$

A equação (5) é reescrita da seguinte maneira:

$$W_\alpha(u) = W_a^0 + W_\alpha^1 + W_\alpha^2 + W_\alpha^3 + W_\alpha^4 + W_\alpha^5 + W_\alpha^6. \quad (6)$$

Solucionando cada termo separadamente em (6), tem-se:

$$\begin{aligned} W_\alpha^0(u) &= a_0 \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\ &= \frac{a_0}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{\frac{u^2}{2} \left(i\cot(\alpha) + \frac{\operatorname{cosec}(\alpha)^2}{i\cot(\alpha)} \right)} \\ &\times \left\{ \operatorname{erfi} \left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i u \operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}} \right) \right. \\ &\left. - \operatorname{erfi} \left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i u \operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}} \right) \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_\alpha^1(u) &= \frac{a_1}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\ &= \frac{a_1}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{\left(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(i2\pi - i u \operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)} \right)} \\ &\times \left\{ \operatorname{erfi} \left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i2\pi - i u \operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}} \right) \right. \\ &\left. - \operatorname{erfi} \left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i2\pi - i u \operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}} \right) \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_\alpha^2(u) &= \frac{a_1}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\ &= \frac{a_1}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{\left(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(-i2\pi - i u \operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)} \right)} \\ &\times \left\{ \operatorname{erfi} \left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i2\pi + i u \operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}} \right) \right. \\ &\left. - \operatorname{erfi} \left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i2\pi + i u \operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}} \right) \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_\alpha^3(u) &= \frac{a_2}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\ &\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{i4\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\ &= \frac{a_2}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{\left(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(i4\pi - i u \operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)} \right)} \\ &\times \left\{ \operatorname{erfi} \left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i4\pi - i u \operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}} \right) \right. \\ &\left. - \operatorname{erfi} \left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i4\pi - i u \operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}} \right) \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_\alpha^4(u) &= \frac{a_2}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\
&\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i4\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\
&= \frac{a_2}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(-i4\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)})} \\
&\times \left\{ \operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i4\pi + iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right. \\
&\left. - \operatorname{erfi}\left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i4\pi + iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right\} \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_\alpha^5(u) &= \frac{a_3}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\
&\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{i6\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\
&= \frac{a_3}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(i6\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)})} \\
&\times \left\{ \operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i6\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right. \\
&\left. - \operatorname{erfi}\left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i6\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right\} \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_\alpha^6(u) &= \frac{a_3}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{2\pi}} e^{i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha)} \\
&\times \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i6\pi t} e^{[i\frac{t^2}{2}\cot(\alpha) - iut\operatorname{cosec}(\alpha)]} dt \\
&= \frac{a_3}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(-i6\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)})} \\
&\times \left\{ \operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i6\pi + iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right. \\
&\left. - \operatorname{erfi}\left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i6\pi + iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right\} \quad (13)
\end{aligned}$$

Substituindo (7), (8), (9), (10), (11), (12) e (13) em (6) obtêm-se o modelo matemático proposto, dado por:

$$\begin{aligned}
W_\alpha(u) &= \frac{a_0}{2} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{\frac{u^2}{2} \left(i\cot(\alpha) + \frac{\operatorname{cosec}(\alpha)^2}{i\cot(\alpha)} \right)} \\
&\times \left\{ \operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right. \\
&\left. - \operatorname{erfi}\left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right\} \\
&+ \frac{a_1}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(i2\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)})} \\
&\times \left\{ \operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i2\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right. \\
&\left. - \operatorname{erfi}\left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i2\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right\} \\
&+ \frac{a_1}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(-i2\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)})} \\
&\times \left\{ \operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i2\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right. \\
&\left. - \operatorname{erfi}\left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i2\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right\} \\
&+ \frac{a_2}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(i4\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)})} \\
&\times \left\{ \operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i4\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right. \\
&\left. - \operatorname{erfi}\left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i4\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right\} \\
&+ \frac{a_2}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(-i4\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)})} \\
&\times \left\{ \operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i4\pi + iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right. \\
&\left. - \operatorname{erfi}\left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i4\pi + iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right\} \\
&+ \frac{a_3}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(i6\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)})} \\
&\times \left\{ \operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i6\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right. \\
&\left. - \operatorname{erfi}\left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} + \frac{i6\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right\} \\
&+ \frac{a_3}{4} \sqrt{\frac{1 - i\cot(\alpha)}{i\cot(\alpha)}} e^{(i\frac{u^2}{2}\cot(\alpha) - \frac{(-i6\pi - iu\operatorname{cosec}(\alpha))^2}{2i\cot(\alpha)})} \\
&\times \left\{ \operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i6\pi + iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right. \\
&\left. - \operatorname{erfi}\left(-\frac{\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}{2} - \frac{i6\pi + iu\operatorname{cosec}(\alpha)}{2\sqrt{i/2\cot(\alpha)}}\right) \right\} \quad (14)
\end{aligned}$$

A equação (14) depende do ângulo α , frequência u e por fim dos coeficientes a_n (parâmetro responsável por definir o tipo de função de janela a ser analisada). Esta fórmula fechada tem como principal vantagem oferecer uma análise direta para funções de janelas baseadas em expressões de soma de cossenos no domínio fracionário de Fourier, com o objetivo controlar os parâmetros espectrais das mesmas. Logo, (14) pode ser definido como uma abordagem genérica, já que é aplicável a qualquer tipo de função de janela derivadas de expressão de soma de cossenos. Entretanto, neste artigo serão avaliadas apenas as funções de janela Nuttall.

5. SIMULAÇÃO E RESULTADOS

Nesta seção, utilizando a abordagem proposta em (14), pretende-se analisar as janelas Nuttall no domínio fracionário de Fourier, variando o parâmetro β entre 0 e 1. Por fim, o desempenho das janelas Nuttall será avaliado em termos dos seguintes parâmetros espectrais, HMLW, MSL e SLFOR. A Tabela 1 apresenta os coeficientes das seis funções de janelas Nuttall utilizadas neste trabalho. Mais detalhes sobre as janelas Nuttall podem ser obtidos em Prabhu (2013); Nuttall (1981).

Tabela 1. Coeficientes das janelas Nuttall.

| Janelas | a_0 | a_1 | a_2 | a_3 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Nuttall 1 | 0,375 | 0,5 | 0,125 | 0,012604 |
| Nuttall 2 | 0,4243801 | 0,4973406 | 0,0782793 | 0,0 |
| Nuttall 3 | 0,355768 | 0,487396 | 0,144232 | 0,012604 |
| Nuttall 4 | 0,3635819 | 0,4891775 | 0,1365995 | 0,0106411 |
| Nuttall 5 | 0,3125 | 0,46875 | 0,1875 | 0,03125 |
| Nuttall 6 | 0,338946 | 0,481973 | 0,161054 | 0,018027 |

A Figura 2 apresenta o espectro normalizado para funções de janelas Nuttall no domínio fracionário de Fourier, variando o parâmetro β . Percebe-se que, a banda de cada um dos seis espectros torna-se mais estreita quando β tende a zero. Além disso, nota-se que o espectro das seis funções de janela são similares, entretanto ao se analisar o gráfico da PSD das seis janelas Nuttall (Figura 3), pode-se notar as características espectrais distintas de cada função de janela e o impacto do parâmetro β nas mesmas.

Observando a Figura 3 é possível visualizar as características espectrais de cada função de janela Nuttall para $\beta = 0, 1; 0, 5; 1$. Nota-se que cada função de janela possui HMLW, MSL e SLFOR distinto. Além disso, percebe-se que a HMLW reduz quando β decresce para todas as funções analisadas. Isso é interessante, pois como já foi dito na Seção 2, janelas com lóbulos principais largos causam distorções no sinal no domínio da frequência. Ademais, para os outros parâmetros, MSL e SLFOR, também houve variações. As Tabelas 2, 3, 4, 5, 6 e 7 corroboram essas afirmações. As Tabelas 2, 3, 4, 5, 6 e 7 apresentam os valores para HMLW, MSL e SLFOR para cada função de janela Nuttall variando o parâmetro β entre 0 e 1. Ao analisar cada tabela, nota-se a abordagem matemática proposta não se restringiu apenas na redução do HMLW, pois em alguns casos, como na janela Nuttall 5 (Tabela 6), houve redução acentuada na MSL com o ajuste de β para 0,3; 0,2; 0,1. E na maioria dos casos um aumento gradual na SLFOR, destacando-se a janela Nuttall 4 (Tabela 5), que possuía uma SLFOR de 0,00 dB/oitava para $\beta = 1$

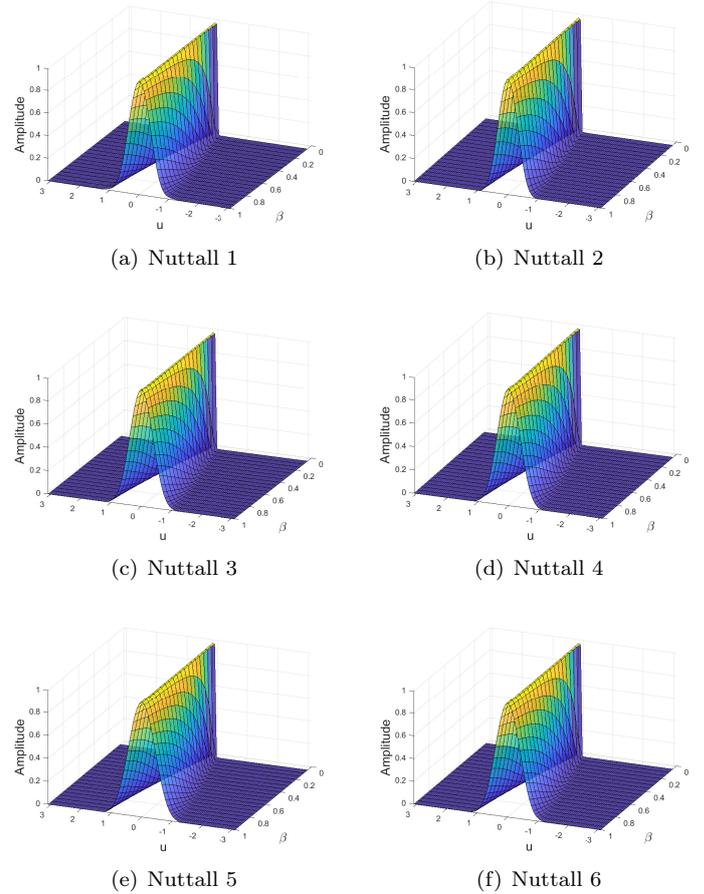


Figura 2. Espectro normalizado da família de janelas Nuttall no domínio fracionário de Fourier.

e elevou-se este valor para 6,37 dB/oitava para $\beta = 0,1$. Vale ressaltar que, é desejável janelas com baixa MSL e alta SLFOR, pois ajudam na contenção do vazamento espectral.

Tabela 2. Parâmetros da função da janela Nuttall 1 com variações do parâmetro β .

| β | HMLW (π rad/amostra) | MSL (dB) | SLFOR (dB/oit.) |
|---------|---------------------------|----------|-----------------|
| 1,0 | 1,24 | -49,44 | 7,22 |
| 0,9 | 1,16 | -49,35 | 7,90 |
| 0,8 | 1,06 | -49,53 | 7,27 |
| 0,7 | 0,96 | -49,83 | 7,00 |
| 0,6 | 0,84 | -49,83 | 7,44 |
| 0,5 | 0,71 | -49,46 | 7,25 |
| 0,4 | 0,57 | -49,36 | 7,16 |
| 0,3 | 0,44 | -49,25 | 6,58 |
| 0,2 | 0,29 | -49,66 | 6,51 |
| 0,1 | 0,14 | -48,49 | 6,35 |

Com o objetivo de analisar o desempenho da abordagem proposta em uma aplicação direta, pretende-se executar a transformada janelada de Fourier (também conhecida como Transformada de Fourier de Curta Duração (STFT - *Short-Time Fourier Transform*)) no sinal dado por:

$$s(t) = \begin{cases} \cos(2\pi 10t) & 0s \leq t < 5s, \\ \cos(2\pi 25t) & 5s \leq t < 10s, \\ \cos(2\pi 50t) & 10s \leq t < 15s, \\ \cos(2\pi 100t) & 15s \leq t < 20s. \end{cases} \quad (15)$$

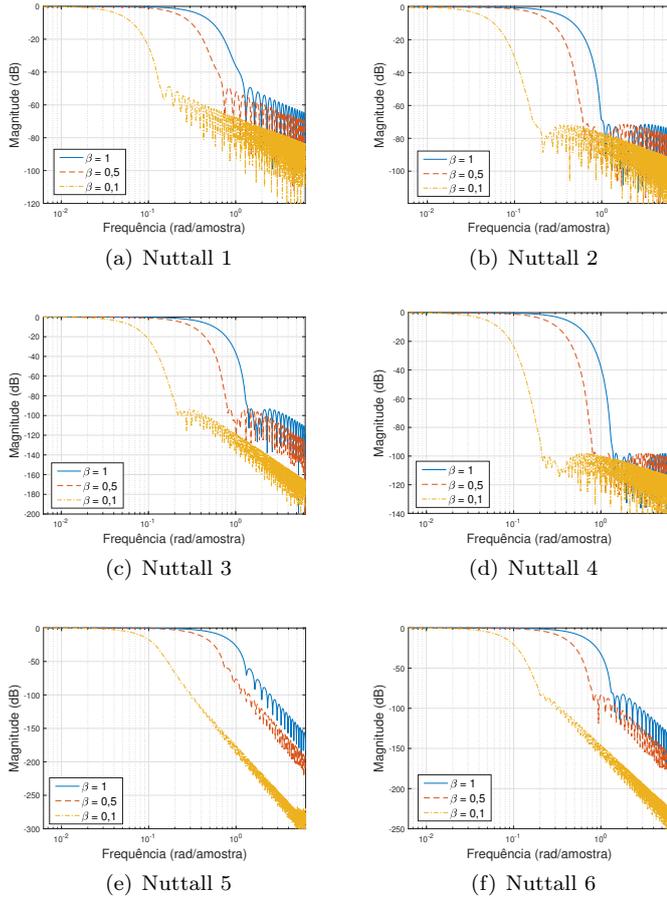


Figura 3. PSD para as Janelas Nuttall no domínio fracionário de Fourier.

O sinal $s(t)$ é composto por um conjunto de quatro formas de onda sinusoidais unidas em sequência, onde cada forma de onda é composta apenas por uma das quatro frequências 10 Hz, 25 Hz, 50 Hz, 100 Hz. A Figura 4 apresenta os espectrogramas após a execução da STFT em $s(t)$ utilizando as janelas Nuttall 1, Nuttall 3 e Nuttall 5, utilizando (14) para $\beta = 1$ e $\beta = 0,2$. As cores dos espectrogramas em tons de azul e amarelo definem a magnitude do sinal em dB.

Os resultados da Figura 4 mostram que o espectrograma com as janelas Nuttall 1, Nuttall 3 e Nuttall 5 para $\beta = 1$, o sinal fica distorcido, dificultando a identificação da frequência exata onde as componentes de cada forma de onda aparecem, ou seja, 10 Hz, 25 Hz, 50 Hz, 100

Tabela 3. Parâmetros da função da janela Nuttall 2 com variações do parâmetro β .

| β | HMLW (π rad/amostra) | MSLL (dB) | SLFOR (dB/oit.) |
|---------|---------------------------|-----------|-----------------|
| 1,0 | 1,05 | -71,51 | 4,28 |
| 0,9 | 0,98 | -71,54 | 4,47 |
| 0,8 | 0,91 | -71,73 | 4,70 |
| 0,7 | 0,81 | -71,82 | 4,88 |
| 0,6 | 0,72 | -71,52 | 5,31 |
| 0,5 | 0,62 | -71,61 | 5,37 |
| 0,4 | 0,50 | -71,49 | 5,10 |
| 0,3 | 0,39 | -71,64 | 5,20 |
| 0,2 | 0,30 | -71,53 | 6,15 |
| 0,1 | 0,19 | -71,47 | 6,16 |

Hz. Isso ocorre devido as janelas Nuttall possuírem um largo lóbulo principal. Porém, esse problema é corrigido ajustando-se $\beta = 0,2$ utilizando (14). Agora é possível identificar de forma mais clara as componentes do sinal em uma determinada frequência. Vale ressaltar, que no espectrograma do sinal para a janela Nuttall 1 é possível identificar um vazamento de componentes do sinal (em amarelo) para outras frequências, o que não ocorre nos espectrogramas com as janelas Nuttall 3 e Nuttall 5, possuem valores para os parâmetros MSLL e SLFOR que

Tabela 4. Parâmetros da função da janela Nuttall 3 com variações do parâmetro β .

| β | HMLW (π rad/amostra) | MSLL (dB) | SLFOR (dB/oit.) |
|---------|---------------------------|-----------|-----------------|
| 1,0 | 1,41 | -93,34 | 15,21 |
| 0,9 | 1,29 | -93,37 | 15,67 |
| 0,8 | 1,18 | -93,36 | 15,65 |
| 0,7 | 1,06 | -93,52 | 16,83 |
| 0,6 | 0,94 | -93,33 | 16,51 |
| 0,5 | 0,80 | -92,91 | 16,50 |
| 0,4 | 0,68 | -93,38 | 17,10 |
| 0,3 | 0,57 | -93,45 | 17,37 |
| 0,2 | 0,39 | -93,47 | 18,96 |
| 0,1 | 0,21 | -93,73 | 18,66 |

Tabela 5. Parâmetros da função da janela Nuttall 4 com variações do parâmetro β .

| β | HMLW (π rad/amostra) | MSLL (dB) | SLFOR (dB/oit.) |
|---------|---------------------------|-----------|-----------------|
| 1,0 | 1,38 | -98,21 | 0,00 |
| 0,9 | 1,29 | -98,23 | 0,00 |
| 0,8 | 1,18 | -98,38 | 0,00 |
| 0,7 | 1,06 | -98,22 | 2,93 |
| 0,6 | 0,93 | -98,33 | 3,97 |
| 0,5 | 0,87 | -98,26 | 5,01 |
| 0,4 | 0,67 | -98,39 | 4,98 |
| 0,3 | 0,55 | -98,58 | 5,25 |
| 0,2 | 0,40 | -98,59 | 5,97 |
| 0,1 | 0,21 | -98,21 | 6,37 |

Tabela 6. Parâmetros da função da janela Nuttall 5 com variações do parâmetro β .

| β | HMLW (π rad/amostra) | MSLL (dB) | SLFOR (dB/oit.) |
|---------|---------------------------|-----------|-----------------|
| 1,0 | 1,29 | -61,11 | 44,50 |
| 0,9 | 1,20 | -61,06 | 45,00 |
| 0,8 | 1,11 | -61,03 | 44,17 |
| 0,7 | 0,99 | -60,67 | 45,35 |
| 0,6 | 0,87 | -60,48 | 47,18 |
| 0,5 | 0,75 | -60,74 | 46,30 |
| 0,4 | 0,61 | -60,79 | 44,00 |
| 0,3 | 0,57 | -76,18 | 43,20 |
| 0,2 | 0,46 | -87,48 | 44,10 |
| 0,1 | 0,31 | -104,05 | 47,70 |

Tabela 7. Parâmetros da função da janela Nuttall 6 com variações do parâmetro β .

| β | HMLW (π rad/amostra) | MSLL (dB) | SLFOR (dB/oit.) |
|---------|---------------------------|-----------|-----------------|
| 1,0 | 1,31 | -82,83 | 27,00 |
| 0,9 | 1,26 | -82,61 | 35,67 |
| 0,8 | 1,21 | -82,72 | 29,17 |
| 0,7 | 1,07 | -82,65 | 31,20 |
| 0,6 | 0,93 | -82,38 | 29,70 |
| 0,5 | 0,85 | -82,62 | 29,10 |
| 0,4 | 0,66 | -82,79 | 30,28 |
| 0,3 | 0,51 | -82,68 | 31,77 |
| 0,2 | 0,37 | -82,78 | 30,80 |
| 0,1 | 0,20 | -82,04 | 30,57 |

reduzem o vazamento de espectro para praticamente zero.

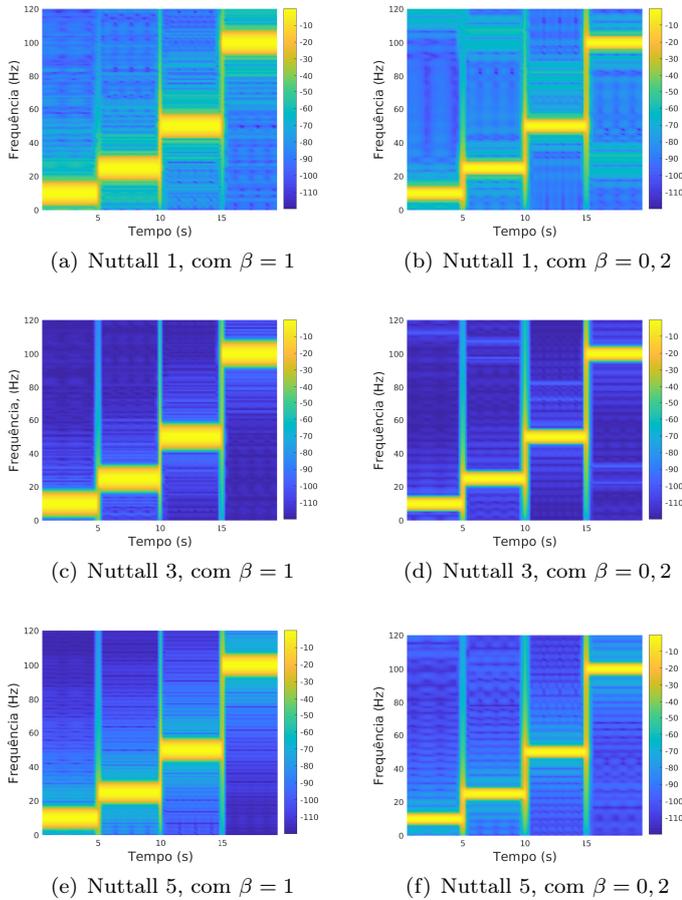


Figura 4. Espectrogramas do sinal $s(t)$ utilizando as funções de janela Nuttall.

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho, uma expressão de forma fechada foi apresentada para análise de funções de janela derivadas de expressões de soma de cossenos no domínio fracionário de Fourier. Neste artigo, avaliou-se apenas família de janelas Nuttall, composta por seis funções matemáticas. As janelas Nuttall foram escolhidas por ter como desvantagem, um lóbulo principal largo, no domínio da frequência, o que não é desejável na análise espectral de sinais, reduzindo assim o horizonte de aplicações para este tipo de janela. Para mitigar este problema, utilizou-se a abordagem proposta, que possui um parâmetro de controle (β), onde foi possível reduzir a largura do lóbulo principal (HMLW) para todas as seis funções de janela analisadas, ademais, em alguns casos, foi possível aumentar o desempenho de determinadas janelas, em relação à MSL e SLFOR, destacando-se a seguintes janelas: a Nuttall 5, reduzindo a MSL de $-61, 11$ dB para $-104, 05$ dB; e a Nuttall 4, elevando a SLFOR de $0, 00$ dB/oitava para $6, 37$ dB/oitava, ajustando-se β para $0, 1$.

O desempenho das janelas Nuttall utilizando (14) foram avaliadas na aplicação da STFT em sinal $s(t)$. Os espectrogramas do sinal com as janelas Nuttall para $\beta = 0, 2$,

reduziram as distorções do sinal, quando comparados aos espectrogramas do sinal com as janelas Nuttall para $\beta = 1$. Logo, isso possibilita identificar as frequência exata onde as componentes do sinal se encontram.

A abordagem matemática proposta tem como vantagem oferecer uma análise direta no domínio fracionário de Fourier para funções de janelas derivadas de soma de cossenos. Além disso, não se limita apenas as janelas Nuttall, a equação (14) pode ser aplicada nas seguintes funções de janelas: Hanning, Hamming, Blackman-Harris e Flat Top, por exemplo. Logo, esta abordagem torna-se uma ferramenta poderosa na análise espectral, e sua aplicação em funções de janelamento possibilita controlar suas características espectrais de acordo com a aplicação desejada, apenas ajustando-se o parâmetro β .

REFERÊNCIAS

- Allen, B. and Ghavami, M. (2005). *Adaptive Array Systems: Fundamentals and Applications*. John Wiley & Sons Ltd.
- Antoniou, A. (2006). *Digital Signal Processing: Signals, Systems and Filters*. The McGraw-Hill Companies.
- Bergen, S. and Antoniou, A. (2004). Design of ultraspherical window functions with prescribed spectral characteristics. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2004(196503), 2053–2065.
- de Oliveira Neto, J. and Lima, J. (2017). Discrete fractional fourier transforms based on closed-form hermite-gaussian-like dft eigenvectors. *IEEE Transactions On Signal Processing*, 65(23), 6171–6184.
- Gautam, J., Kumar, A., and Saxena, R. (1995). Windows: A tool in signal processing. *IETE Technical Review*, 12(3), 217–226.
- Goel, S. and Singh, J. (2018). Analysis of kaiser and gaussian window functions in the fractional fourier transform domain and its application. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering*, 43(2018), 181–188.
- Gomez, A., Ugarte, J.P., and Tobón, C. (2020). The fractional fourier transform as a biomedical signal and image processing tool: A review. *Biocybernetics and Biomedical Engineering*.
- Guan, P., Wu, D., Tian, T., Zhou, J., Zhang, X., Gu, L., Benjebbour, A., Iwabuchi, M., and Kishiyama, Y. (2017). 5g field trials: Odfm-based waveforms and mixed numerologies. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 35(6), 1234–1243.
- Hammoodi, A., Audah, L., and Taher, M. (2019). Green coexistence for 5g waveform candidates: A review. *IEEE Access*, 7, 10103–10126.
- Harris, F. (1978). The examination of cell on the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, 66(1), 51–83.
- Kaiser, J. and Schafer, R. (1980). On the use of the iosinh window for spectrum analysis. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 28(1), 84–91.
- Koester, J. and Chen, J.S. (2019). Conforming window functions for meshfree methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 347(2019), 588–621.
- Kumar, S., Singh, K., and Saxena, R. (2011). Analysis of dirichlet and generalized “hamming” window functions

- in the fractional fourier transform domains. *Signal Processing*, 91(2011), 600–606.
- Li, J., Dong, Z., Luo, L., Duan, S., and Wang, L. (2020). A novel versatile window function for memristor model with application in spiking neural network. *Neurocomputing*.
- Lynch, P. (1997). The dolph-chebyshev window: a simple optimal filter. *Monthly Weather Review*, 125, 655–660.
- Nuttall, A. (1981). Some windows with very good sidelobe behavior. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 29(1), 217–226.
- Ozaktas, H., Kutay, M., and Mendlovic, D. (1999). Introduction to the fractional fourier transform and its applications. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 106, 239–291.
- Prabhu, K. (2013). *Window Functions and Their Applications in Signal Processing*. CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Sejdić, E., Djurović, I., and Stanković, L. (2011). Fractional fourier transform as a signal processing tool: An overview of recent developments. *Signal Processing*, 91(2011), 1351–1369.
- Stanković, V. (2018). Adjustable high resolution window function. *Electronics Letters*, 54(13), 827–829.
- Tang, M.F. and Su, B. (2018). Joint window and filter optimization for new waveforms in multicarrier systems. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 63(2018), 1–20.
- Tao, R., Meng, X.Y., and Wang, Y. (2011). Transform order division multiplexing. *IEEE Transactions On Signal Processing*, 59(2), 598–609.
- Torbet, E., Devlin, M., Dorwart, W., Herbig, T., Miller, A., Nolta, M., Page, L., and Puchalla, J. (1999). A measurement of the angular power spectrum of the microwave background made from the high chilean andes. *The Astrophysical Journal*, 521(2), L79–L82.
- Trivedi, V.K. and Kumar, P. (2020). Fractional fourier domain equalization for dct based ofdm system with cfo. *Digital Signal Processing*, 100(102687), 1–8.