

# Estabilização robusta de sistemas lineares discretos e variantes no tempo sujeitos a atuadores com zona morta

Caio H. P. Antunes\* Luís F. P. Silva\*,\*\* Valter J. S. Leite\*,\*\*

\* Programa de Pós-Graduação em Sistemas e Dispositivos  
Mecatrônicos/CEFET-MG

Campus Divinópolis, R. Álvares Azevedo, 400, MG, Brasil, (e-mails:  
caio.h.peixoto@hotmail.com, luis@cefetmg.br e valter@ieee.org)

\*\* Departamento de Engenharia Mecatrônica/CEFET-MG  
Campus Divinópolis, R. Álvares Azevedo, 400, MG, Brasil

---

**Abstract:** A very common non-linearity in positioning systems overall is the dead zone in the actuators. This non-linearity can result in loss of performance or even instability for the control system. Therefore, conditions for stability analysis and controller synthesis are developed in this article. These conditions are designed to be applied in discrete-time systems with time-varying parameters. The conditions use a parameter-dependent candidate for the Lyapunov function to certify the robust stability of the closed-loop and are formulated in terms of linear matrix inequalities. To solve the problems of robust stability analysis and robust controller synthesis, the respective positively invariant sets, called *Ultimate Bounded* ( $\mathcal{U}_B$ ), are also determined. Thus, once the conditions are verified, it is guaranteed that any trajectory that reaches this set will remain confined to it. Two optimization procedures are proposed to ensure that these estimated  $\mathcal{U}_B$  sets are as small as possible. Finally, two examples are presented to demonstrate the efficiency of the proposed conditions and establish a comparison with results from the literature.

**Resumo:** Uma não linearidade muito comum em sistemas de posicionamentos de maneira geral é a zona morta nos atuadores. Isso pode resultar em perda de desempenho ou até mesmo instabilidade para o sistema de controle. Diante disso, condições de análise de estabilidade e síntese de controladores são desenvolvidas neste artigo. Essas condições são desenvolvidas para serem aplicadas em sistemas discretos no tempo com parâmetros variantes no tempo. As condições utilizam uma candidata à função de Lyapunov dependente de parâmetros para certificar a estabilidade robusta da malha fechada e são formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares. Para resolver os problemas de análise de estabilidade robusta e de síntese de controlador robusto, são também determinados os respectivos conjuntos positivamente invariante, chamados de *Ultimate Bounded* ( $\mathcal{U}_B$ ), de confinamento das trajetórias. Dessa forma, garante-se que, verificadas as condições, qualquer trajetória que atingir esse conjunto permanecerá confinada nele. Dois procedimentos de otimização são propostos para minimizar o tamanho dos conjuntos  $\mathcal{U}_B$ . Por fim, dois exemplos são apresentados para demonstrar a eficiência das condições propostas e estabelecer comparação com resultados da literatura.

**Keywords:** Dead zone, Confinement of trajectories, Discrete-time systems, Linear matrix inequalities.

**Palavras-chaves:** Zona morta, Confinamento de trajetórias, Sistemas discretos no tempo, Desigualdades matriciais lineares.

---

## 1. INTRODUÇÃO

A presença de não linearidades nos atuadores é frequente, dificultando tanto a análise de estabilidade quanto a síntese de controladores. Exemplos mais comuns de não linearidades são a saturação, a zona morta e a histerese de atuadores. Essas não linearidades ocorrem devido a limitações físicas, folgas, ou mesmo para propiciar segurança operacional ao processo (Tarbouriech et al., 2011; Dilda, 2013). Seus efeitos na dinâmica do sistema podem gerar perda de desempenho ou até mesmo instabilidade.

Portanto, o correto tratamento das não linearidades é fundamental para assegurar que o sistema em malha fechada opere com eficiência adequada.

Em particular, a zona morta, cuja saída é zero para entradas dentro de uma faixa de valores em torno da origem, pode ser encontrada em sistemas mecânicos (Merrit, 1991). Essa não linearidade está presente em válvulas hidráulicas e pneumáticas e em alguns amplificadores operacionais (Dilda, 2013; Khalil, 2002). Além de anular a saída para valores do sinal de controle próximos de zero, a zona morta também diminui o valor da amplitude do sinal

de saída, causando perda de desempenho (Dilda, 2013). Assim, quando um atuador está sujeito à zona morta, o sistema fica em malha aberta para sinais de controle suficientemente pequenos (Dilda and Castelan, 2015). Por isso, tal sistema tem sua estabilidade assintótica garantida apenas se o mesmo for assintoticamente estável em malha aberta. Caso contrário, ao entrar na região em que o sinal de saída da zona morta é nulo, as trajetórias do sistema irão divergir, até que o sinal de controle volte a ter valores maiores que o limiar da zona morta.

Embora a literatura seja rica em trabalhos que lidam com a modelagem de sistemas sujeitos a não linearidades, apenas uma pequena parcela lida com o caso de o sinal de entrada estar sujeito a uma zona morta. Nesses casos, a modelagem da zona morta é tratada sob diferentes perspectivas na literatura técnica, sendo tratada via condições de setor (Turner, 2006; Turner et al., 2009; Saeki et al., 2016) e, não raro, por lógica *fuzzy* (Yang and Tong, 2016; Charandabi et al., 2011), técnicas de controle adaptativo (Wang et al., 2004, 2015), e redes neurais artificiais (Zhang and Ge, 2007; Na et al., 2011). O efeito combinado da zona morta e da saturação aparece em Dilda and Castelan (2015), visto que esse fenômeno ocorre em atuadores hidráulicos. Há também trabalhos que aplicam em robótica as condições de controle estabelecidas na literatura (Bessa et al., 2010; Xu, 2015; Yudong et al., 2015). Em BenAbdallah et al. (2011), são desenvolvidas condições LMI suficientes para estabilidade robusta de sistemas lineares por partes, com parâmetros invariantes no tempo. A estabilidade é garantida usando-se funções de Lyapunov polinomiais homogêneas. Contudo, a modelagem adotada pelos autores é abrangente, não tratando apenas da zona morta – uma vez que grande parte de sistemas não lineares podem ser modelados via funções lineares por partes, incluindo, por exemplo, a saturação. Em Turner (2006) é mostrada uma abordagem alternativa, em que o projeto de um controlador é feito utilizando-se de compensação do efeito da zona morta, caso o sistema apresente essa não linearidade. Através de uma generalização da zona morta, o autor usa condição de setor para projetar um controlador e depois compara seus resultados com as técnicas tradicionais de *anti-windup*. Além disso, a maioria das publicações trata de sistemas contínuos no tempo e com matrizes precisamente conhecidas (Milhomem et al., 2016) ou então, com parâmetros invariantes no tempo. Para o caso em que os parâmetros do sistema variam com o tempo, a literatura tem focado em sistemas lineares. Em relação ao estudo da zona morta em sistemas discretos no tempo, há poucos resultados publicados, com destaque para o trabalho de Milhomem et al. (2016) que desenvolvem condições LMI para análise de estabilidade e síntese de controladores considerando uma classe de perturbações limitadas, dentro da qual se inclui a zona morta.

Neste trabalho são desenvolvidas novas condições para a análise de estabilidade robusta e para a síntese de controladores robustos por realimentação de estados para sistemas lineares discretos no tempo variantes no tempo, sob ação da zona morta no atuador. As condições propostas são ilustradas por dois exemplos, estabelecendo-se comparação com os resultados encontrados em Milhomem et al. (2016).

O trabalho está organizado como segue: na Seção 2 são apresentados o sistema investigado e os problemas de

análise e síntese associados. Na Seção 3 são apresentados alguns resultados preliminares que são usados na Seção 4, que contém a contribuição principal do trabalho: as condições de análise de estabilidade robusta e de síntese robusta, além de dois procedimentos de otimização que visam minimizar a região de confinamento das trajetórias. Por fim, na Seção 5, são apresentados dois exemplos numéricos a fim de ilustrar e demonstrar a efetividade das condições apresentadas nas seções anteriores.

**Notações:** O conjunto dos números reais é representado por  $\mathbb{R}$ , enquanto que  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  são, respectivamente, a matriz de dimensões  $n \times m$  com com entradas reais e o vetor com  $n$  posições e entradas reais. O conjunto dos vetores com  $n_u$  posições reais não negativas é representado por  $\mathbb{R}_+^{n_u}$ . O transposto de  $M$  é denotado por  $M^T$ . Dadas duas matrizes quadradas de mesma dimensão,  $A > (\geq) B$  denota que os autovalores de  $(A - B)$  são maiores que (ou maiores ou iguais a) zero. A matriz nula de dimensão adequada é denotada por  $\mathbf{0}$ . O símbolo  $\star$  representa um bloco diagonalmente simétrico em uma matriz quadrada e simétrica.

## 2. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Seja o sistema linear discreto e com parâmetros variantes no tempo, e atuador sujeito à não-linearidade de zona morta, descrito por:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)\mathbf{d}z(u_k), \quad (1)$$

em que  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$  é o sinal de controle dado pela seguinte realimentação robusta de estados:

$$u_k = Kx_k, \quad (2)$$

na qual  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  é a matriz de ganho do controlador. Aas matrizes do sistema  $A(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B(\alpha_k) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$  são funções do parâmetro variante no tempo  $\alpha_k$ :

$$A(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} A_i, \quad B(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} B_i,$$

em que  $\alpha_k \in \Xi$ , em que:

$$\Xi = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N; \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} = 1 \text{ e } \alpha_{k(i)} \geq 0 \right\}, \quad (3)$$

e  $N$  representa o número de vértices do politopo. A função zona morta é definida pela função vetorial descentralizada  $\mathbf{d}z(u_k) : \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ , em que:

$$\mathbf{d}z(Kx_k) = \begin{cases} K_{(i)}x_k - \delta_{(i)}, & K_{(i)}x_k > \delta_{(i)}, \\ 0, & |K_{(i)}x_k| \leq \delta_{(i)}, \\ K_{(i)}x_k + \delta_{(i)}, & K_{(i)}x_k < -\delta_{(i)}, \end{cases} \quad (4)$$

em que  $\delta \in \mathbb{R}_+^{n_u}$  é o vetor com os limites de zona morta de cada atuador.

Devido à presença da zona morta, a região de estados na vizinhança da origem tais que  $\mathbf{d}z(Kx_k) = 0$  deixam o sistema em malha aberta. Caso o sistema incerto (1) não seja estável, esse conjunto de estados em torno da origem produz trajetórias divergentes, até que  $\mathbf{d}z(Kx_k) \neq 0$ , quando a ação de controle é recuperada e as trajetórias são novamente forçadas ao interior da região em que  $\mathbf{d}z(Kx_k) = 0$ , para um ganho  $K$  estabilizante.

Essa região pode ser representada como o conjunto dos estados para os quais as trajetórias de (1)-(2) convergem

em um tempo finito e permanecem confinadas, sendo denotada por  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  (do inglês *ultimate bounded*) (Blanchini, 1994; Hsu and Fong, 2001). Esse conjunto possui a propriedade de ser positivamente invariante (Khalil, 2002; Tarbouriech et al., 2011).

Essa ideia do conjunto de confinamento final, ou conjunto  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ , pode ser aplicada em sistemas variantes no tempo, sendo portanto, necessário de ser satisfeito para todo  $\alpha_k \in \Xi$ . A Definição a seguir formaliza esses conceitos para sistemas variantes no tempo como o descrito por (1).

**Definição 1.** As soluções do sistema em malha fechada (1)-(2) são robustamente ultimamente limitadas se existir um conjunto  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  que contém a origem, para o qual as trajetórias da malha fechada convergem e nele ficam confinadas, após um número de amostras  $k > 0$  finito, para todo  $\alpha_k \in \Xi$ .

Se as condições dadas na Definição 1 são verificadas para para todo  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , então as soluções de (1)-(2) são globalmente robustamente ultimamente limitadas e a origem é dita robustamente  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  estável. Do contrário, caso a condição seja verificada apenas para um subconjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , então as soluções são ditas regionalmente robustamente ultimamente limitadas (Khalil, 2002; Leitmann, 1978; Dilda et al., 2014).

Diante disso, os dois problemas tratados neste manuscrito são descritos a seguir.

**Problema 1.** (Análise). Dada uma matriz de realimentação de estados  $K$ , determine se a malha fechada formada por (1)-(2) é robustamente  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  estável. Além disso, determine a menor região  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  possível de tal forma que qualquer trajetória permaneça confinada.

**Problema 2.** (Síntese). Determine um ganho de realimentação de estados  $K$  tal que a malha fechada (1)-(2) seja robustamente  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  estável. Além disso, determine a região  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  que garanta que qualquer trajetória permanecerá confinada em seu interior.

### 3. RESULTADOS PRELIMINARES

Aplicando o sinal de controle (2) no sistema variante no tempo (1), obtém-se a malha fechada descrita por

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)\mathbf{dz}(Kx_k). \quad (5)$$

Somando-se e subtraindo-se  $B(\alpha_k)Kx_k$  no lado direito da equação (5), chega-se em

$$x_{k+1} = \tilde{A}(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)\mathbf{sat}(Kx_k), \quad (6)$$

em que  $\tilde{A}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K$ , a função saturação é dada por

$$\mathbf{sat}(Kx_k) = \begin{cases} \delta_{(i)}, & K_{(i)}x_k > \delta_{(i)}, \\ K_{(i)}x_k, & |K_{(i)}x_k| \leq \delta_{(i)}, \\ -\delta_{(i)}, & K_{(i)}x_k < -\delta_{(i)}, \end{cases} \quad (7)$$

com  $i = 1, \dots, n_u$ , e  $\mathbf{dz}(Kx_k)$  é a função zona morta dada em (4). Note que a função saturação pode ser reescrita como  $\mathbf{sat}(Kx_k) = \mathbf{dz}(Kx_k) - Kx_k$ .

Como a saturação,  $\mathbf{sat}(u_k)$ , é um sinal limitado em amplitude, pode-se escrevê-la como  $\mathbf{sat}(u_k) = \omega_k \in \mathcal{W}(\delta) \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$ , sendo  $\mathcal{W}$  um conjunto politópico dado por

$$\mathcal{W}(\delta) = \{\omega_k \in \mathbb{R}^{n_u} : \omega_{k(i)} = (1 - 2v_{k(i)})\delta_{(i)}, v_k \in \mathbb{R}^{n_u}, v_{k(i)} \in [0, 1]\}. \quad (8)$$

Portanto, o sistema (6) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$x_{k+1} = \tilde{A}(\alpha_k)x_k + B(\alpha_k)\omega_k. \quad (9)$$

Os resultados propostos neste trabalho são baseados na candidata a função de Lyapunov  $V(x_k, \alpha_k) : \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$V(x_k, \alpha_k) = x_k^\top P(\alpha_k)x_k, \quad (10)$$

em que  $P(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)}P_i$ , com  $P_i = P_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n} > \mathbf{0}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

O Lema a seguir relaciona a candidata a função de Lyapunov (10) com um conjunto positivamente invariante, de tal forma a tratar o problema da zona morta via a representação dessa por um sinal exógeno limitado em amplitude, como mostrado em (8), estabelecendo-se a estabilidade  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  robusta.

**Lema 3.** Considere  $V(x_k, \alpha_k)$  em (10) e o conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(P(\alpha_k), c)$  formado por um conjunto de nível de  $V(x_k, \alpha_k)$  tal que

$$\mathcal{E}(P(\alpha_k), c) = \{x_k \in \mathbb{R}^n : x_k^\top P(\alpha_k)x_k \leq c\}. \quad (11)$$

Se

$$\Delta V(x_k, \alpha_k) - \tau(c - x_k^\top P(\alpha_k)x_k) < 0 \quad (12)$$

é verificada para todo  $\alpha_k \in \Xi$  e para um escalar  $\tau > 0$  e  $P(\alpha_k) > \mathbf{0}$ , então  $V(x_k, \alpha_k)$  em (10) é uma função de Lyapunov válida para  $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{E}(P(\alpha_k), c)$ . Além disso, o conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(P(\alpha_k), c)$  é positivamente invariante, garantindo-se que a origem é robustamente  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  estável para (5).

**Prova.** A partir da definição do conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(P(\alpha_k), c)$  dada em (11), tem-se que  $c - x_k^\top P(\alpha_k)x_k \geq 0$ . Portanto, se (12) é verificada, então

$$\Delta V(x_k, \alpha_k) < \tau(c - x_k^\top P(\alpha_k)x_k) \quad (13)$$

e da hipótese de  $P(\alpha_k) > \mathbf{0}$ , garante-se que (10) é uma função de Lyapunov sempre que  $x_k \notin \mathcal{E}(P(\alpha_k), c)$ , caso contrário  $\Delta V(x_k, \alpha_k)$  assume valores positivos o que resulta em trajetórias divergentes em relação a origem para o sistema (5). Contudo, assim que as trajetórias tendem a sair de  $\mathcal{E}(P(\alpha_k), c)$ ,  $\Delta V(x_k, \alpha_k)$  se torna negativo, comprovando, portanto, que o conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(P(\alpha_k), c)$  é um conjunto positivamente invariante e que a malha fechada (5) é robustamente  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$  estável.

Note que as condições colocadas no Lema 3 são de dimensão infinita em  $\alpha_k$ . Essa limitação será tratada nas condições propostas na seção seguinte para que o cômputo do conjunto de nível associado à função de Lyapunov possa ser feito em tempo finito.

Seja  $\hat{\delta} \in \mathbb{R}^{n_u}$  representa todos os possíveis vetores cujos elementos assumam apenas os valores 1 ou  $-1$ . Considere também o conjunto  $\hat{\Delta} = \{\phi \in \mathbb{R}^{n_u} : \phi = \mathbf{diag}(\hat{\delta})\delta\}$ . Portanto, o conjunto  $\hat{\Delta}$  possui  $2^{n_u}$  vetores, cada uma deles indicado por  $\phi_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, 2^{n_u}$ . O conjunto  $\hat{\Delta}$  é usado para tratar o efeito da zona morta como uma perturbação limitada em amplitude, quando  $\mathbf{dz}(\cdot) = 0$ .

### 4. RESULTADOS PRINCIPAIS

Dois teoremas são propostos nesta seção que apresentam condições suficientes para a solução dos problemas 1 e 2.

#### 4.1 Análise de estabilidade robusta

**Teorema 4.** Considere o sistema (5) com a matriz de ganho de realimentação de estados  $K$  dada. Se existirem escalares  $\tau \in (0, 1)$  e  $c > 0$ , matrizes definidas positivas  $P_i = P_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para  $i = 1, \dots, N$ , e uma matriz  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que as seguintes LMIs são satisfeitas, para  $i, j = 1, \dots, N$  e  $\ell = 1, \dots, 2^{n_u}$ ,

$$\begin{bmatrix} P_j - F - F^\top & F\tilde{A}_i & FB_i\phi_\ell \\ \star & -(1-\tau)P_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & -c\tau \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (14)$$

em que  $\tilde{A}_i = A_i + B_iK$ . Então, o sistema em malha fechada (5) é robustamente  $\mathcal{U}_B$  estável, e toda trajetória que atingir o conjunto  $\mathcal{E}(P(\alpha_k), c)$  permanecerá confinada em seu interior. Além disso,  $\mathcal{E}(P(\alpha_k), c)$  pode ser computado por

$$\mathcal{E}(P(\alpha_k), c) = \bigcap_{i=1, \dots, N} \mathcal{E}(P_i, c), \quad (15)$$

em que

$$\mathcal{E}(P_i, c) = \{x_k \in \mathbb{R}^n : x_k^\top P_i x_k \leq c, \quad i = 1, \dots, N\}, \quad (16)$$

provendo, portanto, uma solução ao Problema 1.

**Prova.** Se as LMIs em (14) são satisfeitas, então garante-se a positividade das matrizes  $P_i$  (bloco (2,2)), para  $i = 1, \dots, N$ , e conseqüentemente a regularidade da matriz  $F$  (bloco (1,1)). Portanto, multiplicando-se (14) por  $\alpha_{k(i)}$  e  $\alpha_{k+1(j)}$ , somando-se em  $i = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, N$ , considerando-se o conjunto  $\mathcal{W}$  em (8) e pré- e pós-multiplicando-se o resultado por  $[x_{k+1}^\top \quad x_k^\top \quad 1]^\top$  e sua transposta, respectivamente, chega-se em

$$x_{k+1}^\top P(\alpha_{k+1}) x_{k+1} - x_k^\top P(\alpha_k) x_k - c\tau + \tau x_k^\top P(\alpha_k) x_k < 0. \quad (17)$$

Como  $\Delta(V(x_k, \alpha_k)) = x_{k+1}^\top P(\alpha_{k+1}) x_{k+1} - x_k^\top P(\alpha_k) x_k$ , chega-se à desigualdade (12) apresentada no Lema 3. Dessa forma, com a verificação de (14) garante-se que a origem de (5) é robustamente  $\mathcal{U}_B$  estável e o conjunto  $\mathcal{E}(P_i, c)$  é positivamente invariante. O cômputo de  $\mathcal{E}(P(\alpha_k), 1)$  por meio das condições de dimensão finita em  $\alpha_k$  dadas em (15) pode ser feito usando (Jungers and Castelan, 2011, Lemma 4).

#### 4.2 Síntese de controlador robusto

**Teorema 5.** Considere o sistema (3)-(4). Suponha que existam escalares  $\tau \in (0, 1)$  e  $c > 0$ , matrizes definidas positivas  $W_i = W_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para  $i = 1, \dots, N$ , matrizes  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ , tais que as seguintes LMIs são satisfeitas, para  $i, j = 1, \dots, N$  e  $\ell = 1, \dots, 2^{n_u}$ :

$$\begin{bmatrix} -U - U^\top & A_i U + B_i Y & B_i \phi_\ell & U^\top \\ \star & (1-\tau)(W_i - U - U^\top) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -c\tau & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -W_j \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (18)$$

Então, a matriz do ganho de realimentação de estados da lei de controle (2) é calculada por

$$K = YU^{-1}, \quad (19)$$

e o sistema (1) sob a lei de controle (2) é robustamente  $\mathcal{U}_B$  estável e toda trajetória que atingir o conjunto  $\mathcal{E}(P(\alpha_k), c)$  permanecerá confinada em seu interior, sendo esse conjunto calculado via (15) e provendo uma solução para o Problema 2.

**Prova.** Se (18) é verificada, então pode-se usar o fato matricial  $(U - W_i)^\top W_i^{-1} U \geq \mathbf{0} \Rightarrow W_i - U - U^\top \geq U^\top W_i^{-1} U$ , para substituir o bloco (2,2) pelo lado direito da desigualdade  $(1-\tau)(W_i - U - U^\top) \geq -(1-\tau)U^\top W_i^{-1} U$ . Após essa substituição, aplica-se o complemento de Schur, obtendo-se

$$\begin{bmatrix} U^\top W_j^{-1} U - U - U^\top & A_i U + B_i Y & B_i \phi_\ell \\ \star & -(1-\tau)U^\top W_i^{-1} U & \mathbf{0} \\ \star & \star & -c\tau \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (20)$$

Utilizando a matriz  $\text{diag}\{U^{-\top}, U^{-\top}, 1\}$  para fazer uma transformação de congruência em (20), considerando  $F = U^{-\top}$  e  $W_i^{-1} = P_i$ , para  $i = 1, \dots, N$ , chega-se em (14). A partir desse ponto a prova segue os mesmos passos da prova do Teorema 4.

#### 4.3 Procedimentos de otimização

Um objetivo de análise e de síntese de controladores para os sistemas com atuadores sujeitos ao efeito da zona morta, trata da obtenção do menor conjunto  $\mathcal{U}_B$  possível. No caso da análise de estabilidade, uma forma de se fazer isso é maximizando-se o traço de  $P(\alpha_k)$ . Outra forma, é impondo-se  $P(\alpha_k) \geq H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e maximizar o traço de  $H$ . Ou seja,

$$P_i - H \geq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (21)$$

No caso da síntese robusta, usa-se um raciocínio semelhante e o fato de  $P_i = W_i^{-1}$  e impõem-se

$$W_i - H \leq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (22)$$

buscando-se, neste caso, a minimização do traço de  $H$ .

Dessa forma, podem ser estabelecidos dois procedimentos de otimização, um para a análise de estabilidade,  $\mathcal{P}_A$ , e outro para a síntese de controlador,  $\mathcal{P}_S$ , conforme apresentados a seguir:

$$\mathcal{P}_A \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \text{traço}(H) \\ \text{sujeito a} \quad (14) \text{ e } (21). \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\mathcal{P}_S \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \text{traço}(H) \\ \text{sujeito a} \quad (18) \text{ e } (22). \end{array} \right. \quad (24)$$

**Observação 1.** Os valores de escalares  $\tau \in (0, 1)$  e  $c > 0$  podem ser buscados realizando-se, por exemplo, um grid nesses parâmetros, tipicamente na faixa entre 0 e 1.

## 5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, dois exemplos numéricos são apresentados. O primeiro trata de um sistema precisamente conhecido e permite a comparação dos resultados alcançados com esta proposta feita por Milhomem et al. (2016). No segundo exemplo, esta abordagem é avaliada num sistema variante no tempo, ilustrando sua aplicação no caso mais geral.

#### 5.1 Sistema precisamente conhecido

Considere o sistema (1)-(3) com as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1.046 & -0.105 \\ 0.105 & 1.046 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0.046 \\ 0.105 \end{bmatrix}$$

e função zona morta com  $\delta = 0.4$ . Esse sistema já foi abordado em Milhomem et al. (2016), cujos resultados são

limitados ao caso precisamente conhecido. Resolvendo o procedimento de otimização  $\mathcal{P}_S$  em (24) com  $c = 0.001$  e  $\tau = 0.9$ , obtém-se

$$K = [64.9699 \quad -47.0988]$$

e

$$W^{-1} = P = \begin{bmatrix} 19.4224 & -11.0823 \\ -11.0823 & 6.3519 \end{bmatrix}.$$

Comparando as áreas das regiões  $\mathcal{U}_B$  obtidas pelos resultados propostos neste trabalho com aqueles alcançados por Milhomem et al. (2016), nota-se que a área aqui obtida é aproximadamente 2.5 vezes menor, evidenciando o menor conservadorismo desta proposta. Essas regiões estão apresentadas na Figura 1, em que a região representada pela elipse vermelha foi obtida por Milhomem et al. (2016) e a elipse de preta foi obtida a partir dos resultados apresentados neste artigo.

Uma simulação foi realizada no sistema em malha fechada resultante sendo a condição inicial definida como  $x_0 = [-0.1 \ 0.1]^\top$ . A trajetória resultante está apresentada na Figura 1. Note que como esperado, após a trajetória entrar na região  $\mathcal{U}_B$ , representada pela elipse preta, ela fica confinada nesse conjunto.

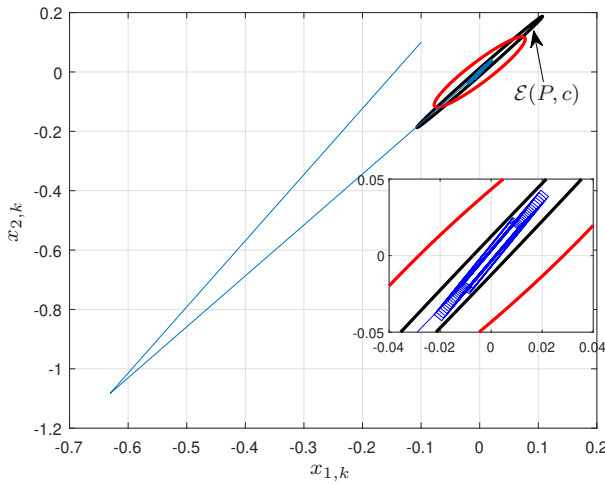


Figura 1. Trajetória sistema em malha fechada e região  $\mathcal{U}_B$ .

### 5.2 Sistema Variante no tempo

Considere o sistema incerto e variante no tempo dado por (1)-(3) em que  $N = 2$ ,  $\delta = 0.5$ , e as matrizes do sistema são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.8 \\ -0.48 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A_2 = 0.8A_1$  e  $B_2 = B_1$ . Note que a matriz  $A_1$  possui autovalores com módulos maiores que unidade, portanto, esse sistema é instável em malha aberta. Dessa forma, utiliza-se o procedimento de otimização (24) com  $\tau = 0.5$  e  $c = 0.001$  para calcular o ganho do controlador robusto que  $\mathcal{U}_B$ -estabiliza o sistema em malha fechada e, além disso, minimiza o tamanho da região  $\mathcal{U}_B$ . O ganho do controlador de realimentação de estados calculado é:

$$K = [-0.9900 \quad -0.9193].$$

As matrizes  $P_i = W_i^{-1}$ , para  $i = 1, 2$ , calculadas foram as seguintes:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0015 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0002 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0002 \end{bmatrix}.$$

Considerando a condição inicial  $x_0 = [-2 \ 5]^\top$  e o parâmetro variante no tempo dado por:

$$\alpha_{k(1)} = \sin^2(k) \quad \text{e} \quad \alpha_{k(2)} = 1 - \alpha_{k(1)},$$

obteve-se a trajetória para o sistema em malha fechada resultante apresentada na Figura 2 em que também é mostrada a região  $\mathcal{U}_B$ . Como esperado, assim que a trajetória entra na região  $\mathcal{U}_B$ , ela fica confinada nessa mesmo ocorrendo o efeito da zona morta do atuador.

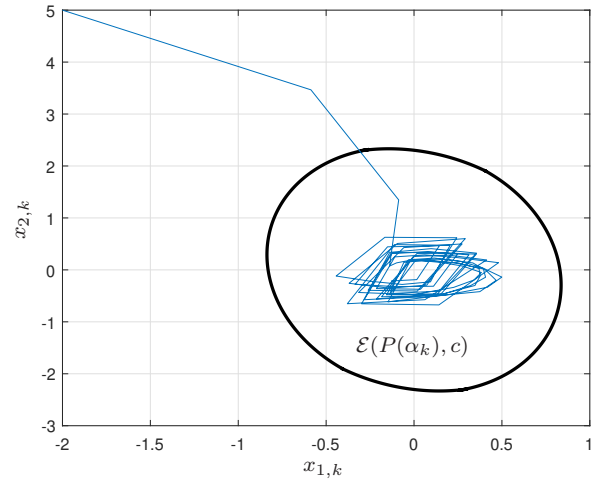


Figura 2. Trajetória do sistema em malha fechada e região  $\mathcal{U}_B$ .

Nota-se que diferentemente do caso precisamente conhecido, Seção 5.1, a estimativa de  $\mathcal{U}_B$  no caso variante no tempo é mais conservadora. Esse fato advém da necessidade de assegurar a região  $\mathcal{U}_B$  para qualquer sequência de valores de  $\alpha_k \in \Xi$ . Além disso, a abordagem proposta por Milhomem et al. (2016) não se aplica neste caso, por ser o sistema variante no tempo.

## 6. CONCLUSÃO

Condições de análise de estabilidade robusta e de síntese de ganho robusto de realimentação de estados para sistemas lineares incertos, discretos e variantes no tempo são apresentadas neste trabalho. O sistema de controle resultante é afetado pela não linearidade de zona morta. Diante disso, conjuntos positivamente invariantes, denominados  $\mathcal{U}_B$  (*Ultimate Bounded*), são calculados como os menores possíveis de tal forma que toda trajetória que os atingir, neles fica confinada. Para minimizar o tamanho da estimativa de  $\mathcal{U}_B$ , dois procedimentos de otimização foram propostos. Finalmente, dois exemplos foram apresentados para demonstrar a eficiência dos resultados obtidos, estabelecendo comparação com resultado da literatura. Como perspectivas, pretende-se investigar a extensão das condições propostas para tratar sistemas lineares controladores com parâmetros variantes no tempo.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte do CEFET-MG e CNPq (311208/2019-3).

## REFERÊNCIAS

- BenAbdallah, A., Hammami, M.A., and Kallel, J. (2011). Robust stability of piecewise-linear systems: LMI approach. *Nonlinear Dynamics*, 63, 183–192.
- Bessa, W.M., Dutra, M.S., and Kreuzer, E. (2010). Sliding mode control with adaptive fuzzy dead-zone compensation of an electro-hydraulic servo-system. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 58, 3–16.
- Blanchini, F. (1994). Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(2), 428–433.
- Charandabi, B.A., Salmasi, F.R., and Sedigh, A.K. (2011). Improved dead zone modification for robust adaptive control of uncertain linear systems described by input-output models with actuator faults. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(4), 863–867.
- Dilda, V. (2013). *Controle de sistemas lineares com atuadores sujeitos a zona morta no atuador*. Ph.D. thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, Florianópolis, SC. URL <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/122709>. Orientador: Eugênio de Bona Castelan Neto. 107 p.
- Dilda, V. and Castelan, E.B. (2015). Análise de estabilidade para sistemas lineares com zona morta e saturação. In *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, 993–998. Natal, RN, Brasil.
- Dilda, V., Castelan, E.B., and Jungers, M. (2014). Uniform ultimate boundedness analysis and synthesis for linear systems with dead-zone in the actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25, 2502–2514.
- Hsu, C.C. and Fong, I.K. (2001). Ultimate boundedness control of linear systems with band-bounded nonlinear actuators and additive measurement noise. *Systems & Control Letters*, 43, 329–336.
- Jungers, M. and Castelan, E.B. (2011). Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators. *Systems & Control Letters*, 60(3), 315–325.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, EUA.
- Leitmann, G. (1978). Guaranteed ultimate boundedness for a class of uncertain linear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(6), 1109–1110.
- Merrit, H.E. (1991). *Hydraulic Control Systems*. Wiley, EUA.
- Milhomem, R.L., Castelan, E.B., Pomar, M.J., and Silveira, H.B. (2016). Condições LMIs para análise e síntese de sistemas lineares em tempo discreto sujeitos a uma classe de perturbações limitadas. In *XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*, 2163–2168. Vitória, ES, Brasil.
- Na, J., Ren, X., Herman, G., and Qiao, Z. (2011). Adaptive neural dynamic surface control for servo systems with unknown dead-zone. *Control Engineering Practice*, 19(11), 1328–1343.
- Saeki, M., Wanda, N., and Satoh, S. (2016). Stability analysis of feedback systems with dead-zone nonlinearities by circle and Popov criteria. *Automatica*, 66, 96–100.
- Tarbouriech, S., Queineec, I., Alamo, T., Fiacchini, M., and Camacho, E.F. (2011). Ultimate bounded stability and stabilization of linear systems interconnected with generalized saturated functions. *Automatica*, 47(7), 1473–1481.
- Turner, M.C. (2006). Actuator deadzone compensation: theoretical verification of an intuitive control strategy. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 153(1), 59–68.
- Turner, M.C., Herman, G., and Postlethwaite, I. (2009). Improving sector-based results for systems with dead-zone nonlinearities and constrained control applications. *Automatica*, 45(1), 155–160.
- Wang, F., Liu, Z., Zhang, Y., Chen, X., and Chen, C. (2015). Adaptive fuzzy dynamic surface control for a class of nonlinear systems with fuzzy dead zone and dynamic uncertainties. *Nonlinear Dynamics*, 79, 1693–1709.
- Wang, X.S., Su, C.Y., and H, H. (2004). Robust adaptive control of a class of nonlinear systems with unknown dead-zone. *Automatica*, 40(3), 407–413.
- Xu, B. (2015). Robust adaptive neural control of flexible hypersonic flight vehicle with dead-zone input nonlinearity. *Nonlinear Dynamics*, 80, 1509–1520.
- Yang, W. and Tong, S. (2016). Robust stabilization of switched fuzzy systems with actuator dead zone. *Neurocomputing*, 173(3), 1028–1033.
- Yudong, H.E., Junzheng, W.A.N.G., and Renjian, H.A.O. (2015). Adaptive robust dead-zone compensation control of electro-hydraulic servo systems with load disturbance rejection. *Journal of Systems Science and Complexity*, 28, 341–359.
- Zhang, T.P. and Ge, S.S. (2007). Adaptive neural control of mimo nonlinear state time-varying delay systems with unknown dead-zones and gain signs. *Automatica*, 43(6), 1021–1033.